ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

В.В.Зайцев, В.В.Рыжков, М.И.Сканави



В.В.Зайцев
В.В.Рыжков
М.И.Сканави
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

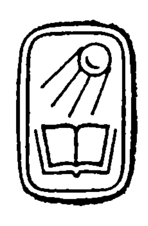
В. В. ЗАЙЦЕВ, В. В. РЫЖКОВ, М. И. СКАНАВИ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ КУРС

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией
В. В. РЫЖКОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

51
З 17
УДК 510

З $\frac{20202\text{-}097}{053\,(02)\text{-}74}$ 29-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее, второе издание «Элементарной математики», вышедшей в 1967 г., является результатом существенной переработки книги, затронувшей всю ее структуру. В соответствии с принятым ныне делением курса элементарной математики, произведено объединение части первой (алгебра) и части третьей (тригонометрия) первого издания в одну часть «Арифметика, алгебра и элементарные функции». Естественно, что такое объединение не могло быть произведено механически, а потребовало существенного пересмотра всего материала. В результате изменена последовательность глав книги и перераспределен заново материал между главами. Объединен в одну главу весь материал, относящийся к функциям (кроме тригонометрических). То же относится к темам «Уравнения» и «Неравенства». За счет устранения длиннот и повторений включен ряд новых вопросов (например, график дробно-линейной функции; полярные координаты; возвратные уравнения и ряд других). Главы, посвященные тригонометрии, также подверглись редакционной переработке, что позволило несколько сократить их объем без ущерба для содержания. Сравнительно меньшие изменения произошли в части второй «Геометрия». Кроме устранения отдельных выявленных в первом издании дефектов, здесь разделена на две главы глава IV первого издания. Теория подобия выделена в отдельную главу. Решение треугольников в несколько сокращенном объеме перенесено из тригонометрии в главу «Метрические соотношения в треугольнике и круге», в связи с чем изменена последовательность изложения материала.

Основным главам предшествует введение, где освещаются некоторые принципиальные вопросы курса математики, в том числе метод математической индукции и доказательство от противного.

Как и в первом издании, содержание ориентировано на программы вступительных экзаменов в технические вузы и, в особенности, на программы подготовительных отделений при высших учебных заведениях, для учащихся которых, как мы надеемся, книга окажется полезной.

В начальной стадии работы над вторым изданием книги авторский коллектив понес тяжелую утрату: безвременно скончался инициатор и один из авторов книги Марк Иванович Сканави. Осуществить задуманную им переработку глав, посвященных арифметике и алгебре, пришлось его соавторам, на которых и ложится ответственность за качество выполненной работы.

При подготовке настоящего издания большую работу по проверке ответов к упражнениям проделал Сергей Беркесов. Выражаем ему за это сердечную благодарность.

Авторы

О ПОЛЬЗОВАНИИ КНИГОЙ

Книга представляет собой повторительный курс элементарной математики в том смысле, что она рассчитана на читателя, уже изучавшего предмет, но желающего пополнить, укрепить и систематизировать свои знания (например, с целью подготовки в вуз). Поэтому предполагается, что, излагая тот или иной вопрос, можно ссылаться для пояснения или достижения полноты освещения вопроса и на последующий материал, предусматривая, что читатель имеет о нем хотя бы общее представление. Таких ссылок в тексте довольно много; для удобства пункты, на которые разбит материал, снабжены сплошной нумерацией. Ссылки даются в виде (см. п. 184) или просто (п. 55). Рисунки также имеют сплошную нумерацию; формулы имеют двойной номер (например, (4.5) или (217.3), т. е. пятая формула пункта 4 или третья формула пункта 217).

Читатель, не слишком позабывший материал школьной программы, может изучать книгу подряд; однако отнесение всей геометрии на конец нецелесообразно (геометрия обычно изучается параллельно с другим материалом). В качестве одного из вариантов можно предложить такую последовательность в изучении материала:

1) главы I—VII; 2) главы VIII, XVI и гл. XVII до п. 216 включительно; 3) остальные главы первой части; 4) остальной материал второй части.

При использовании книги учащимися подготовительных отделений вузов последовательность, естественно, определяется порядком прохождения материала на занятиях.

Мелкий шрифт употреблен для выделения материала, не входящего в минимальную обязательную программу.

Для читателя, желающего далее расширить свои математические познания (это важно для поступающих на специальности с повышенными требованиями к математической подготовке), можно рекомендовать следующую литературу:

1) Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Пособие по математике для поступающих в вузы, изд-во «Наука».

2) В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, Лекции и задачи по элементарной математике, изд-во «Наука».

Небольшое количество упражнений в книге никоим образом не заменяет задачника. Для приобретения необходимых навыков в решении задач и примеров можно использовать следующие задачники:

1) В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Г. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, М. И. Сканави, Н. М. Федорова, Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы, изд-во «Высшая школа».

2) В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин, Задачи по элементарной математике, изд-во «Наука».

3) Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин, Задачи по элементарной математике (повышенной трудности), изд-во «Наука».

ВВЕДЕНИЕ

А. Определения. Аксиомы. Теоремы. Строгое изложение любой части математики основывается на введении некоторых простейших неопределяемых понятий (например, для геометрии: «точка», «прямая», «лежать на», «между» и т. д.). Обычно этим понятиям отвечает некоторый очевидный, интуитивно ясный смысл. Далее формулируются некоторые первичные, недоказуемые (в принципе или при данной форме изложения) утверждения; они называются *аксиомами* или *постулатами*. Например: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую. Это аксиоматически принимаемое положение использует неопределяемые понятия: «плоскость», «прямая», «точка», «лежать на» (чтобы фактически не употреблять других понятий, пришлось бы сформулировать аксиому несколько длиннее: если существует точка, лежащая на двух плоскостях, то существует и прямая, лежащая на этих плоскостях). Кроме специфических понятий каждой математической теории (арифметики, геометрии и т. п.), во всей математике используются также понятия *множества* (как определенного собрания любых элементов), *соответствия* (в выражениях типа «пусть каждому x соответствует определенное y» и т. п.) и общие правила логического ведения рассуждений [1]).

Дальнейшим используемым понятиям даются определения в терминах первоначальных или уже введенных понятий. Пример: *отрезком AB* прямой называется множество точек, включающее точки A, B и все точки, лежащие между ними. В этом определении, например, употреблены понятия «множество», «между» и т. д.

Относительно первоначальных и введенных с их помощью дальнейших понятий доказываются (на основе аксиом и ранее доказанных утверждений, с помощью обычных правил логики) новые утверждения, называемые *теоремами*, иногда *леммами* (обычно леммой называют утверждение, не имеющее важного самостоятельного значения, но используемое при доказательстве других теорем).

---

[1]) Исключение составляют книги по основаниям математики, где критически исследуют и сами правила логического вывода и обоснованность использования понятий, относящихся к множествам.

Полностью выдержанное по указанной схеме изложение математических дисциплин называется *аксиоматическим* (точнее, полуформальным). Фактически осуществить его в полной мере в рамках учебника не удается, так как объем его получился бы слишком большим, а изложение очень утомительным. Поэтому и в школьных учебниках и в данной книге аксиомы приводятся лишь частично, часть теорем сообщается без доказательства, а доказательства некоторых других построены с бóльшим или меньшим привлечением интуитивно ясных соображений (которые в принципе могли бы быть доказаны исходя из полной системы аксиом).

Б. Логическое следование. Необходимые и достаточные условия. Утверждения (теоремы) в математике, явно или неявно, имеют следующую форму: «если..., то...». Например: «если одна из медиан треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный». Утверждение: «медианы треугольника делят друг друга в отношении 2:1» — можно сформулировать в сходной форме: «если отрезки AM и BN являются медианами треугольника ABC, то они делят друг друга в отношении 2:1».

Таким образом, для доказательства теоремы необходимо бывает установить, что из некоторых предположений (посылок) с логической необходимостью вытекает некоторый результат (вывод).

В логике тот факт, что из посылки A вытекает вывод B, обозначают так: $A \Rightarrow B$ (или каким-либо сходным образом).

В этом случае говорят, что A является *достаточным* условием для B; в свою очередь B является *необходимым* условием для A. Это означает, что для справедливости B достаточно (но, вообще говоря, не необходимо) выполнения A; для справедливости A необходимо (но, вообще говоря, недостаточно) выполнение B. Например, в утверждении: «если фигуры равны, то они равновелики» (т. е. имеют равные площади) — равенства фигур достаточно для равенства их площадей. В то же время равенство площадей — необходимое условие равенства фигур. Если оказывается, что не только $A \Rightarrow B$, но и $B \Rightarrow A$, то оба утверждения A и B называют *эквивалентными*. В математических текстах при этом употребляют выражения типа: «A тогда и только тогда, когда B», «A, если и только если B». Тот же смысл имеют и выражения: «A необходимо и достаточно для B». Пример: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали делили друг друга пополам. Говорят, что свойство диагоналей делить друг друга пополам является необходимым и достаточным условием того, чтобы четырехугольник был параллелограммом.

В. Прямая, обратная, противоположная теоремы. Доказательства от противного. Наряду с каким-либо утверждением A (при этом вообще, под утверждением понимается любое пове-

ствовательное предложение, о котором всякий раз можно сказать, что оно истинно либо ложно) можно рассматривать его отрицание, утверждение «не A», обозначаемое короче $\bar{A}$ и состоящее в том, что A ложно. A и $\bar{A}$ всегда образуют такую пару утверждений, что из них одно истинно, а другое ложно.

Приведем примеры.

A	$\bar{A}$
1) Данные три точки лежат на одной прямой.	Данные три точки не лежат на одной прямой.
2) Квадрат любого действительного числа положителен.	Существует хотя бы одно действительное число, квадрат которого отрицателен или равен нулю.
3) Число a меньше числа b.	Число a больше или равно числу b.
4) При любом натуральном $n \geqslant 3$ существует правильный n-угольник	Существует хотя бы одно натуральное $n \geqslant 3$ такое, что не существует правильного n-угольника.

Ясно, что в примерах 1) и 3) утверждение A или $\bar{A}$ окажется истинным (ложным) в зависимости от заданных точек или чисел a, b. В примере 2) A ложно, $\bar{A}$ истинно, так как $0^2=0$; в примере 4) A истинно, а $\bar{A}$ ложно.

Представим себе теперь некоторое математическое утверждение (теорему) вида $A \Rightarrow B$; наряду с ним можно рассматривать следующие три другие утверждения (теоремы):

$B \Rightarrow A$ (обратное утверждение), (1)

$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (противоположное утверждение), (2)

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (утверждение, обратное противоположному или, что то же — противоположное обратному). (3)

Их называют соответственно *обратной теоремой*, *противоположной теоремой*, *теоремой*, *обратной противоположной*; следует иметь при этом в виду, что *теоремой* мы обычно называем истинное утверждение, вообще же для любого утверждения это заранее не предполагается.

Утверждения $A \Rightarrow B$ и (3) эквивалентны: именно, если верно утверждение $A \Rightarrow B$, то верно и обратное противоположному $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (и обратно). Аналогично, эквивалентны обратное и противоположное утверждения (1), (2).

Доказательство этого правила вытекает из условия считать, что из двух высказываний A и $\bar{A}$ всегда одно истинно, а другое ложно (в логике это называют *принципом исключенного третьего*).

Пусть $A \Rightarrow B$; установим, что тогда и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

В самом деле, если имеет место $\bar{B}$, то B не выполняется. Но тогда неверно и A (иначе было бы верно и B). Следовательно, верно $\bar{A}$, т. е. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Пусть $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$; установим, что тогда и $A \Rightarrow B$.

Действительно, пусть A истинно. Тогда $\bar{A}$ ложно, тем самым ложно и $\bar{B}$ (иначе $\bar{A}$ было бы истинно). Следовательно, B истинно; итак, $A \Rightarrow B$.

В силу эквивалентности утверждений $A \Rightarrow B$ и $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ доказательство прямой теоремы иногда заменяют доказательством теоремы, противоположной обратной. Например, доказательство теоремы:

Если a — натуральное число, то корень $\sqrt{a} = b$ — либо натуральное, либо иррациональное число,

может быть заменено доказательством теоремы, противоположной обратной:

Если b — дробное рациональное число (т. е. не целое и не иррациональное), то его квадрат не может быть натуральным числом.

Доказательство в этой второй равносильной формулировке провести проще.

Что касается теоремы, обратной данной, то возможно, что она и неверна (нет прямой связи между справедливостью утверждений $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$). Например, справедливо утверждение: «если один угол треугольника тупой, то два других — острые». Очевидно, что неверно обратное утверждение: «если два угла треугольника острые, то третий — тупой».

Остановимся еще на приеме доказательства «от противного» (по-латыни *reductio ad absurdum* — приведение к абсурду). Логическая сущность его такова (она близка к замене данного утверждения противоположным обратному). Пусть требуется доказать предложение $A \Rightarrow B$. Допускаем, что A справедливо, но тем не менее имеет место $\bar{B}$; если это предположение приведет нас в результате правильных логических умозаключений к какому-либо заведомо ложному выводу, то $\bar{B}$ следует признать ложным, а B — истинным (при условии A). Теорема $A \Rightarrow B$ считается в этом случае доказанной.

Пример: доказательство теоремы планиметрии «две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой». Его можно провести так. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Требуется доказать, что $a \parallel b$. Допустим противное, что a и b пересекаются в точке M. Тогда через точку M пройдут две прямые a и b, параллельные прямой c, что противоречит постулату о параллельных прямых (см. п. 171).

Д. Метод математической индукции. Пусть имеется некоторое утверждение о натуральном числе n; для доказательства такого утверждения может быть применен *метод математической индукции*, состоящий в следующем. Пусть установлено, что

1) данное утверждение справедливо при $n=1$;

2) из предположения, что оно справедливо при некотором значении $n=k$, следует, что оно справедливо и при следующем значении $n=k+1$.

Тогда данное утверждение справедливо для всех натуральных n.

Этот принцип можно рассматривать как одну из аксиом, описывающих свойства натурального ряда. Интуитивно ясен его смысл: если утверждение верно для $n=1$, то оно верно для $n=1+1=2$; но тогда оно верно и для $n=2+1=3$ и т. д.

Пример. Доказать формулу

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{4}$$

Доказательство. 1) При $n=1$ формула сводится к

$$1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2, \quad \text{или} \quad 1^3=1^2,$$

и, очевидно, верна.

2) Пусть при $n=k$ формула (4) верна:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

Положим $n=k+1$. Находим

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=$$
$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Это и есть формула (4), записанная для $n=k+1$. Теперь формула уже установлена для всех натуральных n.

Рекомендуем читателю самостоятельно доказать формулу для суммы квадратов натуральных чисел:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

По вопросам, затронутым очень кратко во введении, можно рекомендовать для чтения книгу:

Р. Столл. Множества. Логика. Аксиоматические теории, Изд-во «Просвещение», 1968.

Часть первая

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава I

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действительные числа. Координаты

1. Натуральные числа. *Натуральные числа* выражают количество подлежащих счету однотипных или неоднотипных предметов; таковы, например, числа один, два, десять, двадцать, сто, двести пятьдесят шесть, тысяча и т. д.

Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не подлежит определению через другие, более простые понятия.

Натуральные числа могут быть естественным образом расположены по их возрастанию: каждое следующее натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы. Записанные в порядке возрастания:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots,$$

натуральные числа образуют *натуральный ряд*. Многоточие показывает возможность неограниченного продолжения этого ряда. В этом смысле говорят, что имеется *бесконечное множество* натуральных чисел. Единица — наименьшее натуральное число; наибольшего числа натуральный ряд не имеет.

Напомним принцип записи натуральных чисел в десятичной системе счисления при помощи десяти цифр

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Цифры, участвующие в записи числа, при чтении их справа налево указывают последовательно, сколько в данном числе содержится единиц, затем десятков, сотен, тысяч и т. д. Вообще, цифра, стоящая на k-м месте, считая справа, покажет, сколько данное число содержит единиц разряда 10^{k-1}.

Так, например,

$$18=1\cdot 10+8,$$
$$347=3\cdot 10^2+4\cdot 10+7,$$
$$5096=5\cdot 10^3+0\cdot 10^2+9\cdot 10+6$$

и, в общей форме, для m-значного числа a_m:

$$a_m = c_1 \cdot 10^{m-1} + c_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + c_{m-1} \cdot 10 + c_m, \tag{1.1}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — цифры, при помощи которых число a_m записывается в виде $\overline{c_1c_2 \ldots c_m}$ (здесь черта сверху ставится, чтобы не смешивать число a_m с произведением чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$).

Замечание. Десятичная система счисления — не единственно возможная. В древности (в Вавилоне) использовалась система счисления, в которой, наряду с десяткой, в основу было положено число 60 (шестидесятеричная система счисления). Ее влияние сохранилось до сих пор в делении часа на 60 минут, окружности на 360 градусов и т. д. В настоящее время при использовании электронных вычислительных машин, в процессе программирования применяются двоичная и восьмеричная системы счисления. Приведем для примера запись нескольких чисел в троичной системе. В этом случае используем только три цифры 0, 1, 2 в их обычном смысле. Число 3 в троичной системе играет роль десятки в десятичной системе счисления и должно обозначаться как 10. Вместо $3^2 = 9$ будем писать 100 и т. д. Вот запись нескольких чисел в десятичной и троичной системах счисления:

Десятичная система	Троичная система
17	122 $(=3^2+2\cdot 3+2\cdot 1)$
55	2001 $(=2\cdot 3^3+0\cdot 3^2+0\cdot 3+1\cdot 1)$
100	10201 $(=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+2\cdot 3^2+0\cdot 3+1\cdot 1)$

В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно десятичной системой счисления.

В арифметике и алгебре рассматривают различные действия над числами: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возведение в степень*, *извлечение корня* и т. д. Первые четыре из этих действий называют *арифметическими* или *рациональными*. Но только два из них — сложение и умножение — безусловно выполнимы в области натуральных чисел: *сумма и произведение натуральных чисел суть снова натуральные числа.*

Сформулируем законы, которым подчиняются действия сложения и умножения; строгие определения этих действий и обоснование их свойств (выводимых из небольшого числа аксиом) рассматриваются в теоретической арифметике и здесь опускаются.

Переместительный (или *коммутативный*) *закон сложения:*

$$a + b = b + a \tag{1.2}$$

— от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Переместительный (или *коммутативный*) *закон умножения:*

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.3}$$

— от перестановки сомножителей произведение не изменяется. В дальнейшем, по большей части, в записи произведения $a \cdot b$ точку опускаем и пишем просто ab.

Сочетательный (или *ассоциативный*) *закон сложения*:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (1.4)$$

— сумма не зависит от группировки слагаемых.

Этот закон позволяет записывать сумму нескольких слагаемых без скобок. Например:

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c.$$

Сочетательный (или *ассоциативный*) *закон умножения*:

$$(ab)\,c=a\,(bc) \qquad (1.5)$$

— произведение не зависит от группировки сомножителей.

Этот закон позволяет писать произведение нескольких сомножителей без скобок. Например:

$$(ab)\,c=a\,(bc)=abc.$$

Распределительный (или *дистрибутивный*) *закон умножения относительно сложения*:

$$(a+b)\,c=ac+bc. \qquad (1.6)$$

Этот закон лежит в основе правила раскрытия скобок, которым часто пользуются в вычислениях и преобразованиях.

2. Простые и составные числа. Признаки делимости. Если a и b — натуральные числа, причем

$$a=bq,$$

где q — также натуральное число, то говорят, что q — *частное* от деления числа a на число b, и пишут: $q=a/b$. Также говорят, что a делится на b *нацело* или *без остатка*. Всякое число b, на которое a делится без остатка, называется *делителем* числа a. Само число a по отношению к своему делителю называется *кратным*. Таким образом, числа, кратные b, суть числа b, $2b$, $3b$, ...

Числа, кратные числу 2 (т. е. делящиеся на 2 без остатка), называются *четными*. Числа, не делящиеся на 2 нацело, называются *нечетными*. Каждое натуральное число либо четно, либо нечетно.

Если каждое из двух чисел a_1, a_2 является кратным числа b, то и сумма a_1+a_2 — кратное числа b. Это видно из записи

$$a_1=bq_1, \quad a_2=bq_2; \quad a_1+a_2=bq_1+bq_2=b\,(q_1+q_2).$$

Обратно, если a_1 и a_1+a_2 — кратные числа b, то a_2 — также кратное числа b.

Всякое отличное от единицы натуральное число имеет по меньшей мере два делителя: единицу и самоё себя. Если число не имеет никаких других делителей, кроме себя и единицы, оно называется *простым*. Число, имеющее какой-нибудь делитель, отличный от себя и единицы, называют *составным* числом. Еди-

ницу принято не относить ни к простым, ни к составным числам. Вот несколько первых простых чисел, записанных в порядке возрастания:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

Число 2 — единственное четное простое число; все остальные простые числа — нечетные.

То, что простых чисел имеется бесконечное множество, было установлено еще в древности (Евклид, III век до нашей эры).

Идея доказательства Евклида бесконечности множества простых чисел весьма проста. Допустим, что простых чисел — конечное число; перечислим их все, например, расположив в порядке возрастания:

$$2, 3, 5, \ldots, p. \tag{2.1}$$

Составим число, равное их произведению плюс единица:

$$a = 2\cdot 3\cdot 5 \ldots p + 1.$$

Очевидно, что это число не делится ни на одно из чисел (2.1). Следовательно, либо оно само является простым, либо, если оно составное, то имеет простой делитель, отличный от чисел (2.1), что противоречит допущению о том, что в записи (2.1) перечислены все простые числа.

Это доказательство представляет большой интерес, так как дает пример доказательства *теоремы существования* (бесконечного множества простых чисел), не связанного с фактическим отысканием объектов, существование которых доказывается.

Можно доказать, что всякое составное число представимо в виде произведения простых чисел. Так, например,

$$1176 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 7 \quad \text{или} \quad 1176 = 2^3\cdot 3\cdot 7^2.$$

Как видно из этого примера, в разложении данного числа на простые множители некоторые из них могут повторяться несколько раз.

В общем случае в записи разложения числа a на простые множители

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \tag{2.2}$$

подразумевается, что все простые числа p_1, p_2, ..., p_n различны между собой (причем p_1 повторяется множителем k_1 раз, p_2 повторяется множителем k_2 раз и т. д.). При этом условии можно доказать, что разложение единственно с точностью до порядка записи сомножителей.

При разложении числа на простые множители полезно бывает использовать *признаки делимости*, позволяющие выяснить, делится ли данное число на некоторое другое число без остатка, не производя самого деления. Мы выведем признаки делимости на числа 2, 3, 4, 5, 9.

1. Признак делимости на 2. *На 2 делятся те и только те числа, в записи которых последняя цифра выражает четное число* (0, 2, 4, 6 *или* 8).

Доказательство. Представим число $\overline{c_1c_2\ldots c_m}$ в виде

$$\overline{c_1c_2\ldots c_m}=\overline{c_1c_2\ldots 0}+c_m.$$

Первое слагаемое в правой части делится на 10 и потому — четное; сумма будет четной тогда и только тогда, когда c_m — четное число.

2. Признак делимости на 4. *Число* $\overline{c_1c_2\ldots c_m}$ *делится на* 4 *тогда и только тогда, когда двузначное число, выражаемое его последними двумя цифрами, делится на* 4.

Доказательство. Представим число $\overline{c_1c_2\ldots c_m}$ в виде

$$\overline{c_1c_2\ldots c_m}=\overline{c_1c_2\ldots 00}+\overline{c_{m-1}c_m}.$$

Первое слагаемое делится на 100 и тем более на 4. Сумма будет делиться на 4 в том и только в том случае, если $\overline{c_{m-1}c_m}$ делится на 4.

3. Признак делимости на 5. *На* 5 *делятся те и только те числа, запись которых заканчивается цифрой* 0 *или цифрой* 5.

Рекомендуем читателю доказать этот признак самостоятельно.

4. Признаки делимости на 3 и на 9. *Число делится на* 3 (*соответственно на* 9) *в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на* 3 (*соответственно на* 9).

Доказательство. Запишем очевидные равенства

$$10=9+1,$$
$$100=99+1,$$
$$1000=999+1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

в силу которых можно число $\overline{c_1c_2\ldots c_m}$ представить в виде

$$a_m=c_1(99\ \ldots\ 9+1)+\ldots+c_{m-1}(9+1)+c_m$$

или

$$a_m=c_1\cdot 99\ldots 9+\ldots+c_{m-1}\cdot 9+(c_1+c_2+\ldots+c_{m-1}+c_m).$$

Видно, что все слагаемые, кроме, быть может, последней скобки, делятся на 9 (и тем более на 3). Поэтому данное число делится на 3 или на 9 тогда и только тогда, когда делится на 3 или на 9 сумма его цифр $c_1+c_2+\ldots+c_m$.

3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Если каждое из натуральных чисел a, b, ..., f делится нацело на натуральное число k, то говорят, что число k является их *общим делителем*. Так, числа 108 и 144 имеют общие делители 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36. Если два или несколько чисел не имеют общих делителей, отличных от единицы, то эти числа называются *взаимно простыми*. Так, числа 49 и 121 взаимно простые.

Так как данные числа a, b, ..., f могут иметь лишь конечное число общих делителей, то среди их общих делителей имеется наибольший; в случае взаимно простых чисел он равен единице.

Для наибольшего общего делителя (н.о.д.) применяется обозначение

$$(a, b, \ldots, f) = d.$$

Например:

$$(108, 144) = 36; \ (49, 121) = 1; \ (60, 36, 42) = 6.$$

Наибольший общий делитель двух чисел можно находить, пользуясь их разложением на простые множители. Пусть требуется, например, найти н.о.д. чисел 504 и 540. Разложим каждое из них на простые множители:

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7,$$
$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Мы видим, что, кроме единицы, общими делителями данных чисел являются

$$2, \ 2^2, \ 3, \ 3^2, \ 2 \cdot 3, \ 2^2 \cdot 3, \ 2 \cdot 3^2, \ 2^2 \cdot 3^2.$$

Таким образом,

$$(504, 540) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

В общей форме процесс отыскания н.о.д. можно описать на примере двух чисел следующим образом. Запишем разложение данных чисел a и b на попарно различные простые множители:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ \ldots \ p_n^{k_n},$$
$$b = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ \ldots \ q_m^{l_m}.$$

Может случиться, что среди чисел p_1, p_2, ..., p_n нет ни одного, равного кому-либо из чисел q_1, q_2, ..., q_m. Тогда a и b — взаимно простые, $(a, b) = 1$. Если, например, p_1 совпадает с одним из чисел q_1, q_2, ..., q_n, то оба числа a и b делятся на p_1, взятое в степени, меньшей из двух степеней, с которыми это число p_1 входит в разложение каждого из чисел a и b. Поэтому для получения н.о.д. чисел a и b следует: 1) выбрать все одинаковые простые множители, входящие в разложения a и b; 2) каждый из них взять в степени, меньшей из двух степеней, с которыми этот множитель входит в указанные разложения; 3) взять произведение найденных таким путем общих множителей — оно и будет н.о.д. чисел a и b.

Подобным же образом находится и н.о.д. нескольких чисел.

Имеется и иной метод отыскания н.о.д. двух чисел; о нем рассказывается в п. 4.

Если число m является кратным для каждого из чисел a, b, ..., f (т. е. делится на любое из этих чисел нацело), то

m называется *общим кратным* чисел a, b, ..., f. В частности, произведение нескольких натуральных чисел всегда является их общим кратным. Среди всех общих кратных данных чисел a, b, ..., f имеется наименьшее; оно называется *наименьшим общим кратным* (н.о.к.) данных чисел и обозначается так:

$$[a, b, \ldots, f] = m.$$

Н.о.к. двух или нескольких чисел также удобно находить, используя разложение этих чисел на простые множители. Так, для чисел

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7, \qquad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

мы найдем н.о.к., взяв каждый из простых множителей в их разложениях в большей из двух степеней, в которых он входит в эти разложения:

$$[504, 540] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560.$$

Аналогично,

$$[150, 180, 240] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600.$$

Итак, для отыскания н.о.к. нескольких чисел следует: 1) выписать все простые множители, входящие в разложение хотя бы одного из этих чисел; 2) взять каждый из этих простых множителей в наибольшей из степеней, в которых он входит в разложения данных чисел; 3) взять произведение найденных степеней простых сомножителей — оно и будет н.о.к. данных чисел.

Нетрудно заметить, что для двух взаимно простых чисел a и b

$$[a, b] = ab$$

— *н.о.к. двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.* Отметим, без доказательства, более общее соотношение (оно сводится к предыдущему в случае, если $(a, b) = 1$):

$$[a, b]\,(a, b) = ab,$$

имеющее место для любых двух чисел: *произведение наибольшего общего делителя на наименьшее общее кратное двух чисел равно произведению этих чисел.*

4. Целые числа. Рациональные числа. Если сложение и умножение натуральных чисел всегда приводят вновь к натуральному числу, то уже вычитание не всегда выполнимо, если оставаться в области арифметики натуральных чисел. Для возможности образования разности любых двух натуральных чисел возникает необходимость расширить совокупность чисел, вводя *нуль* и *целые отрицательные числа* -1, -2, -3, ..., $-n$, ... Натуральные числа называются также *целыми положительными числами.* Если хотят подчеркнуть, что данное число положительное, то перед ним ставится знак «$+$», но, как правило, пишут не $+4$, а просто 4 и т. д., перед отрицательными же числами знак

«—» ставится обязательно. Число нуль не относят ни к отрицательным, ни к положительным числам. Числа n и $-n$ называют *противоположными*.

Вся совокупность целых чисел

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

состоит из целых положительных (натуральных) чисел, целых отрицательных чисел и нуля.

Теперь уже, во множестве всех целых чисел, действие вычитания (так же как и сложения) всегда выполнимо. При этом, действие вычитания может быть сведено к сложению с числом, противоположным вычитаемому:

$$a-b=a+(-b); \quad a-(-b)=a+b.$$

Мы предполагаем известными правила действий с целыми (положительными и отрицательными) числами.

Для умножения целых чисел вводится известное правило знаков: если a, b положительные, то

$$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-ab; \quad (-a)\cdot(-b)=ab.$$

В частности, $(-1)\cdot a=-a$.

Таким образом, произведение двух чисел одного знака есть положительное число, двух чисел противоположного знака — отрицательное число. Число, противоположное данному, равно произведению данного числа на минус единицу.

Произведение любого числа на нуль равно нулю.

Множество чисел, обладающее тем свойством, что сумма, разность и произведение двух любых чисел этого множества снова ему принадлежат, называется *числовым кольцом*. В числовом кольце неограниченно выполнимы целые рациональные действия, т. е. рациональные действия, кроме, быть может, деления. Натуральные числа не образовали числового кольца, так как действие вычитания не всегда приводило вновь к натуральному числу. Целые числа образуют числовое кольцо, *кольцо целых чисел*.

Множество чисел, в котором выполнимы все рациональные действия, включая и деление (кроме деления на нуль, которое невозможно), называется *числовым полем*. Целые числа не образуют поля, так как в области целых чисел деление не всегда выполнимо.

В связи с этим множество целых чисел вновь расширяют до множества рациональных чисел. *Рациональным числом* называется число, представимое в виде a/b, где числитель a — целое, а знаменатель b — натуральное число. Если a делится на b нацело, то рациональное число — целое; в противном случае рациональное число называется *дробным*. Оно считается положительным, если a — положительное, и отрицательным, если a — отрицательное.

Дробь a/b можно сократить, разделив числитель и знаменатель на н.о.д. чисел a и b. В дальнейшем, как правило, при записи рационального числа в виде a/b дробь a/b считается несократимой, т. е. a и b полагаются взаимно простыми числами.

В области рациональных чисел неограниченно выполнимы все рациональные действия (кроме деления на нуль): сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел также являются рациональными числами. Поэтому рациональные числа образуют числовое поле — *поле рациональных чисел.*

Практически правила действий над рациональными числами хорошо известны из арифметики. Для сложения и умножения справедливы те же основные законы, что и для натуральных чисел (п. 1).

Каждое рациональное число x, если оно само не является целым, заключено между двумя соседними целыми числами: $n < x < n+1$. Так, например, $^7/_2$ лежит между 3 и 4, 13/54 — между 0 и 1, $-^8/_3$ — между -3 и -2.

Введем следующее определение: *целой частью числа* называется наибольшее целое число, не превосходящее данного.

Целая часть числа x обозначается так: $[x]$. Например:

$$[^7/_2]=3,\quad [13/54]=0,\quad [-^8/_3]=-3,\quad [-3]=-3.$$

Разность между данным числом и его целой частью называется *дробной частью числа.* Дробная часть числа x равна $x-[x]$ и иногда обозначается через (x). В наших примерах дробная часть чисел $^7/_2$, 13/54, $-^8/_3$, -3 равна соответственно $^1/_2$, 13/54, $^1/_3$, 0. Дробная часть целого числа равна нулю, так как целое число совпадает со своей целой частью. Для любого числа его дробная часть неотрицательна и строго меньше единицы:

$$0 \leqslant x-[x] < 1.$$

Всякое рациональное число однозначно разлагается на сумму целой и дробной частей, например:

$$\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2},\qquad -\frac{8}{3}=-3+\frac{1}{3}.$$

С разложением рационального числа на целую и дробную части связано понятие *деления* (натуральных чисел) *с остатком.* Число a/b однозначно представляется в виде суммы своей целой части $[a/b]=q$ и дробной части h (не исключено, что целая или дробная часть равна нулю):

$$\frac{a}{b}=q+h,\qquad 0\leqslant h<1.$$

Обозначим $bh=r$ (ясно, что $0\leqslant r<b$). Тогда

$$a=bq+r. \tag{4.1}$$

Здесь q называется *частным*, а r — *остатком* при делении a на b. При этом остаток удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant r < b$. Равенство (4.1) можно использовать для такого более формального определения понятий частного и остатка. Пусть a, b — натуральные числа. Два целых неотрицательных числа q, r называются соответственно частным и остатком от деления a на b, если выполняется равенство (4.1) и неравенство $0 \leqslant r < b$.

На процессе деления с остатком основывается способ отыскания н.о.д. двух чисел; исторически он связан с теорией измерения отрезков у Евклида (см. п. 163) и носит название *алгоритма Евклида*.

Пусть даны два натуральных числа a и $b < a$. Произведем деление a на b; если a разделится на b нацело, то b — н.о.д. чисел a, b. В противном случае получится некоторый остаток $r_1 < b$:

$$a = bq_1 + r_1. \tag{4.2}$$

Теперь будем делить b на r_1; если b разделится на r_1 нацело, то r_1 окажется общим делителем чисел a и b; действительно, в этом случае оба слагаемых правой части равенства (4.2) делятся на r_1 нацело, значит, делится на r_1 нацело и его левая часть a. То, что r_1 явится именно наибольшим общим делителем a и b, также видно из (4.2): если d — какой-нибудь общий делитель чисел a, b, то он будет также делителем числа r_1.

Если b делится на r_1 с остатком, то придем к равенству вида

$$b = r_1 q_2 + r_2, \tag{4.3}$$

где уже $r_2 < r_1$. После этого разделим r_2 на r_1. Снова представляются две возможности: r_2 делится на r_1 нацело, или r_2 делится на r_1 с остатком. Если осуществится первая из этих возможностей, то r_2 будет н.о.д. чисел a и b (это легко доказать, пользуясь равенствами (4.2), (4.3); рекомендуем читателю провести это доказательство). Если же осуществляется вторая возможность, то получим результат деления

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad r_3 < r_2,$$

и вновь будем делить r_2 на r_3. Процесс обязательно закончится на некотором шаге: числа b, r_1, r_2, ... последовательно уменьшаются, и либо одно из них, не равное единице, окажется делителем предыдущего (оно и будет н.о.д. чисел a, b), либо цепочка чисел $b > r_1 > r_2 > \ldots$ закончится единицей. В этом случае н.о.д. чисел a, b равен единице, числа a, b взаимно простые.

Пример. Найти н.о.д. чисел 162 и 42, пользуясь алгоритмом Евклида.

Решение. Делим 162 на 42:

$$162 = 42 \cdot 3 + 36.$$

Остаток $r_1 = 36$; делим $b = 42$ на $r_1 = 36$:

$$42 = 36 \cdot 1 + 6.$$

Второй остаток $r_2 = 6$. Делим $r_1 = 36$ на $r_2 = 6$:

$$36 = 6 \cdot 6.$$

Деление выполняется без остатка; поэтому $r_2 = 6$ — н.о.д. чисел 162 и 42.

5. Десятичные дроби. Представление рациональных чисел десятичными дробями. *Десятичной дробью* называется дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10. Такой, например, является дробь $\frac{7\,823\,436}{10\,000}$. Эту дробь можно записать в следующей форме: выписать в строку цифры числителя и отделить запятой справа столько из них, сколько нулей содержится в знаменателе, а именно:

$$\frac{7\,823\,436}{10\,000} = 782{,}3436.$$

В такой записи цифры, стоящие слева от запятой, образуют целую часть, а цифры, стоящие справа от запятой, — дробную часть данной десятичной дроби.

Пусть p/q — какое-либо положительное рациональное число. Из арифметики хорошо известен процесс деления, позволяющий представлять число p/q в виде десятичной дроби. Сущность процесса деления состоит в том, что сначала находят, какое наибольшее целое число раз q содержится в p; если p — кратное q, то на этом процесс деления и заканчивается. В противном случае, появляется остаток. Далее находят, сколько в этом остатке содержится десятых долей q, и на этом шаге процесс может закончиться, либо появится новый остаток. В последнем случае находят, сколько в нем содержится сотых долей q, и т. д.

Если знаменатель q не имеет никаких других простых делителей, кроме 2 или 5, то через конечное число шагов остаток окажется равным нулю, процесс деления закончится и данная обыкновенная дробь обратится в конечную десятичную дробь. В самом деле, в указанном случае всегда можно подобрать такое целое число, что после умножения на него числителя и знаменателя данной дроби получится равная ей дробь, у которой знаменатель будет представлять натуральную степень десяти. Такой, например, является дробь

$$\frac{59}{40} = \frac{59}{2^3 \cdot 5},$$

которую можно представить так:

$$\frac{59}{40} = \frac{59 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{59 \cdot 25}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{1475}{1000} = 1{,}475.$$

Однако, не производя этих преобразований, разделив числитель на знаменатель, читатель получит тот же результат: $59/40 = 1{,}475$.

Если знаменатель несократимой дроби имеет по меньшей мере один простой делитель, отличный от 2 или 5, то процесс деления p на q не закончится никогда (никакой из очередных остатков в нуль не обратится).

Пример:

$$\frac{965}{132} = \frac{965}{2^2 \cdot 3 \cdot 11}.$$

Выполнив деление, найдем

$$\frac{965}{132} = 7{,}310606\ldots$$

Для записи результата, получаемого в этом примере, периодически повторяющиеся цифры 0 и 6 заключают в круглые скобки и пишут:

$$\frac{965}{132} = 7{,}31\,(06).$$

В этом примере и в других подобных случаях действие деления не приводит к окончательному результату в виде десятичной дроби. Можно, обобщая понятие десятичной дроби, все же говорить, что частное $965/132$ представлено *бесконечной периодической дробью* $7{,}31(06)$. Повторяющиеся цифры 06 называют *периодом* этой дроби, а их число, равное в нашем примере 2, — *длиной периода*.

Чтобы уяснить причину явления периодичности дроби, разберем, например, процесс деления на 7. Если деление нацело не выполняется, то появляется остаток, который может иметь только одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. И на каждом из следующих шагов остаток будет иметь снова одно из этих шести значений. Поэтому не позднее чем на седьмом шаге мы неизбежно встретимся с одним из значений остатка, которые раньше уже появлялись, Начиная с этого места, процесс деления приобретет периодический характер. Периодически будут повторяться и значения остатков, и цифры частного. Такое рассуждение применимо и в случае любого другого делителя.

Таким образом, всякая обыкновенная дробь p/q представляется конечной или бесконечной периодической десятичной дробью. Замечательно, что и, обратно, всякая периодическая десятичная дробь представима в виде обыкновенной дроби. Покажем, как выполняется это действие. При этом используется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (п. 92).

Запись

$$\frac{965}{132} = 7{,}31\,(06)$$

можно понимать так:

$$\frac{965}{132} = 7{,}31 + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^6} + \frac{6}{10^8} + \ldots;$$

здесь члены правой части, начиная со второго, образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $1/10^2=0{,}01$ и первым членом $6/10^4=0{,}0006$. Пользуясь формулой (92.2):

$$S=\frac{a_1}{1-q},$$

найдем

$$7{,}31(06)=\frac{731}{100}+\frac{6/10^4}{1-1/100}=\frac{731}{100}+\frac{6}{100\cdot 99}=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=$$
$$=\frac{24\,125}{100\cdot 33}=\frac{965}{132}.$$

Ясно, что этот же процесс позволит любую заданную бесконечную периодическую дробь представить в виде обыкновенной дроби (и, как можно показать, именно той, из которой в процессе деления в свою очередь получается данная бесконечная периодическая дробь). Впрочем, здесь имеется одно исключение. Рассмотрим дробь

$$0{,}4999\ldots=0{,}4(9)$$

и применим к ней процесс преобразования в обыкновенную дробь:

$$0{,}4(9)=0{,}4+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots;$$

находим

$$0{,}4(9)=0{,}4+\frac{9/100}{1-1/10}=0{,}4+0{,}1=0{,}5$$

— мы пришли к числу $1/2$, которое представляется конечной десятичной дробью $1/2=0{,}5$.

Сходный результат получится всякий раз, когда период данной бесконечной дроби имеет вид (9). Поэтому мы отождествляем такие пары чисел, как, например,

$$0{,}4(9) \quad \text{и} \quad 0{,}5,$$
$$2{,}37(9) \quad \text{и} \quad 2{,}38$$

и т. д.

Иногда полезно еще допускать записи вида

$$0{,}5=0{,}5000\ldots=0{,}5(0),$$

представляя формально конечные десятичные дроби как бесконечные с периодом (0).

Все сказанное об обращении обыкновенной дроби в десятичную периодическую дробь и обратно относилось к положительным рациональным числам. В случае отрицательного числа можно поступить двояким образом.

1) Взять положительное число, противоположное данному отрицательному, обратить его в десятичную дробь, а затем поставить перед ней знак минус. Например, для $-5/3$ получим

$$\frac{5}{3}=1,(6); \qquad -\frac{5}{3}=-1,(6)=-1{,}666\ldots$$

2) Данное отрицательное рациональное число представить в виде суммы его целой части (отрицательной) и его дробной части (неотрицательной), а затем обратить в десятичную дробь только эту дробную часть числа. Например:

$$-\frac{5}{3}=-2+\frac{1}{3}=-2+0,(3),$$
$$-\frac{3}{4}=-1+\frac{1}{4}=-1+0,25.$$

Для записи чисел, представленных в виде суммы своей отрицательной целой части и конечной или бесконечной десятичной дроби, принято такое обозначение (искусственная форма записи отрицательного числа):

$$-2+0,(3)=\bar{2},(3).$$
$$-1+0,25\ =\bar{1},25.$$

Здесь знак минус ставится не перед всей дробью, а над ее целой частью, чтобы подчеркнуть, что только целая часть отрицательна, а следующая за запятой дробная часть положительна.

Такая запись создает единообразие в записи положительных и отрицательных десятичных дробей и будет использована в будущем в теории десятичных логарифмов (п. 28). Предлагаем читателю для практики проверить переход от одной записи к другой в примерах:

$$-\frac{7}{8}=-0,875=\bar{1},125,$$
$$-\frac{965}{132}=-7,31\,(06)=\bar{8},68(93).$$

Теперь уже можно сформулировать окончательный вывод: *всякое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью*, и, обратно, *всякая такая дробь задает рациональное число*. Конечная десятичная дробь допускает также две формы записи в виде бесконечной десятичной дроби: с периодом (0) и с периодом (9).

6. Иррациональные числа. Действительные числа. Не все действия, рассматриваемые в алгебре, выполнимы в поле рациональных чисел. Примером может служить операция извлечения квадратного корня. Так, если равенство $x^2=4$ выполняется при значениях $x=2$, $x=-2$, то равенство $x^2=2$ не имеет места ни при каком рациональном значении x. Докажем это. Сначала заметим, что целое x не может иметь квадрата, равного 2: при $x=1$ имеем $x^2=1$, а при $x>1$ x^2 заведомо больше 2. Предположим теперь, что x дробное: $x=p/q$ (дробь считается несократимой) и $(p/q)^2=2$.

Отсюда имеем $p^2=2q^2$; p должно быть четным числом (иначе квадрат p не был бы четным). Положим $p=2k$, $p^2=4k^2$. Теперь

$4k^2=2q^2$, $q^2=2k^2$; получается, что и q — четное, что противоречит допущению о несократимости дроби p/q.

Это показывает, что в области рациональных чисел из числа 2 нельзя извлечь квадратный корень, символ $\sqrt{2}$ не имеет смысла в области рациональных чисел. Между тем задача: «найти сторону x квадрата, зная, что площадь его равна S» — столь же естественна при $S=2$, как и при $S=4$. Выход из этого и других подобных затруднений состоит в дальнейшем расширении понятия числа, во введении нового вида чисел — *иррациональных чисел*.

Покажем, как вводятся иррациональные числа на примере задачи извлечения квадратного корня из числа 2; для простоты ограничимся положительным значением корня.

Для каждого положительного рационального числа x будет иметь место одно из неравенств $x^2<2$ или $x^2>2$. Очевидно, что $1^2<2$, $2^2>2$. Рассматриваем затем числа 1,0; 1,1; 1,2; ..., 1,9; 2,0 и находим два соседних среди них с тем свойством, что первое имеет квадрат, меньший двух, а второе — больший двух. Именно, $1{,}4^2<2$ и $1{,}5^2>2$. Аналогично, продолжая этот процесс, получим ряд неравенств (для получения десятичных дробей, написанных здесь, можно также использовать известный алгоритм приближенного извлечения квадратного корня, п. 13):

$$
\begin{gathered}
1^2<2<2^2,\\
1{,}4^2<2<1{,}5^2,\\
1{,}41^2<2<1{,}42^2,\\
1{,}414^2<2<1{,}415^2,\\
1{,}4142^2<2<1{,}4143^2,\\
1{,}41421^2<2<1{,}41422^2,\\
1{,}414213^2<2<1{,}414214^2,\\
1{,}4142135^2<2<1{,}4142136^2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
$$

Сопоставляя сначала целые части, а затем первые, вторые, третьи и т. д. цифры после запятой у рациональных чисел, между квадратами которых лежит 2, мы можем последовательно выписать эти десятичные знаки:

$$1{,}4142135\ldots \tag{6.1}$$

Процесс отыскания пар рациональных чисел (выраженных конечными десятичными дробями), отличающихся друг от друга на $\frac{1}{10^m}$, со все большим m может быть продолжен неограниченно. Поэтому можно рассматривать дробь (6.1) как бесконечную десятичную дробь (непериодическую, так как в случае периодичности она представляла бы рациональное число). Эта

бесконечная непериодическая дробь, любое число десятичных знаков которой мы можем выписать, но для которой нельзя осуществить записи одновременно всех знаков, и принимается за число, равное $\sqrt{2}$ (т. е. за число, квадрат которого равен 2).

Отрицательное значение корня квадратного из двух мы представим в виде

$$-\sqrt{2} = -1,4142135\ldots$$

или, пользуясь искусственной формой записи чисел, в виде

$$-\sqrt{2} = \bar{2},5857864\ldots$$

Введем теперь следующее определение: *иррациональным числом* называется всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь

$$\alpha = a,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$

где a — целая часть числа (она может быть положительной, равной нулю или отрицательной), а a_1, a_2, ..., a_n, ... — десятичные знаки (цифры) его дробной части.

Заданное бесконечной непериодической дробью иррациональное число определяет две последовательности конечных десятичных дробей, называемых *десятичными приближениями* α по недостатку и по избытку:

$$a < \alpha < a+1,$$

$$a,a_1 < \alpha < a,a_1 + \frac{1}{10},$$

$$a,a_1a_2 < \alpha < a,a_1a_2 + \frac{1}{100},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Например, для $\alpha = \sqrt{2}$ запишем

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5,$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

и т. д. Здесь, например, 1,41 — десятичное приближение $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01 по недостатку, а 1,42 — по избытку.

Запись неравенств между иррациональным числом и его десятичными приближениями входит в самое определение понятия иррационального числа и может быть положена в основу определения соотношений «больше» и «меньше» для иррациональных чисел.

Возможность представления иррациональных чисел их все более и более точными десятичными приближениями лежит также в основе определения арифметических действий над иррациональными числами, которые фактически производятся

над их иррациональными приближениями по недостатку или по избытку.

К иррациональным числам приводят многие действия, как, например, действие извлечения корня степени n из рационального числа (если оно не представляет собой n-ю степень другого рационального числа), логарифмирование и т. д. Иррациональным является число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру (п. 229).

Все рациональные и иррациональные числа образуют в совокупности множество *действительных* (или *вещественных*) *чисел*. Таким образом, всякая десятичная дробь, конечная или бесконечная (периодическая или непериодическая), всегда определяет действительное число.

Всякое отличное от нуля действительное число либо положительно, либо отрицательно.

Напомним в связи с этим следующее определение. *Абсолютной величиной* или *модулем* действительного числа a называется число $|a|$, определяемое равенствами

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Таким образом, *модуль неотрицательного числа равен самому этому числу* (верхняя строка равенства); *модуль отрицательного числа равен этому числу, взятому с противоположным знаком* (нижняя строка). Так, например,

$$|+8| = +8 = 8, \quad |0| = 0, \quad |-6| = -(-6) = +6 = 6.$$

Из определения модуля следует, что модуль любого числа есть число неотрицательное; если модуль числа равен нулю, то и само число равно нулю, в остальных случаях модуль положителен.

Действительные числа образуют числовое поле — *поле действительных чисел*: результат рациональных действий над действительными числами снова выражается действительным числом. Заметим, что взятые в отдельности иррациональные числа не образуют ни поля, ни даже кольца: например, сумма двух иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$ равна рациональному числу 3.

Наш краткий очерк развития понятия о числе, построенный по схеме

Натуральные (целые положительные) + Нуль и целые отрицательные } → Целые + Дробные } →

→ Рациональные + Иррациональные } → Действительные числа,

мы заключим указанием на наиболее важные свойства совокупности действительных чисел.

1. Действительные числа образуют поле.

2. Действия над действительными числами подчинены обычным законам (например, сложение и умножение — законам коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, п. 1).

3. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место одно и только одно из трех соотношений: a больше b ($a > b$), a меньше b ($a < b$), a равно b ($a = b$). Говорят поэтому, что множество действительных чисел *упорядочено*.

4. Принято, наконец, говорить, что множество действительных чисел обладает свойством *непрерывности*. Смысл, который придается этому выражению, пояснен в п. 8. Именно это свойство существенно отличает поле действительных чисел от поля рациональных чисел.

7. Действия с приближенными числами. Имеется целый ряд причин, в силу которых практически приходится использовать не точные, а приближенные числовые значения различных величин (условно называемые *приближенными числами*). Вот некоторые из этих причин. 1) Числа, полученные в результате измерения (эксперимента), естественно представляют собой приближенные значения измеряемых величин по причине несовершенства инструментов, применяемых для измерения. 2) Числа, значения которых определены точно, все же приходится заменять их приближенными значениями. Это очевидно, когда речь идет об иррациональных числах, например π, $\sqrt{2}$ и т. д. Но и такое, например, число, как 73/254, при проведении вычислений придется использовать в виде десятичной дроби, сохранив лишь некоторое число ее десятичных знаков после запятой. 3) Часто нет необходимости в получении точного результата и есть смысл провести расчет приближенно, чтобы сократить время, затрачиваемое на вычисление.

При выполнении приближенных вычислений приходится руководствоваться некоторыми правилами, позволяющими получить результат с требуемой степенью точности и без чрезмерных усилий на проведение вычислений. Эти правила основаны на некоторых понятиях и определениях, которые мы здесь кратко приведем.

А. *Абсолютная погрешность числа.* Если a_0 — некоторое число (известное точно или нет), а a — число, принимаемое за приближенное значение числа a_0, то *абсолютной погрешностью* приближенного числа a называют любое число Δ_a такое, что

$$|a_0 - a| < \Delta_a. \tag{7.1}$$

Заметим, что абсолютная погрешность здесь не определяется однозначно (то, что мы назвали абсолютной погрешностью, часто

называют *предельной абсолютной погрешностью*). Так, если $a_0 = \pi$, $a = 3,14$, то, учитывая, что $\pi = 3,14159\ldots$, можно записать

$$|a_0 - a| < 0,002, \quad |a_0 - a| < 0,01, \quad |a_0 - a| < 0,0016,$$

и каждое из чисел 0,002, 0,01, 0,0016 будет абсолютной погрешностью.

Ясно, что при производстве вычислений в качестве Δ_a берут по возможности наименьшее из чисел, удовлетворяющих неравенству (7.1).

Величина Δ_a обычно характеризуется не более чем двумя значащими цифрами (чаще всего даже одной), причем принято величину Δ_a округлять в сторону увеличения.

Пример 1. Определить абсолютную погрешность, возникающую при замене иррационального числа $\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$ его приближенным значением 1,73.

Решение. Имеем $a_0 = 1,7320508\ldots$, $a = 1,73$. Заменяя точное число a_0 его приближенным значением a, мы допускаем следующую ошибку: $|\sqrt{3} - 1,73| = 0,0020508\ldots$

Ясно, что в рассматриваемом случае можно положить $\Delta_a = 0,003$ (число Δ_a в соответствии с принятым условием записано с помощью одной цифры и получено путем округления ошибки 0,0020508... в сторону увеличения).

Пример 2. Известно, что для некоторого числа его приближенное значение 647,35 найдено с абсолютной погрешностью, равной 0,17. Что можно сказать о точном значении этого числа?

Решение. Неравенство (7.1) равносильно неравенствам

$$a - \Delta_a < a_0 < a + \Delta_a.$$

В нашем случае эти неравенства запишутся так:

$$647,18 < a_0 < 647,52. \tag{7.2}$$

По исходным данным точное значение a_0 искомого числа найти нельзя — можно только указать границы, между которыми оно находится.

Б. *Относительная погрешность числа.* Абсолютная погрешность числа a, принимаемого за приближенное значение числа a_0, не всегда является удобной характеристикой степени точности a в качестве приближения к a_0. Так, погрешность в один метр будет очень грубой ошибкой при измерении длины помещения, но будет рассматриваться как малая ошибка при измерении расстояния между двумя удаленными точками земной поверхности. Дело в том, что обычно важна не сама величина погрешности, а ее отношение к измеряемой (или вычисляемой) величине, часто выражаемое в процентах. В связи с этим дадим определение: *относительной погрешностью* называется отношение абсолютной погрешности к модулю числа a_0; относительная

погрешность обозначается через δ_a:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a_0|}. \tag{7.3}$$

На практике точное значение a_0 обычно неизвестно, и, учитывая, что, как правило, абсолютная погрешность бывает мала, находят δ_a по формуле

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \tag{7.4}$$

(заменяя в знаменателе a_0 его приближенным значением a).

Пример 3. За приближенное значение числа π иногда принимают 22/7. Какова относительная погрешность этого значения?

Решение. Находим $|\pi - 22/7| = |3,14159 - 3,14285| < 0,0015$; приняв за Δ число 0,0015, найдем $\delta = 0,0015/3,14$ и, снова округляя δ в сторону увеличения, $\delta = 0,0005$, или $\delta = 0,05\%$. Число 22/7 дает приближенное значение π с точностью до 0,05%.

В. *Значащие цифры числа. Верные и сомнительные цифры.* Напомним определение значащей цифры: *значащей цифрой* приближенного числа называется всякая его цифра, начиная с первой ненулевой цифры (считая слева направо). Например, в числе 0,00030900 первые четыре нуля не являются значащими цифрами (они служат только для указания десятичных разрядов других цифр). Остальные три нуля являются значащими цифрами.

При записи приближенных чисел важно договориться о том, какие цифры (знаки) в этой записи следует считать верными, а какие — сомнительными. В связи с этим примем следующее определение: пусть a есть приближенное число с абсолютной погрешностью Δ_a; тогда любая из значащих цифр числа a называется «верной», если Δ_a не превосходит пяти единиц разряда, следующего за этой цифрой; остальные значащие цифры числа a называются «сомнительными». Так, например, пусть для приближенного числа $a = 647,35$ будет $\Delta_a = 0,17$ (см. пример 2). Замечаем, что здесь $0,17 \leqslant 0,5$, и поэтому цифры 6, 4 и 7 являются верными, а цифры 3 и 5 — сомнительными. Этот ответ приобретет большую наглядность, если его сопоставить с неравенствами (7.2).

При расчетах, в которых участвуют приближенные числа, принято сохранять в промежуточных выкладках одну (или две) сомнительную цифру. В конечном результате сомнительные цифры могут быть округлены.

Г. *Округление чисел.* При замене числа, выражаемого десятичной дробью, дробью с меньшим числом десятичных знаков допускается погрешность, называемая *погрешностью округления*. Приняты следующие правила округления: если первый из отбрасываемых знаков дроби меньше пяти, то остальные знаки просто

отбрасывают, а стоящие перед ними сохраняют. Если первый из отбрасываемых знаков больше пяти, то предшествующий знак увеличивают на единицу. Если первый из отбрасываемых знаков равен пяти, то пригодно любое из указанных правил, но обычно округление производят так, чтобы последний сохраненный знак стал четным. Примеры округления десятичных дробей:

$$3{,}14159\ldots \approx 3{,}142; \qquad \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots \approx 1{,}41; \qquad 0{,}693\ldots \approx 0{,}7.$$

Такие же правила округления применяются и к целым числам. Если, например, число жителей города равно в данный момент 23 542, то спустя месяц уже бессмысленно указывать единицы и даже десятки в этом числе. Можно написать число жителей округленно как 23 500, но принято записывать $235 \cdot 10^2$, чтобы подчеркнуть, что число единиц и десятков неизвестно (а не именно равно нулю, как может показаться при первой записи).

При округлении приближенного числа вносится дополнительная погрешность (погрешность округления), которая складывается с его абсолютной погрешностью. Для того чтобы уменьшить накопление погрешностей округления, в промежуточных результатах обычно сохраняют одну-две сомнительные цифры.

Пример 4. Округлить приближенное число $a = 967{,}358$, взятое с абсолютной погрешностью $\Delta_a = 0{,}137$, сохранив в результате одну сомнительную цифру.

Решение. В числе a верными являются цифры 9, 6 и 7, а следующая цифра 3 уже сомнительна. Округляем число a по правилу дополнения и получаем новое приближенное число $a' = 967{,}4$. Чтобы определить его абсолютную погрешность, мы находим, что погрешность округления составляет $967{,}4 - 967{,}358 = 0{,}042$, складываем эту последнюю с абсолютной погрешностью $\Delta_a = 0{,}137$ числа a и получаем 0,179. В полученном числе, округляя его в бо́льшую сторону, сохраняем одну значащую цифру и находим для новой абсолютной погрешности $\Delta_{a'}$, т. е. для абсолютной погрешности числа a', следующий результат: $\Delta_{a'} = 0{,}2$. Итак, вернувшись к обычным обозначениям, заключаем, что приближенное число $a = 967{,}4$, полученное при округлении числа 967,358, найдено с абсолютной погрешностью 0,2, причем оно содержит одну (последнюю) сомнительную цифру 4.

Пример 5. Округлить приближенное число $a = 967{,}358$, взятое с абсолютной погрешностью $\Delta_a = 0{,}137$, сохранив только верные цифры (сравнить с примером 3).

Решение. Число a округляем до числа 967. После сложения погрешности округления 0,358 с данной абсолютной погрешностью 0,137 находим число 0,495. Замечаем, что $0{,}495 < 0{,}5$, а это и означает, что в приближенном числе 967 все цифры верные. Поэтому здесь и в подобных случаях абсолютную погрешность можно явно вообще не указывать.

Д. *Погрешность результата арифметических действий.* Пусть даны два числа a, b, рассматриваемые как приближенные значения чисел a_0, b_0 с абсолютными погрешностями Δ_a, Δ_b соответственно. В этом случае выполняются неравенства

$$a_0 - \Delta_a < a < a_0 + \Delta_a,$$
$$b_0 - \Delta_b < b < b_0 + \Delta_b.$$

Складывая эти неравенства почленно, получим

$$(a_0 + b_0) - (\Delta_a + \Delta_b) < a + b < (a_0 + b_0) + (\Delta_a + \Delta_b).$$

Отсюда видно, что $\Delta_a + \Delta_b$ является абсолютной погрешностью для суммы чисел a и b: *абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей.* Это правило верно для алгебраической суммы любого числа слагаемых.

Для умножения и деления принято следующее правило: *относительная погрешность произведения (частного) равна сумме относительных погрешностей сомножителей (делимого и делителя).* Это правило мы оставим без обоснования.

Пример 6. Стороны треугольника измерены с точностью до 1 *мм* и оказались равны 17,8 *см*, 23,6 *см*, 14,2 *см*. Найти периметр (т. е. сумму сторон) треугольника.

Решение. Находим $17{,}8 + 23{,}6 + 14{,}2 = 55{,}6$ *см*. Так как абсолютная погрешность каждого слагаемого была равна 0,1 *см*, то погрешность результата может составить 0,3 *см*. Поэтому периметр P удовлетворяет неравенствам $55{,}3 < P < 55{,}9$. Ответ в таких случаях часто записывают в виде $P = 55{,}6 \pm 0{,}3$, указывая тем самым возможные границы ошибки.

Пример 7. Ребра прямоугольного параллелепипеда известны с абсолютной погрешностью в 1 *см*: $a = 43$ *см*, $b = 16$ *см*, $c = 25$ *см*. С какой относительной и абсолютной погрешностью может быть найден объем параллелепипеда?

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле (п. 168)

$$V = abc.$$

Относительные погрешности ребер составляют соответственно (с округлением) 2,5%; 7%; 4%. При умножении относительные погрешности суммируются: $\delta_V = 2{,}5 + 7 + 4 = 13{,}5\%$. Объем может быть найден с относительной погрешностью 13%. Читателю предоставляется найти абсолютную погрешность объема.

Приведенные здесь правила позволяют, в принципе, контролировать точность производимых вычислений и предсказать относительную и абсолютную погрешности их результата; при значительном объеме производимых вычислений такой контроль точности становится практически слишком трудоемким и дает, как правило, завышенные значения погрешностей.

8. Числовая ось. Координаты точки на плоскости. *Осью* называется прямая, на которой одно из двух возможных направлений выделено как *положительное* (противоположное направление считается *отрицательным*). Положительное направление обозначается обычно стрелкой. *Числовой* (или *координатной*) *осью* называется ось, на которой выбрана начальная точка (или начало) O и *единица масштаба* или *масштабный отрезок* OE (рис. 1). Таким

$A(-10/3)$ $B(-2)$ $O(0)$ $E(1)$ $C(3/2)$ $D(4)$ x

Рис. 1.

образом, числовая ось задается указанием на прямой направления, начала и масштаба.

С помощью точек числовой оси изображают действительные числа. Целые числа изображаются точками, которые получаются откладыванием масштабного отрезка нужное число раз вправо от начала O в случае положительного целого числа и влево в случае отрицательного. Нуль изображается начальной точкой O (сама буква O напоминает о нуле; она является первой буквой слова *origo*, означающего «начало»). Дробные (рациональные) числа также просто изображаются точками оси; например, чтобы построить точку, соответствующую числу $-{}^{10}/_3 = -3{}^1/_3$, следует отложить влево от O три масштабных отрезка и еще одну третью часть масштабного отрезка (точка A на рис. 1). Кроме точки A на рис. 1 показаны еще точки B, C, D, изображающие соответственно числа -2; ${}^3/_2$; 4.

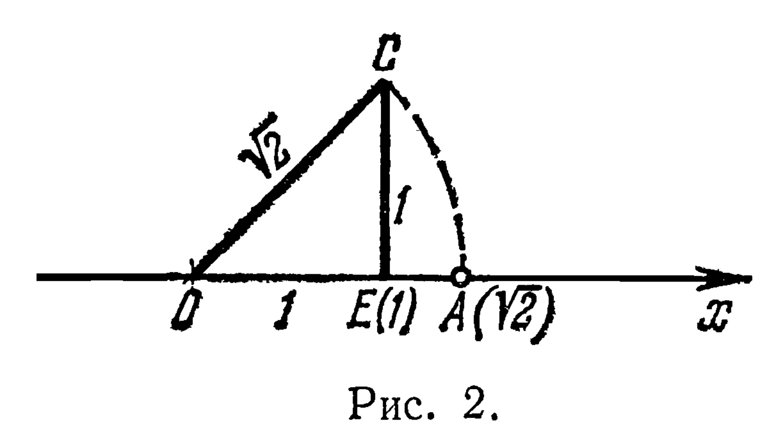


Рис. 2.

Целых чисел имеется бесконечное множество, но на числовой оси целые числа изображаются точками, расположенными «редко», целочисленные точки оси отстоят от соседних на единицу масштаба. Рациональные точки расположены на оси весьма «густо» — нетрудно показать, что на любом сколь угодно малом участке оси имеется бесконечно много точек, изображающих рациональные числа. Тем не менее на числовой оси имеются точки, которые не являются изображениями рациональных чисел. Так, если на числовой оси построить отрезок OA, равный гипотенузе OC прямоугольного треугольника OEC с катетами $OE = EC = 1$ (рис. 2), то длина этого отрезка (по теореме Пифагора, п. 216) окажется равной $\sqrt{2}$ и точка A не будет изображением рационального числа.

Исторически именно факт существования отрезков, длины которых не могут быть выражены числом (рациональным числом!),

привел к введению иррациональных чисел. В связи с этим рекомендуем прочитать п. 163.

Введение иррациональных чисел, которые в совокупности с рациональными образуют множество всех действительных чисел, приводит к тому, что каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число, изображением которого она служит. Напротив, каждое действительное число изображается вполне определенной точкой числовой оси. *Между действительными числами и точками числовой оси устанавливается взаимно однозначное соответствие.*

Поскольку мы числовую ось мыслим как *непрерывную линию*, а точки ее находятся во взаимно однозначном соответствии с действительными числами, то мы говорим о *свойстве непрерывности* множества действительных чисел (п. 6).

Заметим еще, что в некотором смысле (мы его не уточняем) иррациональных чисел несравненно больше, чем рациональных.

Число, изображением которого служит данная точка A числовой оси, называется *координатой* этой точки; тот факт, что a — координата точки A, записывают так: $A(a)$. Координата любой точки A выражается как отношение OA/OE отрезка OA к масштабному отрезку OE, которому для точек, лежащих от начала O в отрицательном направлении, приписывают знак минус.

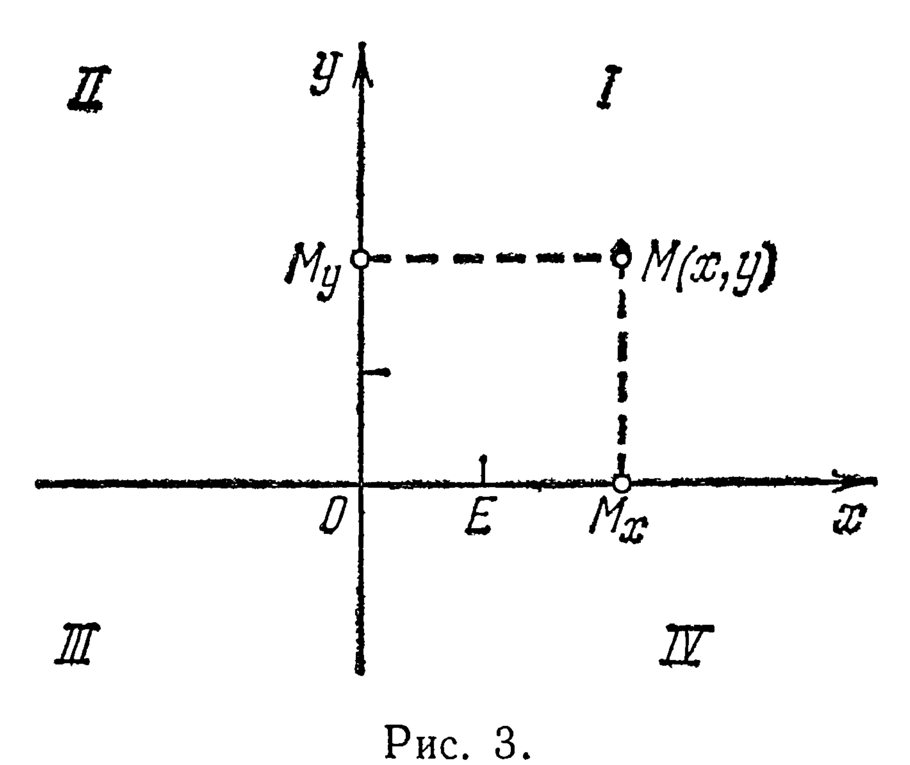


Рис. 3.

Введем теперь *прямоугольные декартовы координаты* на плоскости. Возьмем две взаимно перпендикулярные числовые оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и равные масштабные отрезки (на практике часто применяют и координатные оси с различными масштабными единицами). Скажем, что эти оси (рис. 3) образуют декартову прямоугольную систему координат на плоскости. Точка O называется *началом координат*, оси Ox и Oy — *осями координат* (ось Ox называют *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*). На рис. 3, как обычно, ось абсцисс расположена горизонтально, ось ординат — вертикально. Плоскость, на которой задана система координат, называют *координатной плоскостью*.

Каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел — координат этой точки относительно данной координатной системы. Именно, возьмем прямоугольные проекции точки M на оси Ox и Oy; соответствующие точки на осях Ox, Oy обозначены

на рис. 3 через M_x, M_y. Точка M_x имеет, как точка числовой оси Ox, координату (*абсциссу*) x, точка M_y, как точка числовой оси Oy, — координату (*ординату*) y. Эти два числа x, y (записанные в указанном порядке) и называются *координатами точки* M.

При этом пишут: $M(x, y)$.

Итак, каждой точке плоскости ставится в соответствие *упорядоченная пара* действительных чисел (x, y) — декартовы прямоугольные координаты этой точки. Термин «упорядоченная пара» указывает на то, что следует различать первое число пары — абсциссу и второе — ординату. Напротив, каждая пара чисел (x, y) определяет единственную точку M, для которой x служит абсциссой, а y — ординатой. *Задание в плоскости прямоугольной декартовой системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел.*

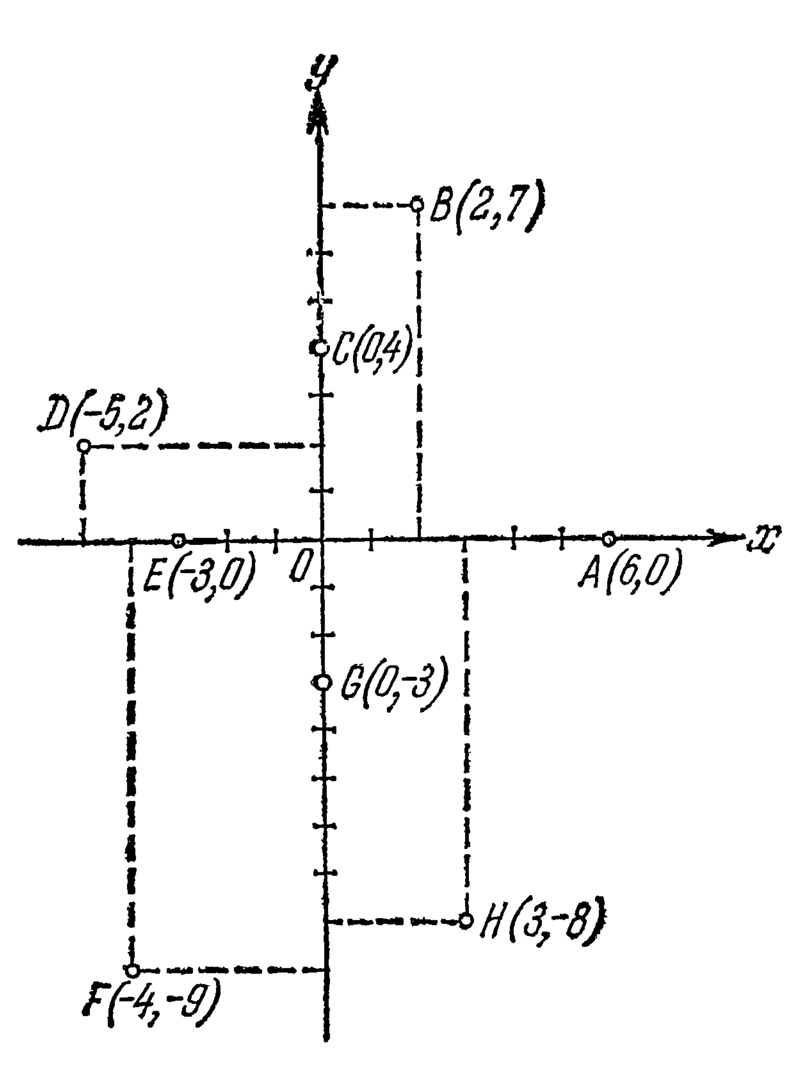


Рис. 4.

Координатные оси делят координатную плоскость на четыре части, четыре *квадранта*. Квадранты нумеруются, как показано на рис. 3, римскими цифрами.

Знаки координат точки зависят от того, в каком квадранте она лежит, как указано в следующей таблице:

	x	y
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Точки, лежащие на оси Ox, имеют ординату y, равную нулю, точки на оси Oy — абсциссу x, равную нулю. Обе координаты начала O равны нулю: $O(0, 0)$.

Пример 1. Построить на плоскости точки

$$A(6, 0),\quad B(2, 7),\quad C(0, 4),\quad D(-5, 2),\quad E(-3, 0),$$
$$F(-4, -9),\quad G(0, -3),\quad H(3, -8).$$

Решение дается на рис. 4.

Если известны координаты некоторой точки $M(x, y)$, то легко указать координаты точек, симметричных с ней относи-

тельно осей Ox, Oy и начала координат: точка, симметричная с M относительно оси Ox, будет иметь координаты $(x, -y)$; точка, симметричная с M относительно Oy,— координаты $(-x, y)$; наконец, у точки, симметричной с M относительно начала, координаты будут $(-x, -y)$.

Можно также указать связь между координатами пары точек, симметричных относительно биссектрисы I—III координатных углов (рис. 5); если одна из этих точек M имеет координаты x и y, то у второй абсцисса равна ординате первой

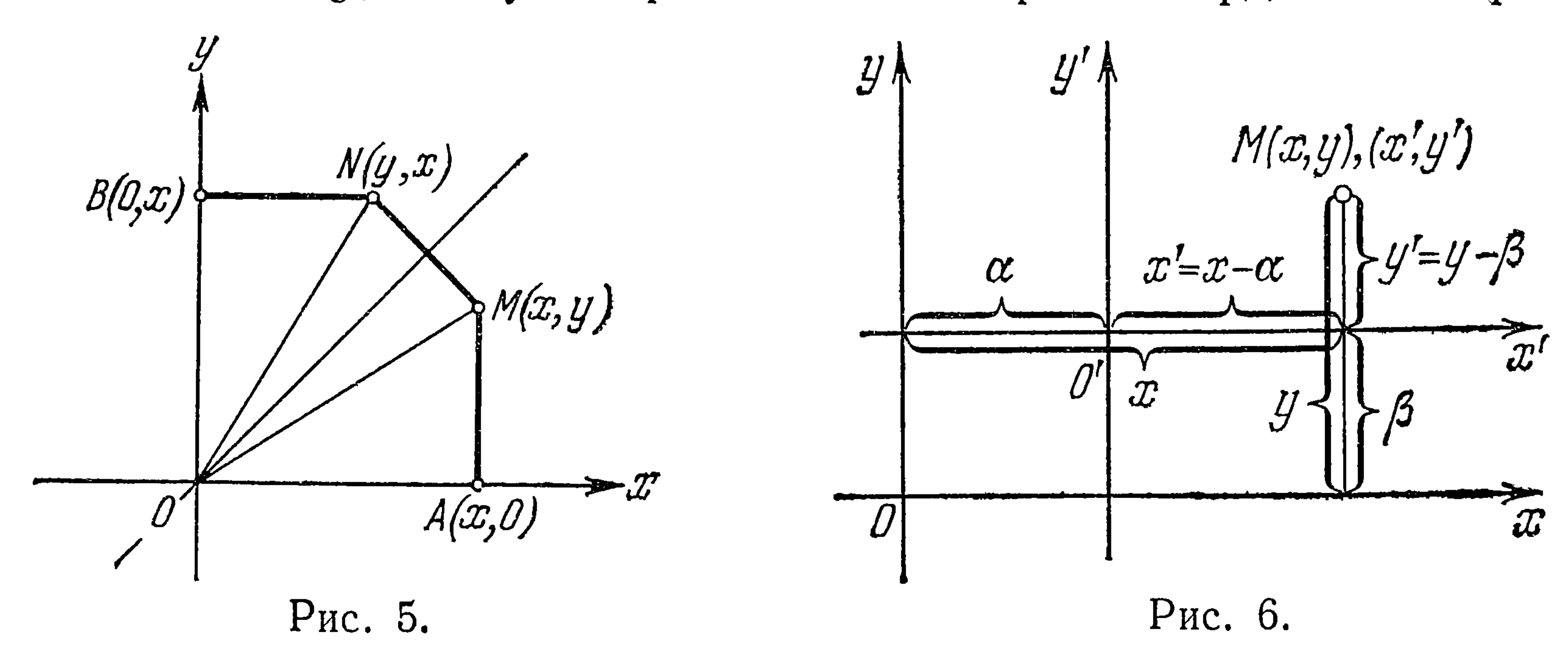


Рис. 5. Рис. 6.

точки, а ордината — абсциссе первой точки. Иначе говоря, координаты точки N, симметричной с M относительно биссектрисы I—III координатных углов, будут (y, x). Для доказательства этого положения рассмотрим прямоугольные треугольники OAM и OBN. Они расположены симметрично относительно биссектрисы координатного угла и потому равны. Сравнивая их соответственные катеты, убедимся в правильности нашего утверждения.

Систему декартовых прямоугольных координат можно преобразовать с помощью переноса ее начала O в новую точку O' без изменения направления осей и величины масштабного отрезка. На рис. 6 показаны одновременно две системы координат: «старая» с началом O и «новая» с началом O'. Произвольная точка M имеет теперь две пары координат, одну относительно старой координатной системы, другую относительно новой. Если координаты нового начала в старой системе обозначены через (α, β), то связь между старыми координатами (x, y) точки M и ее новыми координатами (x', y') выразится формулами

$$\begin{cases} x' = x - \alpha, \\ y' = y - \beta \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x' + \alpha, \\ y = y' + \beta. \end{cases} \tag{8.1}$$

Эти формулы называют *формулами переноса системы координат*; при их выводе по рис. 6 выбрано самое удобное положение точки M, лежащей в первом квадранте как старой, так и новой

системы. Можно убедиться, что формулы (8.1) остаются верны при любом расположении точки M.

Положение точки M на плоскости может быть задано не только ее декартовыми прямоугольными координатами x, y, но и другими способами. Соединим, например, точку M с началом O (рис. 7) и рассмотрим следующие два числа: длину отрезка $OM = r$ и угол φ наклона этого отрезка к положительному направлению оси Ox (этот угол определяется как угол, на который надо повернуть ось Ox до ее совмещения с OM, и считается положительным, если поворот совершается против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае, как это принято в тригонометрии (п. 96)). Отрезок $r = OM$ называется *полярным радиусом* точки M, угол φ — ее *полярным углом*, пара чисел (r, φ) — *полярными координатами* точки M. Как видно, для определения полярных координат точки требуется задание только одной координатной оси Ox (называемой в этом случае *полярной осью*). Удобно, однако, рассматривать одновременно и полярные и декартовы прямоугольные координаты, как это сделано на рис. 7.

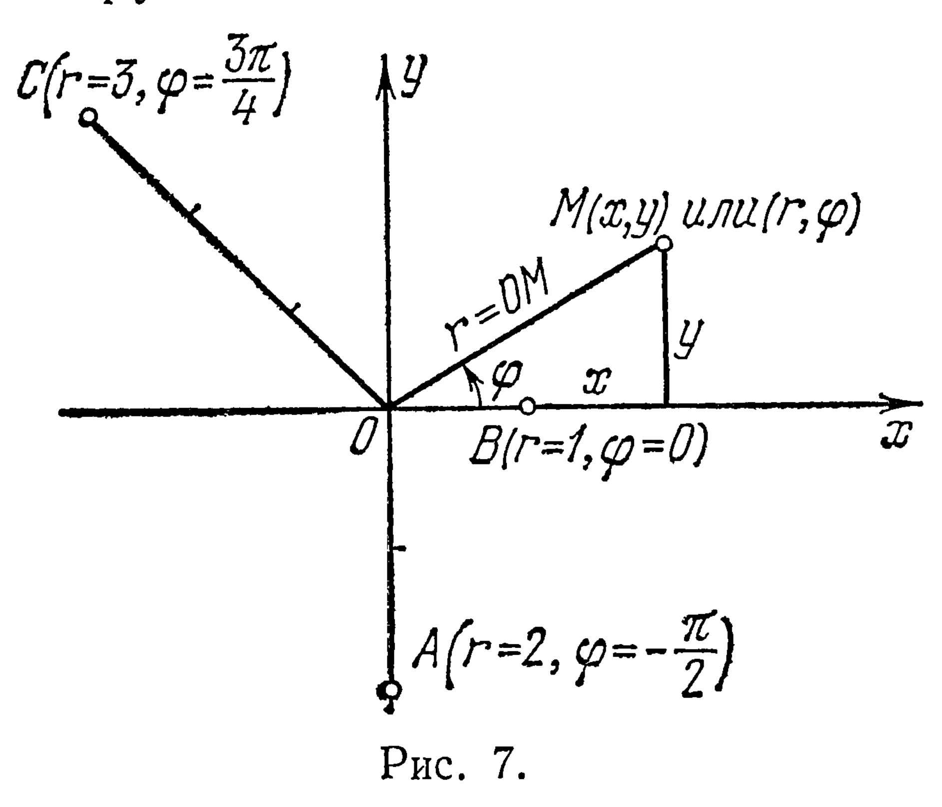


Рис. 7.

Полярный угол точки определяется заданием точки неоднозначно: если φ_0 — один из полярных углов точки, то и всякий угол

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{8.2}$$

будет ее полярным углом. Задание полярного радиуса и угла определяет положение точки единственным образом. Начало O (называемое *полюсом* полярной системы координат) имеет радиус, равный нулю, никакого определенного полярного угла точке O не приписывается.

Между декартовыми и полярными координатами точки имеются следующие соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \tag{8.3}$$

непосредственно вытекающие из определения тригонометрических функций (п. 97). Эти соотношения позволяют находить декартовы координаты по заданным полярным. Следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

позволяют решать обратную задачу: по данным декартовым координатам точки находить ее полярные координаты. При этом по значению $\sin\varphi$ (или $\cos\varphi$) можно найти два возможных значения угла φ в пределах первого круга; по знаку $\cos\varphi$ (или $\sin\varphi$) выбирается одно из них. Можно также определять угол φ по его тангенсу: $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, но и в этом случае четверть, в которой лежит φ, уточняется по знаку $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$.

Точка, заданная своими полярными координатами, строится (без вычисления декартовых координат) по своему полярному углу и радиусу.

Пример 2. Найти декартовы координаты точек $A(2,\ \pi/4)$; $B(1,\ \pi)$.

Решение. По формулам (8.3) находим:

1) для точки A находим $x = 2\cos(\pi/4) = 2\cdot\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$; $y = 2\sin(\pi/4) = \sqrt{2}$; $A(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$;

2) для точки B: $x = 1\cdot\cos\pi = -1$; $y = 1\cdot\sin\pi = 0$; $B(-1,\ 0)$.

Пример 3. Найти полярные координаты точек (заданных декартовыми координатами) $A(1,\ \sqrt{3})$; $B(-1,\ -1)$.

Решение. Находим по формулам (8.4):

1) для точки A: $r = \sqrt{1+3} = 2$; $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$; $\varphi = \pi/3$; $A(2,\ \pi/3)$;

2) для точки B: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = 1$; $\varphi = 5\pi/4$ (с учетом знаков x и y); $B(\sqrt{2},\ 5\pi/4)$.

Пример 4. Построить точки по их полярным координатам:

$$A(2,\ -\pi/2);\quad B(1,\ 0);\quad C(3,\ 3\pi/4).$$

Решение показано на рис. 7.

Упражнения

1. Найти н.о.д. чисел: а) 48 и 54; б) 245, 105 и 441.
2. Найти н.о.к. чисел: а) 90 и 120; б) 363, 440 и 198.
3. Доказать, что н.о.к. нескольких чисел делится на их н.о.д.
4. Показать, что если $(a,\ b) = k$, то $(a/k,\ b/k) = 1$.
5. Чему равны целые и дробные части чисел:

а) 17/3; б) —22/5; в) 0,376; г) —2,158?

Записать числа —22/5 и —2,158 в искусственной форме.

6. Обратить в десятичные дроби следующие обыкновенные дроби:

а) 473/32; б) 2/9; в) 163/111.

7. Обратить в обыкновенные дроби следующие десятичные дроби: а) 1,(468); б) 3,41(6).
8. Найти абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при замене числа $\sqrt{78} = 8{,}8317608\ldots$ его приближенным значением 8,84.
9. Что можно сказать о точном значении a_0 некоторого числа, если его приближенное значение $a = 658{,}46$ найдено с абсолютной погрешностью $\Delta_a = 0{,}18$?
10. Указать верные и сомнительные цифры приближенного числа $a = 6{,}9358$, если $\Delta_a = 0{,}0045$.

11. Округлить приближенное число $a=32{,}234$ при $\Delta_a=0{,}463$, сохранив одну сомнительную цифру.

12. Записать, применяя нули, следующие приближенные числа: а) 0,58, $\Delta_a=0{,}000005$; б) $a=781\,000$, $\Delta_a=5$; в) $a=781\,000$, $\Delta_a=500$.

13. Построить на числовой оси точки $A(8)$, $B(-3)$, $C(^5/_2)$, $D(-^7/_3)$, $E(\sqrt{3})$, $F(-\sqrt{5})$.

Указание. Отрезок длиной $\sqrt{3}$ можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 1 и $\sqrt{2}$ (построение отрезка длиной $\sqrt{2}$ рассматривалось в тексте).

14. Построить на плоскости точки $A(-3,\ -4)$, $B(0,\ 5)$, $C(5,\ 0)$, $D(-2,\ 6)$, $E(3,\ 3)$, $F(-4,\ 3)$, $G(-6,\ 6)$, $H(6,\ -6)$.

15. Дана точка $A(2,\ -3)$. Указать координаты точек, симметричных с A относительно оси Ox, оси Oy, начала координат, биссектриссы I—III координатных углов.

16. Показать, что точки $A(x,\ y)$ и $B(-y,\ -x)$ симметричны относительно биссектрисы II—IV координатных углов.

17. Построить точки по их полярным координатам: $A(2,\ 5\pi/6)$, $B(1,\ -\pi)$, $C(3,\ 0)$, $D(\sqrt{2},\ -\pi/4)$. Найти декартовы координаты этих точек.

18. Найти полярные координаты точек (заданных декартовыми координатами) $A(2,\ 0)$, $B(-1,\ 0)$, $C(0,\ 2)$, $D(-1,\ -1)$.

§ 2. Степени и корни

9. Степени с натуральными показателями. Пусть a — произвольное действительное число, а n — натуральное число. Произведение

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n}$$

n сомножителей, равных a, называется *n-й степенью числа a* и обозначается через a^n. При этом a называется *основанием*, а n — *показателем* степени. При $n=1$ просто полагают $a^1=a$. Таким образом, степень a^n определяется при любых натуральных значениях n. Поскольку действие возведения в натуральную степень определено через действие умножения, то оно рассматривается как рациональное (арифметическое) действие. Отметим некоторые свойства этого действия.

1) При любых натуральных n, m

$$a^n a^m = a^{n+m}. \tag{9.1}$$

Это следует из записи

$$a^n a^m = \underbrace{aa\ldots a}_{n}\cdot\underbrace{aa\ldots a}_{m} = \underbrace{aa\ldots a}_{n+m} = a^{n+m}.$$

Таким образом, *при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются.*

2) Если $n>m$ и $a\neq 0$, то

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}. \tag{9.2}$$

Действительно, это следует из равенства

$$a^n = a^{m+(n-m)} = a^m a^{n-m}.$$

3) При любых натуральных m, n

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad (9.3)$$

Действительно, по определению n-й степени числа имеем

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n}$$

и по свойству 1)

$$(a^m)^n = a^{m+m+\ldots+m} = a^{mn},$$

что и требовалось получить.

Итак, *при возведении степени в степень показатели степени перемножаются.*

4) $$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (9.4)$$

5) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (9.5)$$

Доказательство свойств 4) и 5) предоставляется читателю.

10. Степени с целыми показателями. Свойство 2) п. 9:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

установлено при $n > m$. При $n = m$ или $n < m$ его правая часть не определена, но левая часть сохраняет смысл. Это дает повод ввести определение степени с нулевым и целыми отрицательными показателями степени.

Нулевую степень числа $a \neq 0$ полагают по определению равной единице:

$$a^0 = 1. \qquad (10.1)$$

Таким образом, равенство (9.2) становится теперь верным и при $n = m$.

Степень числа $a \neq 0$ с отрицательным показателем $-k$ определяется равенством

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}. \qquad (10.2)$$

Нулевая и отрицательная степени числа 0 не определяются.

Определение (10.2) делает равенство (9.2) верным и при $n < m$. Так, если $m = n + k$, то имеем

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+k}} = \frac{a^n}{a^n a^k} = \frac{1}{a^k} = a^{-k} = a^{n-m}.$$

Нетрудно проверить, что все правила действия возведения в натуральную степень, указанные в п. 9, сохраняют силу при введенных определениях и при любых целых показателях степени.

Так, например, проверяем, что

$$a^{-m}a^{-n}=\frac{1}{a^m}\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n},$$

т. е. и для отрицательных показателей степени сохраняет силу правило 1) умножения степеней с одинаковыми основаниями.

Пример. Вычислить: $\frac{2^{-3}\cdot 3^5\cdot 6^4}{2\cdot 3^9\cdot 6^{-2}}$.

Решение. Используем то, что $6=2\cdot 3$, и применяем правила действий с целыми степенями:

$$\frac{2^{-3}\cdot 3^5\cdot 6^4}{2\cdot 3^9\cdot 6^{-2}}=\frac{2^{-3}\cdot 3^5\cdot 2^4\cdot 3^4}{2\cdot 3^9\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-2}}=\frac{2\cdot 3^9}{2^{-1}\cdot 3^7}=2^2\cdot 3^2=36.$$

11. Корни. Если $n>1$ — натуральное число, а a и b — действительные числа, причем

$$b^n=a,$$

то число b называется *корнем* n*-й степени из числа* a. Таким образом, *корнем* n*-й степени из числа* a называется каждое число b такое, что его n-я степень равна a.

Действие отыскания корня из числа a называется действием *извлечения корня* n*-й* степени из a. Действие извлечения корня степени n является действием, обратным по отношению к действию возведения числа в степень n.

Если n — нечетное число, то, как можно доказать, для любого действительного числа a существует единственное значение корня степени n (в действительной области; извлечение корней в области комплексных чисел рассматривается в п. 18).

Если n — четное, то действие извлечения корня степени n из отрицательного числа невозможно, так как четная степень любого числа неотрицательна. Можно показать, что для любого положительного числа a корень четной степени n имеет два значения, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку. Например, числа $+3$, -3 суть корни квадратные из числа 9. Положительный корень четной степени из положительного числа называется *арифметическим корнем* (или *арифметическим значением корня*). Его единственность видна из такого соображения. Если бы имелось два положительных корня b_1 и b_2, то одно из чисел b_1, b_2 было бы больше другого, например, $b_1>b_2$. Но тогда и $b_1^n>b_2^n$, т. е. оба числа не могли бы быть корнями степени n из одного и того же числа a. Это рассуждение применимо и к случаю корней нечетной степени.

Наметим обоснование утверждения о существовании корня $\sqrt[n]{a}$ произвольной степени из любого положительного действительного числа. Прежде всего, может случиться, что корень существует в области натуральных чисел. Если это так, то этим задача решается; если в области натуральных чисел корня не имеется, то найдутся два последовательных целых числа k и $k+1$

такие, что $k^n < a$, $(k+1)^n > a$. Теперь будем рассматривать десятичные дроби вида k,a_1, где $a_1 = 0, 1, \ldots, 9$. Либо среди них имеется искомый корень, либо снова получим для некоторого a_1

$$(k,a_1)^n < a, \qquad (k,a_1+0,1)^n > a.$$

Далее будем искать приближение корня в виде дроби с двумя знаками после запятой и т. д. Таким путем в принципе можно построить ряд десятичных приближений по недостатку и по избытку для некоторого действительного числа, которое и следует принять за значение искомого корня (аналогично примеру $\sqrt{2}$ в п. 6).

Корень степени n обозначается с помощью *знака радикала* $\sqrt[n]{\ }$; при этом для придания символу $\sqrt[n]{a}$ вполне определенного смысла условимся понимать под $\sqrt[n]{a}$:

1) единственное значение корня в случае нечетного n (a в этом случае — любое действительное число).

2) арифметический корень степени n из a в случае четного n (в этом случае $a > 0$).

Корень из нуля при любом показателе n равен нулю.

В случае, если мы хотим рассматривать оба значения корня четной степени из положительного числа, то пишем $\pm\sqrt[n]{a}$; если перед корнем четной степени знак не написан, то всегда имеют в виду арифметическое значение корня.

В случае корня степени 2 (*квадратного корня*) пишут просто $\sqrt{a}$; например, $\sqrt{9} = 3$. Корень третьей степени называют *кубическим корнем*.

Если a — произвольное действительное число, то

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

при нечетном n и

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

при четном n (в частности, в случае квадратного корня). Так, например,

$$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3, \quad \text{но} \quad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

Укажем основные правила действий над корнями; для простоты предположим, что числа под знаком корня — положительные.

1) Извлечение корня из произведения. *Корень из произведения равен произведению корней из сомножителей:*

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}. \qquad (11.1)$$

Доказательство. Для доказательства этого (и дальнейших) свойства достаточно проверить, что при возведении обеих частей равенства (11.1) в степень m получим одно и то же число. При этом мы пользуемся соотношением $(\sqrt[m]{a})^m = a$, непосредст-

венно вытекающим из определения корня m-й степени. Имеем

$$(\sqrt[m]{ab})^m = ab$$

и

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m = ab,$$

откуда и вытекает требуемое свойство.

2) Возведение корня в степень. *Для возведения корня в степень достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение, сохраняя показатель корня.*

Это правило записывается так:

$$(\sqrt[m]{a})^k = \sqrt[m]{a^k}. \tag{11.2}$$

Свойство 2) непосредственно вытекает из свойства 1), а также может быть проверено возведением обеих частей равенства (11.2) в степень m.

3) Извлечение корня из частного. *Корень из частного равен частному от деления корня из числителя на корень из знаменателя:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{11.3}$$

4) Извлечение корня из степени. Пусть показатель степени m является кратным показателя корня n: $m = nk$. Тогда

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = a^k, \tag{11.4}$$

т. е. *при извлечении корня из степени показатель степени следует разделить на показатель корня.*

Пусть в общем случае m не является кратным n; выполним деление m на n с остатком: $m = nq + r$. Тогда

$$\sqrt[n]{a^{nq+r}} = a^q\sqrt[n]{a^r}. \tag{11.5}$$

Действительно, применяя уже найденные правила, получим

$$\sqrt[n]{a^{nq+r}} = \sqrt[n]{a^{nq}a^r} = \sqrt[n]{a^{nq}}\sqrt[n]{a^r} = a^q\sqrt[n]{a^r}.$$

Пример 1. $\sqrt[7]{2^{58}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8+2}} = 2^8\sqrt[7]{2^2} = 128\sqrt[7]{4}$.

5) Извлечение корня из корня. *Для извлечения корня из корня достаточно перемножить показатели корней, сохранив подкоренное выражение:*

$$\sqrt[l]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[lm]{a}. \tag{11.6}$$

6) Сокращение показателя корня и показателя подкоренного выражения на их общий множитель. Пусть в выражении $\sqrt[m]{a^n}$ н. о. д. показателей m и n равен k (п. 3). Это значит, что $m = kr$ и $n = ks$, причем r и s —

целые взаимно простые числа. Тогда $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[r]{a^s}$. Это означает, что *если показатели корня и подкоренного выражения имеют общий делитель, то на него их можно сократить, не меняя величины корня*. Например: $\sqrt[15]{a^{12}}=\sqrt[5\cdot 3]{a^{4\cdot 3}}=\sqrt[5]{a^4}$.

Обратно, *если показатели корня и подкоренного выражения умножить на одно и то же число, то корень от этого не изменится*. Например: $\sqrt[11]{a^6}=\sqrt[11\cdot 4]{a^{6\cdot 4}}=\sqrt[44]{a^{24}}$.

7) Приведение корней к общему показателю. Пользуясь только что установленным свойством, можно два или несколько корней приводить к общему показателю, который представляет собой н. о. к. показателей всех данных корней.

Это преобразование полезно применять при умножении корней с разными показателями.

Пример 2. Упростить произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2}$.

Решение. $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{4^2}\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^8}=\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$. Здесь н. о. к. показателей корней равнялось 6; в процессе преобразования мы применили также правило 6) сокращения показателей степени и корня и правило 1).

Аналогичным образом выполняется и деление корней.

Пример 3. $\dfrac{\sqrt[3]{36}\,\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^8\cdot 3^8}\,\sqrt[12]{3^6}}{\sqrt[12]{2^6\cdot 3^2}}=\sqrt[12]{2^2\cdot 3^{12}}=3\sqrt[6]{2}$.

12. Степени с рациональными показателями. Степени с действительными показателями. Будем, как и в п. 11, рассматривать только корни из положительных чисел. Мы видели, что в случае, когда m делится нацело на n,

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}.$$

Обобщая это правило, можно ввести следующее определение степени с положительным рациональным показателем p/q:

$$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}. \qquad (12.1)$$

В случае отрицательного рационального показателя степени $-p/q$ полагают (по аналогии со случаем целого отрицательного показателя степени)

$$a^{-p/q}=\frac{1}{a^{p/q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}. \qquad (12.2)$$

На степени с рациональными показателями распространяются все правила действий над степенями с натуральными и вообще целыми показателями. Для их обоснования достаточно применить правила п. 11 действий над корнями. Докажем, например, свойство

$$a^{p/q}a^{p'/q'}=a^{p/q+p'/q'}.$$

Имеем

$$a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qq']{a^{pq'}}.$$

Так же получим $a^{p'/q'}=\sqrt[qq']{a^{p'q}}$. Отсюда

$$a^{p/q}a^{p'/q'}=\sqrt[qq']{a^{pq'}}\sqrt[qq']{a^{p'q}}=\sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}}=a^{\frac{pq'+p'q}{qq'}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}},$$

что и требовалось доказать.

Рассматривают также степени положительного числа a при произвольных действительных показателях. В основу определения a^x при иррациональном x кладется последовательное приближение x рациональными числами. Так, например, для $3^{\sqrt{2}}$ следует рассмотреть приближения по недостатку и по избытку для $\sqrt{2}$ и возводить 3 в соответствующие рациональные степени, записывая

$$\begin{gathered}3^1<3^{\sqrt{2}}<3^2,\\ 3^{1,4}<3^{\sqrt{2}}<3^{1,5},\\ 3^{1,41}<3^{\sqrt{2}}<3^{1,42},\\ \ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

По мере продолжения этого процесса левая и правая части неравенств, выраженные бесконечными десятичными дробями, будут иметь все большее и большее число совпадающих десятичных знаков, которые и будут приниматься за десятичные знаки, определяющие иррациональное число $3^{\sqrt{2}}$. Более подробно рассматривать этот вопрос мы не можем, но отметим, что a^x имеет действительное вполне определенное значение при $a>0$ и любом действительном x.

Замечание. Извлечение корня нечетной степени возможно и из отрицательного числа. Поэтому выражению $a^{p/q}$ при $a<0$ также можно приписать смысл с помощью равенства $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$ в случае, когда несократимая рациональная дробь p/q имеет нечетный знаменатель. В случае четного q и для иррациональных значений показателя степень отрицательного основания не определяется. Нуль в любой положительной степени равен нулю; нулевая и отрицательные степени нуля не определены.

Пример. Произвести действия, пользуясь отрицательными и дробными показателями степени: $\sqrt[5]{8/9}\,\sqrt[7]{3/16}$.

Решение. $\sqrt[5]{8/9}\,\sqrt[7]{3/16}=2^{3/5}\cdot 3^{-2/5}\cdot 3^{1/7}\cdot 2^{-4/7}=2^{1/35}\cdot 3^{-9/35}=$ $=\sqrt[35]{2/3^9}$.

13. Алгоритм извлечения квадратного корня. Пусть дано произвольное положительное число A; тогда можно указать последовательность арифметических действий, приводящую к вычислению квадратного корня из данного числа с любой заданной

степенью точности. Эта последовательность действий, описанная ниже, получает название алгоритма *извлечения квадратного корня.*

Предположим вначале для простоты, что данное число — целое m-значное; записываем его в виде $\overline{c_1c_2\ldots c_m}$ (см. п. 1). Ответим на вопрос, сколько цифр будет содержать целая часть арифметического квадратного корня из A. Ответ получается из следующего сравнения неравенств для числа и корня из этого числа:

$$\begin{array}{llll} \text{Если} & 1 \leqslant A < 100, & \text{то} & 1 \leqslant \sqrt{A} < 10, \\ \text{если} & 100 \leqslant A < 10\,000, & \text{то} & 10 \leqslant \sqrt{A} < 100, \\ \text{если} & 10\,000 \leqslant A < 1\,000\,000, & \text{то} & 100 \leqslant \sqrt{A} < 1000, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Таким образом, если A — одно- или двузначное число, то целая часть $\sqrt{A}$ — однозначная; если A — трех- или четырехзначное число, то целая часть $\sqrt{A}$ — двузначная и т. д. Вообще, если A — m-значное число, то целая часть $\sqrt{A}$ будет $(m/2)$-значной при четном m и $((m+1)/2)$-значной при нечетном m. Практически это число знаков определяется механически таким образом: число A разбивают на «грани» по две цифры, начиная справа; при этом последняя левая грань может состоять из одной или двух цифр, например:

$$28'83'67, \quad 2'12'61'52.$$

Число граней и дает нам число цифр целой части $\sqrt{A}$.

Следующий шаг состоит в определении первой цифры числа $\sqrt{A}$; эта цифра a_1 легко находится в уме, так как для ее отыскания достаточно помнить квадраты целых чисел от 1 до 9. В самом деле, первая цифра $\sqrt{A}$ зависит только от первой (считая слева) грани числа A. Например, $\sqrt{28'c_3c_4'c_5c_6}$ содержит заведомо 5 сотен независимо от цифр c_3, c_4, c_5, c_6; $\sqrt{3'c_2c_3'c_4c'_5c_6c_7}$ содержит одну тысячу независимо от цифр c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 и т. п. Можно записать

$$\sqrt{28'c_3c_4'c_5c_6} = \overline{5a_2a_3}, \ \ldots, \ \sqrt{3'c_2c_3'c_4c_5'c_6c_7} = \overline{1a_2a_3a_4}, \ \ldots$$

Покажем, из каких соображений можно находить следующую цифру a_2 числа $\sqrt{A}$. Цифра a_2 определяется как наибольшая цифра, при которой еще выполняется неравенство (k — число граней A)

$$\sqrt{A} \geqslant a_1 \cdot 10^k + a_2 \cdot 10^{k-1}$$

или

$$A \geqslant a_1^2 \cdot 10^{2k} + 2a_1a_2 \cdot 10^{2k-1} + a_2^2 \cdot 10^{2k-2}, \qquad (13.1)$$

откуда, тем более,

$$A \geqslant a_1^2 \cdot 10^{2k} + 2a_1 a_2 \cdot 10^{2k-1}, \tag{13.2}$$

или

$$a_2 \leqslant \frac{A-(a_1 \cdot 10^k)^2}{2a_1 \cdot 10^{2k-1}}. \tag{13.3}$$

Можно было бы находить a_2 из неравенства (13.1), но решение квадратного неравенства является трудоемким; поэтому переходят к простому линейному неравенству (13.2), из которого и получается условие (13.3) для подбора a_2. Берем наибольшее целое a_2, удовлетворяющее условию (13.3).

Такое a_2 может еще оказаться слишком большим: надо проверить, выполняется ли и неравенство (13.1); если a_2 оказалось слишком большим, то уменьшаем его на единицу и снова проверяем, удовлетворяется ли неравенство (13.1). Таким образом подбирается a_2.

При этом a_2 определяется с использованием лишь первых двух левых граней A, остальные грани A на выбор a_2 не влияют.

Пример 1. $\sqrt{28'83'67} = \overline{5a_2a_3}, \ldots$; для отыскания a_2 имеем неравенство (13.3), которое запишется так:

$$a_2 \leqslant \frac{288\,367 - 250\,000}{2 \cdot 5 \cdot 10^3} = 3{,}8367.$$

Наибольшее значение $a_2 = 3$. Проверяем, удовлетворяется ли неравенство (13.1):

$$288\,367 \geqslant (530)^2 = 280\,900.$$

Так как неравенство выполнено, то вторая цифра корня равна 3:

$$\sqrt{288\,367} = \overline{53a_3}, \ \ldots$$

Пример 2. $\sqrt{2'12'61'52} = \overline{1a_2a_3a_4}, \ldots$; для a_2 имеем

$$a_2 \leqslant \frac{2\,126\,152 - 1\,000\,000}{2 \cdot 1 \cdot 10^5} = 5{,}63\ldots$$

Наибольшее возможное значение $a_2 = 5$; но неравенство

$$2\,126\,152 \geqslant (1500)^2 = 2\,250\,000$$

неверно. Испытываем $a_2 = 4$:

$$2\,126\,152 \geqslant (1400)^2 = 1\,960\,000.$$

Неравенство выполнено. Итак,

$$\sqrt{2\,126\,152} = \overline{14a_3a_4}, \ \ldots$$

Замечание. Здесь практически можно было определить первые две цифры корня сразу, в уме, так как очевидно, что $\sqrt{212}=14, \ldots$

После того как найдены первые две цифры корня a_1 и a_2, из тех же соображений находят следующие, в том числе и идущие после запятой цифры $\sqrt{A}$. Например, для a_3 исходят из неравенства

$$\sqrt{A} \geqslant a_1 \cdot 10^k + a_2 \cdot 10^{k-1} + a_3 \cdot 10^{k-2},$$

получая из него оценку для a_3:

$$a_3 \leqslant \frac{A-(a_1 \cdot 10^k + a_2 \cdot 10^{k-1})^2}{2(a_1 \cdot 10^k + a_2 \cdot 10^{k-1}) \cdot 10^{k-2}}, \text{ и т. д.}$$

При практическом извлечении корня все вычисления располагают в некоторой определенной схеме, которую мы напомним на тех же примерах $\sqrt{288\,367}$ и $\sqrt{2\,126\,152}$.

Перед разбором примеров приведем для удобства формулировку правила извлечения корня (А. Н. Барсуков, Алгебра, изд-во «Просвещение», 1967).

Правило. Чтобы извлечь квадратный корень из данного целого числа, разбивают его справа налево на грани, по две цифры в каждой, кроме первой (крайней левой), в которой может быть и одна цифра.

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из первой грани.

Чтобы найти вторую цифру, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня, к остатку сносят вторую грань и число десятков получающегося числа делят на удвоенную первую цифру корня; полученное целое число подвергают испытанию.

Испытание это производится так: за вертикальной чертой корня (налево от остатка) пишут удвоенное ранее найденное число корня и к нему с правой стороны приписывают испытуемую цифру; получившееся после этой приписки число умножают на испытуемую цифру. Если после умножения получится число, большее остатка, то испытуемая цифра не годится и надо испытывать следующую, меньшую цифру.

Следующие цифры корня находят с помощью того же приема.

Если после снесения грани число десятков получившегося числа окажется меньше делителя, т. е. меньше удвоенной найденной части корня, то в корне ставят 0, сносят следующую грань и продолжают действие дальше.

Пример 3. Вычислить: а) $\sqrt{288\,367}$ с точностью до 0,01; б) $\sqrt{2\,126\,152}$ с точностью до 0,1.

Решение.

а) $\sqrt{28'83'67}=536{,}99\ldots$

	25
103	3 8'3
3	3 0 9
*) 1067	7 4 67
7	7 4 69
1066	7 4 67
6	6 3 96
**) 10729	1 0 710'0
9	9 656 1
107389	1 053 90'0
	966 50 1

. . . .

Примечания. *) Цифра 7 не выдерживает испытания; переходим к следующей цифре 6. **) Мысленно дополняем подкоренное число нулями за запятой и сносим следующую нулевую грань.

б) $\sqrt{2'12'61'52}=1458{,}1\ldots$

	1
25	1 1'2
5	1 2 5
24	1 1'2
4	9 6
285	1 66'1
5	1 42 5
2908	23 65'2
8	23 26 4
29161	38 80'0
1	29 16 1

Если подкоренное число выражается десятичной дробью, то деление на грани производится от запятой: для целой части влево, для дробной — вправо:

$$381{,}6428=3'81{,}64'28;\quad 25{,}741=25{,}74'10;$$

в остальном процесс извлечения корня остается тем же.

Упражнения

1. Вычислить: а) $\dfrac{2^{-2}\cdot5^{3}\cdot10^{-4}}{2^{-3}\cdot5^{2}\cdot10^{-5}}$; б) $\dfrac{3^{-3}\ 4^{2}\ 7^{-4}}{3^{-2}\cdot4^{3}\ 7^{-3}}$.

2. Упростить: а) $\sqrt[5]{2187}$; б) $\sqrt[4]{2250\,000}$.

3. Упростить: а) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[4]{9}\,\sqrt[6]{81}$; б) $\dfrac{\sqrt[8]{9}\,\sqrt[3]{40}\,\sqrt[4]{4}}{\sqrt{25\sqrt{2}}}$.

4. Упростить: а) $\dfrac{2^{1/2}+2\cdot 5^{-1}}{2^{-1/3}-2^{-1/6}\cdot 5^{-1/3}+5^{-2/3}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$;

б) $\dfrac{2^{7/3}-2^{8/3}\cdot 3^{2/3}+2\sqrt[3]{3^4}}{2^{5/3}-\sqrt[3]{48}-2\cdot 3^{2/3}+3\cdot 2^{2/3}}:\sqrt[3]{2}$.

5. Вычислить квадратные корни из чисел: а) $\sqrt{2753}$ с точностью до 0,01; б) $\sqrt{2,858}$ с точностью до 0,001; в) $\sqrt{0,0358}$ с точностью до 0,001.

§ 3. Комплексные числа

14. Основные понятия и определения. В § 1 мы проследили, как при постепенном расширении рассматриваемой числовой области натуральные числа — целые числа — рациональные числа — действительные числа достигается возможность выполнения сначала всех рациональных действий над числами, а затем такого, например, действия, как извлечение корня из положительного числа. Тем не менее и в области действительных чисел не все операции осуществимы. Так, например, во множестве действительных чисел невозможно извлечение квадратных корней из отрицательных чисел. Если уравнение $x^2-1=0$ решается в области рациональных чисел: $x=\pm 1$, а уравнение $x^2-2=0$ — в области действительных чисел: $x=\pm\sqrt{2}$, то уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных корней. В самом деле, квадрат любого действительного числа неотрицателен и при любом x имеем $x^2+1>0$. Таким образом, внешне весьма сходные, уравнения второй степени $x^2-1=0$, $x^2+1=0$ оказываются весьма различными по своим свойствам: одно из них имеет два решения, другое — ни одного! Такое положение может быть устранено введением нового вида чисел (комплексных чисел), расширяющих множество действительных чисел (подобно тому как множество рациональных чисел расширило множество целых чисел и т. д.). При этом уже оказывается возможным не только приписать смысл корню квадратному из отрицательных чисел, но и вообще достичь положения, когда бы все алгебраические уравнения имели (в области комплексных чисел) решения.

Для определения комплексных чисел сначала введем некоторый символ i, который назовем *мнимой единицей*. Этому символу приписывается (постулируется) свойство удовлетворять уравнению $x^2+1=0$:

$$i^2+1=0, \quad \text{или} \quad i^2=-1. \tag{14.1}$$

Теперь рассмотрим множество всех двучленов вида

$$a+bi,$$

где a, b — произвольные действительные числа, и условимся производить над такими двучленами действия сложения, вычитания и умножения по обычным правилам алгебры (п. 19) с единственным дополнительным условием:

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Так определенное множество выражений $a+bi$ называется *множеством комплексных чисел*. Само выражение $z=a+bi$ при любых a, b называется *комплексным числом*.

При этом a называется *действительной частью* числа $a+bi$, а b — его *мнимой частью* или *коэффициентом при мнимой единице*[1]).

Данное определение необходимо дополнить условием равенства двух комплексных чисел:

Два комплексных числа считают равными в том и только в том случае, если порознь равны друг другу их действительные и мнимые части; это означает, что если $a_1+b_1i=a_2+b_2i$, то $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$ и, обратно, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, то и $a_1+b_1i=a_2+b_2i$.

Второе важное дополнительное соглашение состоит в том, что *действительные числа рассматриваются как частный случай комплексных.* Именно, если мнимая часть комплексного числа равна нулю, то вместо $z=a+0\cdot i$ пишут просто $z=a$ и не отличают такого комплексного числа от действительного числа a.

В частности, *комплексное число равно нулю в том и только в том случае, когда равны нулю его действительная и мнимая части*; это означает, что если $a+bi=0$, то $a=0$ и $b=0$ и, обратно, если $a=0$ и $b=0$, то и $a+bi=0$.

Комплексное число, у которого равна нулю действительная часть, также записывают коротко в виде $z=bi$ и называют *чисто мнимым числом*. Выражение «мнимое число» обычно применяют, чтобы указать, что комплексное число $z=a+bi$ не является действительным, т. е. имеет ненулевую мнимую часть: $b \neq 0$.

Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$, действительные части которых равны, а мнимые противоположны по знаку, называют *комплексно сопряженными* числами; число, комплексно сопряженное с числом z, обозначается через $\bar{z}$:

$$z=a+bi, \quad \bar{z}=a-bi. \tag{14.2}$$

Очевидно, что $\bar{\bar{z}}=z$.

---

[1]) В некоторых учебниках мнимой частью числа $a+bi$ называют не коэффициент b, а bi.

Термин «мнимое число» свидетельствует о недоверии, с которым вначале воспринималось введение в математику этого вида чисел. В дальнейшем комплексные числа оказались, однако, чрезвычайно полезными как в самой математике, так и, благодаря важным приложениям, во многих инженерных дисциплинах.

15. Рациональные действия с комплексными числами. Уже в определении комплексных чисел было указано, что действия над ними определяются как действия над алгебраическими двучленами. Рассмотрим сначала действия сложения и вычитания: под *суммой (разностью)* комплексных чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ понимают такое комплексное число, действительная и мнимая части которого представляют собой соответственно суммы (разности) действительных и мнимых частей данных чисел. Обозначаются сумма и разность обычным образом, как $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$:

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a+c) + (b+d)\,i, \\ z_1 - z_2 &= (a-c) + (b-d)\,i \end{aligned}\right\} \qquad (15.1)$$

(в полном согласии с правилами действий над двучленами). Аналогично находится алгебраическая сумма любого числа слагаемых.

Заметим, что при введении обозначения комплексного числа $z = a + bi$ мы, строго говоря, использовали знак сложения «$+$» не в своем прямом смысле: ведь складывать a и bi мы в этот момент еще не умели. Сейчас, однако, видно, что можно понимать комплексное число $a + bi$ как сумму действительного числа $a = a + 0 \cdot i$ и чисто мнимого $bi = 0 + bi$:

$$(a + 0 \cdot i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)\,i = a + bi.$$

Пример 1. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 + 7i$, $z_3 = 5 - 11i$; вычислить $z_1 - z_2 + z_3$.

Решение. $z_1 - z_2 + z_3 = [2 - (-4) + 5] + [3 - 7 + (-11)]\,i = 11 - 15i$.

Заметим, что сумма двух сопряженных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ есть число действительное, а разность — чисто мнимое; в самом деле,

$$z + \bar{z} = (a + a) + [b + (-b)]\,i = 2a,$$
$$z - \bar{z} = (a - a) + [b - (-b)]\,i = 2bi.$$

Произведение $z_1 z_2$ комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ определяется как произведение двучленов (п. 19) с применением обычного правила раскрытия скобок:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) = \\ &= ac + adi + bic + bidi = \\ &= ac + (ad + bc)\,i + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\,i. \end{aligned} \qquad (15.2)$$

Пример 2. Вычислить произведение чисел $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = 5 - 3i$.

Решение.

$$z_1 z_2 = (-2 + 4i)(5 - 3i) =$$
$$= [(-2)\cdot 5 - 4\cdot(-3)] + [(-2)\cdot(-3) + 5\cdot 4]\, i = 2 + 26i.$$

Заметим, что произведение двух сопряженных комплексных чисел есть неотрицательное действительное число; в самом деле,

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) =$$
$$= [aa - b(-b)] + [a(-b) + ab]\, i = a^2 + b^2. \quad (15.3)$$

Число $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ называется *модулем* или *абсолютной величиной комплексного числа* $a + bi$. В частности, когда $b = 0$, число $z = a$ действительное, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ — модуль действительного числа, рассматриваемого как частный случай комплексного числа,— есть то же самое, что модуль действительного числа в прежнем смысле слова (п. 6).

Очевидно, что $|\bar{z}| = |z|$. Равенство (15.3) означает, что произведение сопряженных чисел равно квадрату модуля каждого из них.

Произведение нескольких сомножителей может быть найдено последовательным умножением. Натуральная степень комплексного числа, например $(a + bi)^2$, $(a + bi)^3$ и вообще $(a + bi)^n$, может быть найдена при помощи формул квадрата суммы, куба суммы (п. 20) и вообще формулы бинома Ньютона (п. 21). При этом удобно использовать общее правило для возведения в любую натуральную степень мнимой единицы i. Так как

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \ \ldots,$$

то при возведении i в любую степень можно, не меняя результата, отбросить от показателя степени слагаемое, кратное четырем. Поэтому для возведения числа i в любую натуральную степень n надо найти остаток при делении n на 4 и возвести i в степень, равную этому остатку.

Пример 3. Найти: а) i^{98}; б) i^{259}.

Решение. а) Имеем $98 = 4\cdot 24 + 2$; отсюда $i^{98} = i^2 = -1$; б) имеем $259 = 4\cdot 64 + 3$; отсюда $i^{259} = i^3 = -i$.

Пример 4. Вычислить $(2 + 3i)^3$.

Решение. Пользуемся формулой куба суммы (20.6):

$$(2 + 3i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 3i + 3\cdot 2\cdot (3i)^2 + (3i)^3 =$$
$$= 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i.$$

Деление комплексных чисел определим как действие, обратное умножению, результат деления назовем *частным*. Частное

от деления z_1 на z_2 (предполагается, что $z_2 \neq 0$) обозначается, как обычно, через z_1/z_2 или $z_1 : z_2$ и, по определению, является таким числом z, что $z_1 = z_2 z$.

Покажем, что при $z_2 \neq 0$ существует вполне определенное комплексное число $z = z_1/z_2$—частное от деления z_1 на z_2. Будем искать неизвестное $z = x + iy$ из условия

$$z_1 = z_2 z.$$

Обозначив $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, получим

$$a + bi = (c + di)(x + yi) = cx - dy + (dx + cy) i$$

и, пользуясь определением равенства комплексных чисел (п.14), найдем

$$cx - dy = a,$$
$$dx + cy = b.$$

Для искомых чисел x, y получилась система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (см. пп. 66, 67). Решая эту систему, найдем (рекомендуется проделать вычисления подробно, пользуясь, например, методом исключения неизвестных или определителями)

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

т. е.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \tag{15.4}$$

Так как $z_2 \neq 0$, то и $c^2 + d^2 = |z_2|^2 \neq 0$, т. е. деление выполнимо при любом $z_2 \neq 0$.

Практически удобней не пользоваться громоздкой формулой (15.4), а выполнять деление следующим приемом: для отыскания частного z_1/z_2 умножаем числитель и знаменатель дроби на одно и то же число $\bar{z}_2$ (сопряженное с числом z_2). Получаем дробь $\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$, знаменатель которой равен $|z_2|^2$, т. е. уже является действительным числом.

Пример 5. Разделить $2 + 5i$ на $3 - 4i$.

Решение. $\frac{2 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(2 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{(6 - 20) + (8 + 15) i}{3^2 + 4^2} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25} i.$

В дальнейшем нам окажутся полезными следующие соотношения, показывающие, что результат рациональных действий, выполненных над числами, комплексно сопряженными с данными, сам комплексно сопряжен с результатом тех же действий, выполненных над данными числами:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{(z_1 + z_2)}, \quad \bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{(z_1 z_2)}, \quad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}. \tag{15.5}$$

Выведем, например, вторую из этих формул (доказательство первой и третьей предоставим читателю). Пусть даны

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di.$$

Тогда $\bar{z}_1 = a - bi$, $\bar{z}_2 = c - di$. Находим

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (bc + ad) i$$

и

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{((ac - bd) + (bc + ad) i)} = ac - bd - (bc + ad) i.$$

Из сравнения этих результатов и следует требуемое соотношение.

В заключение заметим, что над комплексными числами выполнимы все рациональные действия (кроме деления на нуль), причем в результате снова получаются комплексные числа. Комплексные числа образуют числовое поле — *поле комплексных чисел*.

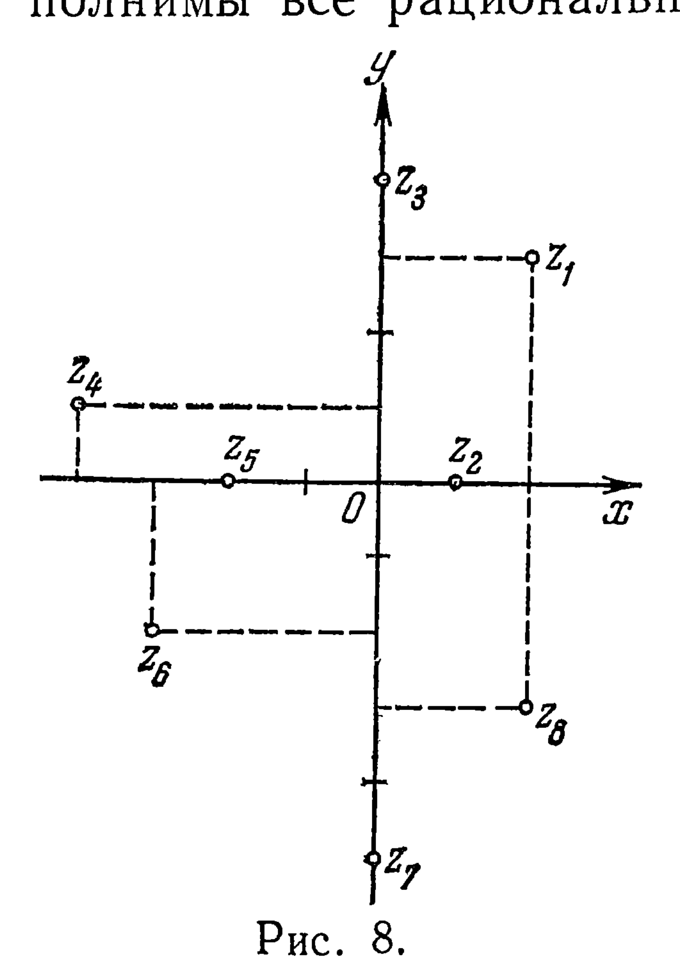


Рис. 8.

16. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа. Задание комплексного числа $z = a + bi$ равносильно заданию двух действительных чисел a, b — действительной и мнимой частей данного комплексного числа. Но упорядоченная пара чисел (a, b) изображается в декартовой прямоугольной системе координат точкой с координатами (a, b). Таким образом, эта точка может служить изображением и для комплексного числа z: между комплексными числами и точками координатной плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие. При использовании координатной плоскости для изображения комплексных чисел ось Ox обычно называют *действительной осью* (так как действительная часть числа принимается за абсциссу точки), а ось Oy — *мнимой осью* (так как мнимая часть числа принимается за ординату точки). Комплексное число z, изображаемое точкой $M(a, b)$, называется *аффиксом* этой точки. При этом действительные числа изображаются точками, лежащими на действительной оси, а все чисто мнимые числа bi (при $a = 0$) — точками, лежащими на мнимой оси. Число нуль изображается точкой O.

На рис. 8 построены изображения чисел $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 4i$, $z_4 = -4 + i$, $z_5 = -2$, $z_6 = -3 - 2i$, $z_7 = -5i$, $z_8 = 2 - 3i$.

Два комплексно сопряженных числа изображаются точками, симметричными относительно оси Ox (точки z_1 и z_8 на рис. 8).

Часто с комплексным числом z связывают не только точку M, изображающую это число, но и вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. п. 93), ведущий из O в M; изобра-

жение числа z вектором удобно с точки зрения геометрического истолкования действия сложения и вычитания комплексных чисел. На рис. 9, *а* показано, что вектор, изображающий сумму комплексных чисел z_1, z_2, получается как

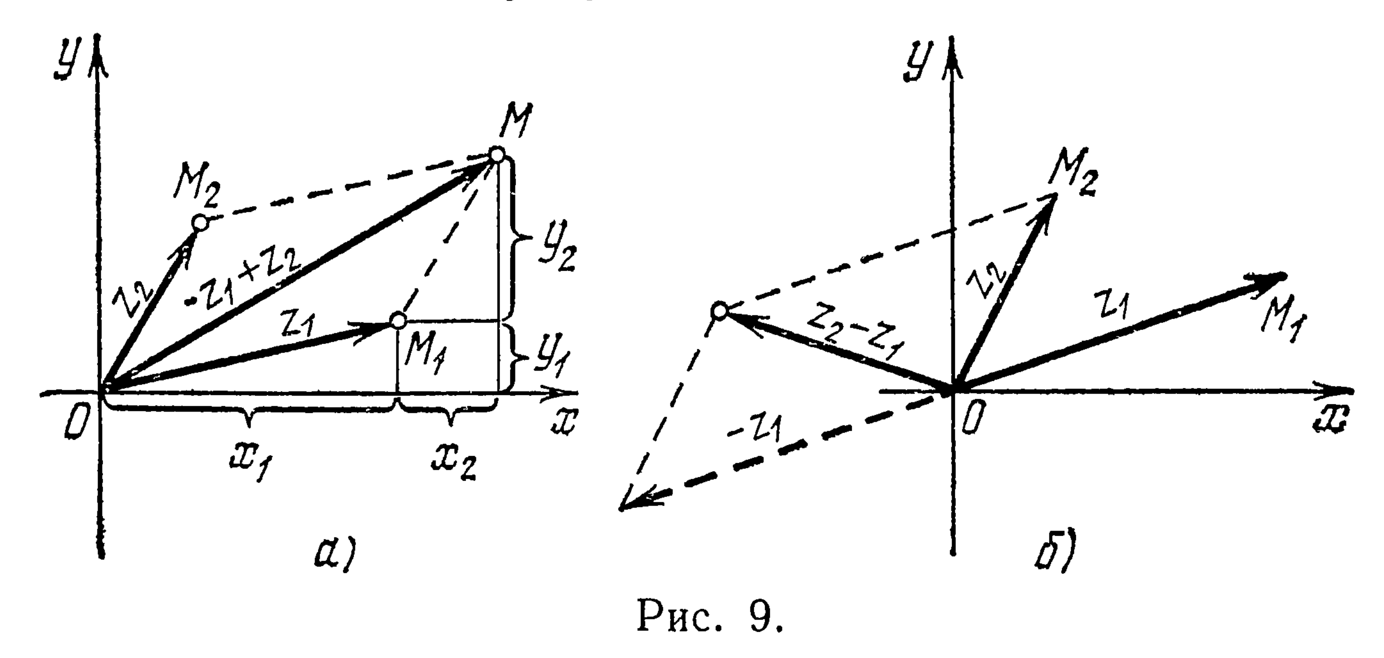


Рис. 9.

диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, изображающих слагаемые. Это правило сложения векторов известно как *правило параллелограмма* (например, для сложения сил или скоростей в курсе физики). Вычитание может быть сведено к сложению с противоположным вектором (рис. 9, *б*).

Как известно (п. 8), положение точки на плоскости можно задавать также ее полярными координатами r, φ. Тем самым и комплексное число — аффикс точки также определится заданием r и φ. Из рис. 10 ясно, что $r = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ является в то же время модулем комплексного числа z: *полярный радиус точки, изображающей число z, равен модулю этого числа.*

Полярный угол точки M называют *аргументом* числа z, изображаемого этой точкой. Аргумент комплексного числа (как и полярный угол точки) определен неоднозначно; если φ_0 — одно из его значений, то все его значения выражаются формулой

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Все значения аргумента в совокупности обозначаются символом $\operatorname{Arg} z$.

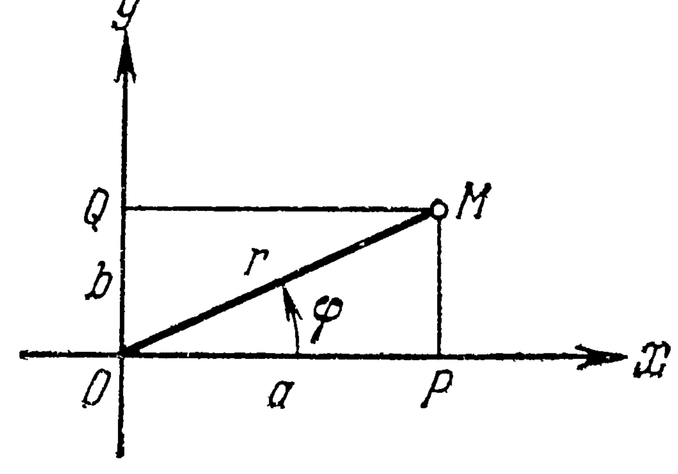


Рис. 10.

Итак, всякому комплексному числу может быть поставлена в соответствие пара действительных чисел: модуль и аргумент данного числа, причем аргумент определяется неоднозначно. Напротив, заданным модулю $|z| = r$ и аргументу φ отвечает единственное число z, имеющее данные модуль и аргумент. Особыми свойствами обладает число нуль: его модуль равен нулю, аргументу не приписывается никакого определенного значения.

Для достижения однозначности в определении аргумента комплексного числа можно условиться одно из значений аргумента называть *главным*. Его обозначают символом $\arg z$. Обычно в качестве главного значения аргумента выбирается значение, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leqslant \arg z < 2\pi$$

(в других случаях неравенствам $-\pi < \arg z \leqslant \pi$).

Обратим еще внимание на значения аргумента действительных и чисто мнимых чисел:

$$\arg a = \begin{cases} 0, & \text{если } a > 0, \\ \pi, & \text{если } a < 0; \end{cases}$$

$$\arg bi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } b > 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Действительная и мнимая части комплексного числа (как декартовы координаты точки) выражаются через его модуль и аргумент (полярные координаты точки) по формулам (8.3):

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi, \tag{16.1}$$

и комплексное число может быть записано в следующей *тригонометрической форме*:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{16.2}$$

(запись числа в виде $z = a + bi$ будем называть записью *в алгебраической форме*).

Условие равенства двух чисел, заданных в тригонометрической форме, таково: *два числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы равны или отличаются на целое число периодов 2π.*

Переход от записи числа в алгебраической форме к его записи в тригонометрической форме и обратно совершается по формулам (8.4):

$$\left.\begin{array}{c} r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}, \end{array}\right. \tag{16.3}$$

и формулам (16.1). При определении аргумента (его главного значения) можно пользоваться значением одной из тригонометрических функций $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ и учитывать знак второй.

Пример. Записать в тригонометрической форме следующие числа:

а) $6-6i$; б) $3i$; в) -10.

Решение. а) Имеем

$$r=\sqrt{6^2+(-6)^2}=6\sqrt{2},$$
$$\cos\varphi=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\varphi=-\frac{6}{6\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\varphi=7\pi/4$, и, следовательно,

$$6-6i=6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right);$$

б) $r=3$, $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=1$, $\varphi=\pi/2$;

$$3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

в) $r=10$, $\cos\varphi=-1$, $\sin\varphi=0$, $\varphi=\pi$;

$$-10=10(\cos\pi+i\sin\pi).$$

17. Действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Формула Муавра. Задание комплексных чисел в тригонометрической форме удобно при выполнении над числами действий умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Найдем произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме; пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Получаем

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$
$$+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)].$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, можно упростить с помощью известных формул (115.4), (116.1):

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2),$$
$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1=\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

Таким образом,

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (17.1)$$

Доказано правило: *для умножения чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули надо перемножить, а аргументы сложить.*

Это правило остается верным для любого количества сомножителей.

Пример 1. Найти произведение чисел

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos 25°+i\sin 25°),\quad z_2=\sqrt[3]{4}(\cos 35°+i\sin 35°).$$

Решение. $z_1z_2 = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}\,[\cos(25^\circ+35^\circ)+i\sin(25^\circ+35^\circ)] =$
$= 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 1 + i\sqrt{3}.$

Так как деление — действие, обратное умножению, то легко вывести следующее правило: *для выполнения деления двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, следует их модули разделить, а аргументы вычесть*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (17.2)$$

Пример 2. Найти частное от деления числа $z_1 = 6(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$ на число $z_2 = 2(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)$.

Решение. Находим по формуле (17.2):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Используем теперь равенство (17.1) для возведения произвольного комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n. Для этого придется модуль r этого числа взять множителем n раз и аргумент φ взять слагаемым n раз. Это приводит к равенству

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (17.3)$$

Равенство (17.3) называется *формулой Муавра*. Из нее следует, что *для возведения комплексного числа в любую натуральную степень его модуль нужно возвести в эту степень, а аргумент умножить на показатель степени*.

Пример 3. Вычислить $[3(\cos 43^\circ + i\sin 43^\circ)]^5$.

Решение. В соответствии с формулой Муавра (17.3) пишем:

$$[3(\cos 43^\circ + i\sin 43^\circ)]^5 = 243(\cos 215^\circ + i\sin 215^\circ).$$

Если число z задано в алгебраической форме $a+bi$, то для возведения его в степень с помощью формулы Муавра надо предварительно записать его в тригонометрической форме.

18. Извлечение корня из комплексного числа. Рассмотрим задачу извлечения корня натуральной степени n из произвольного комплексного (в частности, действительного) числа z; при этом будем искать *все возможные значения корня, действительные и комплексные*. Для решения задачи в общем виде используется представление комплексного числа $z \neq 0$ в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos(\varphi_0 + 2k\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2k\pi)). \qquad (18.1)$$

Здесь мы учли, что аргумент комплексного числа определен с точностью до целого числа периодов 2π, так что φ_0 — одно из значений аргумента (например, $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$), а $\varphi_0 + 2k\pi$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — совокупность всех значений аргумента числа z.

По общему определению понятия корня (п. 11) число w называется *корнем степени* n *из* z, если $w^n = z$. Запишем неизвестное w также в тригонометрической форме:

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{18.2}$$

Тогда, применяя формулу Муавра (17.3), перепишем равенство $w^n = z$ в виде

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos(\varphi_0 + 2k\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2k\pi)). \tag{18.3}$$

Обе части равенства (18.3) суть комплексные числа, заданные в тригонометрической форме; условия их равенства, указанные в п. 16, дают два соотношения:

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi_0 + 2k\pi. \tag{18.4}$$

Первое из соотношений (18.4) показывает, что

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

(так как $\rho > 0$ и $r > 0$, то корень понимается в арифметическом смысле). Второе равенство (18.4) выражает тот факт, что аргумент $n\theta$ числа w^n равен одному из значений аргумента числа z. Из этого равенства находим

$$\theta = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}, \tag{18.5}$$

и оказывается, что при разных значениях k получаются, вообще говоря, разные значения корня w. Обозначим значение θ, соответствующее каждому выбору числа k, через θ_k:

$$\theta_k = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}.$$

Будем давать k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$. При этом получим $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ и вместе с тем n значений корня

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right). \tag{18.6}$$

Покажем, что все эти значения различны, а при остальных возможных значениях k новых значений корня w уже не получится. Для этого заметим, что разность аргументов θ_k и θ_l будет равна

$$\theta_k - \theta_l = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} - \frac{\varphi_0 + 2l\pi}{n} = 2\pi\cdot\frac{k-l}{n}.$$

Числа w_k и w_l совпадут в том и только в том случае, если $k-l$ делится на n нацело. Для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ разность любых двух значений на n не разделится. Если же теперь брать $k = n$, $n+1, \ldots$ или $k = -1, -2, \ldots$, то значения корней w_k будут повторяться:

$$w_n = w_0, \qquad w_{n+1} = w_1, \; \ldots;$$
$$w_{-1} = w_{n-1}, \qquad w_{-2} = w_{n-2}, \; \ldots$$

Таким образом, все значения корня степени n получаются из формулы (18.6) при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Корень степени n из любого числа, отличного от нуля, имеет в комплексной области ровно n различных значений.

В случае $z=0$ единственное значение $\sqrt[n]{0}$ также равно нулю; для достижения общности формулировки можно говорить, что корень степени n из нуля также имеет n значений, которые все совпадают между собой (и равны нулю).

Пример 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{27}$.

Решение. а) Записываем -16 в тригонометрической форме:

$$-16=16(\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)).$$

Теперь

$$w_k=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right).$$

При $k=0, 1, 2, 3$ получим

$$w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(1+i),$$
$$w_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(-1+i),$$
$$w_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}(1+i),$$
$$w_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(1-i),$$

или, вообще,

$$w=\sqrt{2}(\pm 1\pm i).$$

б) $27=27(\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi))$;

$$w_k=\sqrt[3]{27}=3\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right);$$

$$w_0=3,\quad w_1=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{3}{2}(-\sqrt{3}+i),$$
$$w_2=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i).$$

Пример 2. Вычислить: а) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$; б) $\sqrt[3]{27i}$.

Решение. а) Находим

$$r=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16.$$

Далее,

$$\cos\varphi=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2},\quad \sin\varphi=-\frac{8\sqrt{3}}{16}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varphi=240^\circ.$$

Таким образом,

$$-8-8\sqrt{3}i=16[\cos(240^\circ+360^\circ k)+i\sin(240^\circ+360^\circ k)].$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}=2[\cos(60^\circ+90^\circ k)+i\sin(60^\circ+90^\circ k)].$$

Отсюда при $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ найдем все четыре значения искомого корня:

$$w_0=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=1+\sqrt{3}i,$$
$$w_1=2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)=-\sqrt{3}+i,$$
$$w_2=2(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)=-1-\sqrt{3}i,$$
$$w_3=2(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ)=\sqrt{3}-i.$$

б) Аналогично находим

$$r=27,\quad \cos\varphi=0,\quad \sin\varphi=1,\quad \varphi=90^\circ,$$

и, следовательно,

$$27i=27[\cos(90^\circ+360^\circ k)+i\sin(90^\circ+360^\circ k)].$$

Значит,

$$\sqrt[3]{27i}=3[\cos(30^\circ+120^\circ k)+i\sin(30^\circ+120^\circ k)],$$

и при $k=0,\ 1,\ 2$ получим

$$w_0=3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,$$
$$w_1=3(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,$$
$$w_3=3(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)=-3i.$$

Упражнения

1. Выполнить указанные действия:

а) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$; б) $\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}$; в) $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$; г) $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

2. Построить на плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа: $3+2i$; 3; $2+4i$; $3i$; $-1+2i$; -4; $-2-3i$; $-4i$.

3. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

а) $2+2i$; б) $2-2i$; в) $6i$; г) -5; д) $-\sqrt{3}+i$; е) $-2i$; ж) $1-\sqrt{3}i$; з) $\sin 48^\circ+i\cos 48^\circ$; и) $\cos 111^\circ-i\sin 111^\circ$.

4. Выполнить следующие действия:

а) $2(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)\cdot 4(\cos 37^\circ+i\sin 37^\circ)$; б) $3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\times 5\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$; в) $6(\cos 19^\circ+i\sin 19^\circ)\cdot 8(\cos 31^\circ+i\sin 31^\circ)\times\frac{1}{24}(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$.

5. Вычислить:

а) $[3(\cos 11^\circ+i\sin 11^\circ)]^3$; б) $\left[\sqrt[10]{2}(\cos 9^\circ+i\sin 9^\circ)\right]^5$; в) $\left[\sqrt[15]{3}(\cos 6^\circ+i\sin 6^\circ)\right]^{30}$; г) $(-2+2i)^4$; д) $(\sqrt{3}-i)^{10}$; е) $(1+i)^{20}$; ж) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^8$.

6. Найти все значения корней: а) $\sqrt[6]{-1}$; б) $\sqrt[3]{-2+2i}$; в) $\sqrt[4]{-16}$.

Глава II

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Рациональные алгебраические выражения

19. Алгебраические выражения. Одночлены и многочлены. Буквенные обозначения, применяемые в алгебре, дают возможность записать общее правило решения множества однотипных задач в виде некоторой формулы. Такая формула показывает, какие действия (и в какой последовательности) следует произвести над определенными величинами, чтобы получить нужный результат. Так, сумма n членов геометрической прогрессии (см. (91.2)) задается формулой

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q},$$

где a_1 — первый член прогрессии, а q — ее знаменатель; площадь треугольника определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} hb,$$

где h — высота треугольника, а b — его основание (201.1), и т. д.

Зная числовые значения величин (*буквенных параметров*) в правой части формулы, можно, выполняя указанные действия, найти числовое значение искомой величины. Правые части написанных формул дают нам примеры *алгебраических выражений*; другие примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}(b-c)}; \quad \frac{x^2+y^2}{(ax+by)^3}; \quad -\frac{xy}{4ab}; \quad \frac{\sqrt[3]{a}-1}{a+1}. \qquad (19.1)$$

Нет необходимости в строгом определении понятия алгебраического выражения: этот термин можно применять всякий раз, когда дана запись, указывающая алгебраические действия, производимые над некоторыми числами и буквенными величинами.

Если в записи алгебраического выражения используют только рациональные (целые рациональные) действия над буквенными величинами, то оно называется *рациональным* (*целым рациональным*) алгебраическим выражением. Первые два выражения (19.1) рациональны.

При подстановке вместо букв указанных числовых значений данное алгебраическое выражение принимает определенное числовое значение (если все действия выполнимы).

Выражение $(a+b)/(a-b)$ имеет смысл при всех значениях a и b, не равных между собой, т. е. при $a \neq b$.

Выражение $\sqrt{2a-5}+a$ имеет смысл (везде, если не оговорено противное, мы ограничиваемся только действительной областью) при $a \geqslant 5/2$.

Пример 1. Найти значение алгебраического выражения $(ax+b)/(bx-a)$ при следующих значениях a, b, x:

а) $a=2,\ b=3,\ x=1$;

б) $a=\sqrt[3]{2},\ b=-2,\ x=\sqrt[3]{4}$;

в) $a=3,\quad b=-3,\ x=-1$.

Решение.

а) $$\left.\frac{ax+b}{bx-a}\right|_{\substack{a=2\\ b=3\\ x=1}} = \frac{2\cdot 1+3}{3\cdot 1-2}=5;$$

б) $$\left.\frac{ax+b}{bx-a}\right|_{\substack{a=\sqrt[3]{2}\\ b=-2\\ x=\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}-2}{-2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}=0;$$

в) выражение не имеет смысла, так как знаменатель обращается в нуль.

Множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение, часто называют *областью допустимых значений* (о. д. з.). В примере 1 области допустимых значений принадлежат любые тройки значений a, b, x при условии, что $bx \neq a$.

Два различных по виду алгебраических выражения могут тем не менее иметь равные числовые значения при любых допустимых значениях буквенных параметров (и одинаковые о. д. з.). Вот примеры такого рода:

$$a^3-b^3 \quad \text{и} \quad (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} \quad \text{и} \quad |a+b|,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}.$$

В таких случаях говорят, что эти алгебраические выражения *тождественно равны* и пишут:

$$a^3-b^3 \equiv (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} \equiv |a+b|,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \equiv \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

(часто вместо знака $\equiv$ тождественного равенства употребляют просто знак равенства $=$).

В некоторых случаях о. д. з. двух алгебраических выражений могут различаться, но выражения все же равны при всех значениях буквенных параметров, при которых они оба определены. Таковы выражения

$$\frac{a^2-1}{a-1} \quad \text{и} \quad a+1,$$

$$\frac{a(a+1)}{a} \quad \text{и} \quad \frac{a^2-1}{a-1}.$$

В первом случае левое выражение не определено при $a=1$ (а правое определено). Во втором случае левое выражение не имеет смысла при $a=0$, а правое — при $a=1$, в остальных же случаях они равны. В таких случаях равенства

$$\frac{a^2-1}{a-1}=a+1, \qquad \frac{a(a+1)}{a}=\frac{a^2-1}{a-1}$$

также часто называют тождественными, подразумевая при этом, что буквенные параметры принимают только значения, при которых имеют смысл оба выражения. Вообще, во избежание неясности лучше говорить так: «данные выражения тождественно равны при значениях буквенных параметров. . .», указывая область изменения этих параметров, в которой оба выражения принимают равные значения. Так, например, мы называем равенство

$$|a|^2=a^2$$

тождеством, подразумевая, что a — действительное число. При комплексном a это равенство уже не будет тождеством. Можно сказать, что равенство

$$\sqrt{a^2}=a$$

удовлетворяется тождественно для всех неотрицательных a (оно не будет тождеством, если рассматривать все действительные значения a).

Одним из основных навыков в области алгебры должно быть умение переходить от одного алгебраического выражения к другому, ему тождественному, более простому или удобному. Такой переход осуществляется с помощью *тождественных преобразований*. Практически при выполнении этих преобразований встречаются и случаи, когда происходят некоторые изменения о. д. з. На это всякий раз необходимо обращать внимание, так как иначе может быть допущена ошибка.

Например, при решении уравнения

$$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x-1}{x}=1$$

«тождественное» преобразование левой части

$$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x-1}{x}=x+\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}=x+1 \qquad (19.2)$$

дало бы нам «решение» $x=0$ — значение, при котором исходное уравнение теряет смысл. Преобразование (19.2) изменяет о. д. з., и, выполняя его, следует исключить значение $x=0$.

Простейшие алгебраические выражения суть одночлены и многочлены. Следующие алгебраические выражения:

$$3a^2bx, \quad \sqrt{2}abc^3, \quad xz^2,$$

дают нам примеры одночленов. Вообще, *одночленом* называют выражение, получаемое при умножении числового множителя (*коэффициента*) на один или несколько буквенных сомножителей. Обычно при этом буквенные сомножители располагают в порядке алфавита, одинаковые сомножители объединяют вместе, пользуясь знаком возведения в степень:

$$abaxbz=a^2b^2xz.$$

Произведение нескольких одночленов также есть одночлен.

Многочленом (*полиномом*) называют алгебраическое выражение, представленное как алгебраическая сумма нескольких одночленов, например:

$$3ax-2by+ax+cz^2, \quad ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+ac^2+a^2c. \qquad (19.3)$$

Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом, называют *подобными*; так, в записи первого многочлена в (19.3) подобны одночлены $3ax$ и ax; такие одночлены можно объединить в один одночлен: $3ax+ax=4ax$. При записи многочлена следует произвести это действие, называемое *приведением подобных членов*.

Сумма двух многочленов сама непосредственно является многочленом (в ней следует лишь привести подобные члены). Сформулируем также известные правила умножения одночлена на многочлен и умножения двух многочленов.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, следует умножить на этот одночлен каждый член многочлена; чтобы умножить многочлен на многочлен, следует умножить каждый из одночленов, входящих в запись одного многочлена, на каждый из одночленов второго многочлена (и взять сумму полученных одночленов с учетом правила знаков).

Оба правила вытекают из применения распределительного закона умножения относительно сложения (1.6).

Пример 2. $2ab(a^2+ab+b^2)=2a^3b+2a^2b^2+2ab^3$.

Пример 3. $(ab-2a-2b)(a+b)=a^2b+ab^2-2a^2-2ab-2ab-2b^2=a^2b+ab^2-2a^2-4ab-2b^2$.

20. Формулы сокращенного умножения. В некоторых часто встречающихся случаях применяют *формулы сокращенного умножения* двух многочленов; напомним эти формулы.

а) Квадрат суммы и квадрат разности. Квадрат двучлена (бинома) $a+b$ можно записать в виде

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b).$$

На основании правила умножения многочленов можно раскрыть стоящие справа скобки, а именно каждый член первого бинома умножить на каждый член второго бинома и результаты сложить. Получим

$$(a+b)^2=a^2+ba+ab+b^2,$$

или после приведения подобных членов

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad (20.1)$$

Формулу (20.1) иногда записывают в виде

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab. \qquad (20.2)$$

Заменив в формуле (20.1) (или (20.2)) b на $-b$, получим, соответственно, формулы для квадрата разности:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \qquad (20.3)$$

или

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab. \qquad (20.4)$$

Формула (20.2) для квадрата двучлена (бинома) распространяется на случай, когда в квадрат возводится любой многочлен (полином). Покажем это для случая трехчлена. Имеем

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c=\\&=a^2+b^2+2ab+c^2+2ac+2bc=\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc. \qquad (20.5)\end{aligned}$$

Вообще, *квадрат алгебраической суммы нескольких слагаемых равен сумме квадратов этих слагаемых плюс сумма удвоенных попарных произведений этих слагаемых* (с учетом правила знаков!).

Пример. Раскрыть скобки в выражении $(2-3x-5x^2+x^3)^2$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}(2-3x-5x^2+x^3)^2&=2^2+(-3x)^2+(-5x^2)^2+(x^3)^2+\\&+2\cdot 2\cdot(-3x)+2\cdot 2\cdot(-5x^2)+2\cdot 2\cdot x^3+2\cdot(-3x)\cdot(-5x^2)+\\&+2\cdot(-3x)\cdot x^3+2\cdot(-5x^2)\cdot x^3=4+9x^2+25x^4+x^6-12x-20x^2+\\&+4x^3+30x^3-6x^4-10x^5.\end{aligned}$$

После приведения подобных членов запишем ответ:

$$(2-3x-5x^2+x^3)^2=4-12x-11x^2+34x^3+19x^4-10x^5+x^6.$$

б) Куб суммы и куб разности. Чтобы вывести формулу для $(a+b)^3$, заметим, что

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b).$$

Но выражение для $(a+b)^2$ уже найдено — (20.2); поэтому

$$(a+b)^3=(a^2+b^2+2ab)(a+b).$$

Перемножая почленно многочлены, стоящие в правой части этого равенства, получим

$$(a+b)^3=a^3+b^2a+2a^2b+2ab^2+a^2b+b^3.$$

Последний результат можно переписать так:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (20.6)$$

Заменив в формуле куба суммы (20.6) b через $-b$, напишем формулу куба разности:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (20.7)$$

В некоторых случаях формулам (20.6) и (20.7) удобней придать следующий вид:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b), \qquad (20.8)$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b). \qquad (20.9)$$

в) Разность квадратов. Следующая формула:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, \qquad (20.10)$$

легко проверяется умножением двучленов в ее левой части.

г) Сумма и разность кубов. Также рекомендуется проверить самостоятельно следующие формулы:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3, \qquad (20.11)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \qquad (20.12)$$

Трехчлены a^2-ab+b^2 и a^2+ab+b^2 в левых частях равенств (20.11), (20.12) часто называют «неполным квадратом» разности или суммы соответственно.

21. Бином Ньютона. Под биномом Ньютона понимают формулу, дающую выражение степени $(a+b)^n$ двучлена $a+b$ с любым натуральным показателем n. Мы можем записать выражения $(a+b)^n$ при $n=1$, 2, 3 (используя формулы п. 20 для квадрата и куба суммы):

$$(a+b)^1=a+b,$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Можно подметить некоторую закономерность: при возведении бинома в степень n в правой части формулы получается сумма $n+1$ слагаемых; каждое слагаемое содержит множители a и b в степенях, сумма показателей которых равна степени бинома. Для произвольного натурального n мы можем получить в правой части равенства, выражающего $(a+b)^n$, слагаемые вида a^n, $a^{n-1}b$,

$a^{n-2}b^2$, ..., b^n с некоторыми числовыми коэффициентами. Найдем еще $(a+b)^4$, проводя вычисление по некоторой удобной схеме. Именно, запишем

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = \\ &= a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+ \\ &+ b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = \\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \qquad (21.1)\end{aligned}$$

Мы провели вычисление таким образом, чтобы подобные члены оказались записанными один под другим. Теперь видно, что коэффициенты формулы (21.1): 1, 4, 6, 4, 1 получаются из коэффициентов формулы для куба суммы следующим путем: записываем коэффициенты формулы для $(a+b)^3$ в две строки со сдвигом нижней строки вправо:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 3 & 1 & - \\ - & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

и складываем числа, подписанные одно под другим:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

при этом и получатся коэффициенты формулы (21.1). Совершенно аналогично, для получения коэффициентов формулы, выражающей $(a+b)^5$, пишем

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & - \\ - & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Теперь сама формула для пятой степени суммы напишется в виде

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5. \qquad (21.2)$$

Можно весь этот процесс представить с помощью *треугольника Паскаля:*

	коэффициенты
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1

Каждая строка этой таблицы (за исключением первой) начинается и заканчивается единицей, любой другой элемент строки равен сумме соседних с ним элементов строки, расположенной над ней. Таким образом, таблица заполняется сверху вниз. Так, например, строка при $n=5$ получается из строки при $n=4$ по схеме:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

а строка при $n=6$ — из строки при $n=5$ аналогично по схеме

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

К сожалению, по указанной схеме неудобно находить коэффициенты в формуле для $(a+b)^n$ при больших значениях n, так как получить, например,

десятую строку можно, лишь продолжив таблицу коэффициентов до десятой строки. Можно указать и общую формулу для любого из коэффициентов в выражении $(a+b)^n$. Эту формулу мы сообщим здесь без вывода, она может быть доказана по индукции.

Первые два коэффициента при a^n и $a^{n-1}b$ в разложении $(a+b)^n$ суть 1 и n; следующий коэффициент при $a^{n-2}b^2$ может быть получен по формуле $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, следующий — при $a^{n-3}b^3$ — по формуле $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д. Вообще, коэффициент при $a^{n-k}b^k$ в выражении $(a+b)^n$ равен

$$\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1\cdot 2\ \dots\ k}. \tag{21.3}$$

Здесь в числителе пишется произведение k последовательных чисел, начиная от n, расположенных в порядке убывания. В знаменателе, напротив, сомножители $1, 2, \dots, k$ располагаются, начиная от единицы, в порядке возрастания. Найдем по этому правилу коэффициенты для $(a+b)^6$:

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5+$$
$$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}b^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6. \tag{21.4}$$

Отметим, что коэффициенты симметрично расположенных (от конца и начала) членов всегда оказываются равными.

В общем виде можно записать формулу так:

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ \dots$$
$$\dots+\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1\cdot 2\ \dots\ k}a^{n-k}b^k+\dots+b^n. \tag{21.5}$$

Эта формула называется *формулой бинома Ньютона.*

Пример 1. Раскрыть выражение $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^5$.

Решение. По формуле бинома Ньютона находим

$$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^5 = 32x^{10}+5\cdot 16x^8\cdot\frac{1}{x}+10\cdot 8x^6\cdot\frac{1}{x^2}+10\cdot 4x^4\cdot\frac{1}{x^3}+$$
$$+5\cdot 2x^2\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5} = 32x^{10}+80x^7+80x^4+40x+\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^5}.$$

Пример 2. Найти член бинома $\left(a+\frac{1}{2\sqrt[3]{a}}\right)^{17}$, содержащий a в степени 35/3.

Решение. Член бинома с номером k (считая от начала) содержит произведение

$$a^{17-k+1}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{a}}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}a^{17-k+1-\frac{1}{3}(k-1)};$$

из условия задачи имеем $17-k+1-\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}=\frac{35}{3}$, откуда $k=5$. Поэтому требуется написать член бинома с номером 5:

$$\frac{17\cdot 16\cdot 15\ 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot a^{13}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{a}}\right)^4 =$$
$$=\frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{16}a^{11}\sqrt[3]{a^2}=\frac{7\cdot 13\cdot 17}{4}a^{11}\sqrt[3]{a^2}.$$

22. Разложение многочлена на множители. В некоторых случаях данный многочлен может быть представлен как произведение одночлена на многочлен или как произведение двух многочленов. В первом случае говорят, что за знак скобок можно вынести общий множитель, во втором,— что многочлен разлагается на множители. Нам известны некоторые приемы разложения многочлена на множители, в том числе метод группировки и применение формул сокращенного умножения. Ограничимся разбором нескольких типичных примеров (общего универсального метода, чтобы узнать, разлагается ли многочлен на множители и найти их, не имеется).

Пример 1. Разложить на множители $x^2+2xy+2yz-z^2$.

Решение. Производим группировку слагаемых:

$$(x^2-z^2)+(2xy+2yz)=(x+z)(x-z)+2y(x+z)=$$
$$=(x+z)(x-z+2y).$$

Мы применили здесь формулу разности квадратов (20.10) и прием вынесения общего множителя за скобку.

Пример 2. Разложить на множители:

а) $x^4+x^2y^2+y^4$; б) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

Решение. а) Добавим и вычтем выражение x^2y^2; тогда получим

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

(применены формулы квадрата суммы (20.1), а затем разности квадратов (20.10)). Окончательно:

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy).$$

б) Добавим к нашему выражению и вычтем выражение $3ab(a+b)$, чтобы получить куб суммы по формуле (20.8):

$$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3abc-3ab(a+b)=$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(c+a+b)=$$
$$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)=$$
$$=[(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)]=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

В некоторых случаях разложение на множители не удается в действительной области, но может быть осуществлено в комплексной области. Так, например, a^2+b^2 нельзя разложить на действительные множители, но

$$a^2+b^2=a^2-(bi)^2=(a+bi)(a-bi).$$

Сумма четвертых степеней a^4+b^4 может быть разложена на множители так:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2i)(a^2-b^2i),$$

но она же разлагается и на действительные множители:

$$a^4+b^4=a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}ab)^2=$$
$$=(a^2+b^2+ab\sqrt{2})(a^2+b^2-ab\sqrt{2}).$$

23. Дробные алгебраические выражения. Алгебраическое выражение в записи которого наряду с действиями сложения, вычитания и умножения используют также деление на буквенные выражения, называется *дробным алгебраическим выражением*. Таковы, например, выражения

$$a+\frac{1}{a}-2;\quad \frac{x}{x+1}-\frac{x^2}{x-1};\quad \frac{x^2+ax+a^2}{(x-a)^2}. \tag{23.1}$$

Алгебраической дробью мы называем алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений (например, одночленов или многочленов). Таковы, например, выражения

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2};\quad \frac{6abx}{ab+ax+bx};\quad \frac{ab}{4cd}$$

(и третье из выражений (23.1)).

Тождественные преобразования дробных алгебраических выражений имеют по большей части своей целью представить их в виде алгебраической дроби. Для отыскания общего знаменателя используется разложение на множители знаменателей дробей — слагаемых — с целью отыскания их наименьшего общего кратного. При сокращении алгебраических дробей может нарушаться строгая тождественность выражений: необходимо исключать значения величин, при которых множитель, на который производится сокращение, обращается в нуль.

Приведем примеры тождественных преобразований дробных алгебраических выражений.

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{2x^2}{x^2-a^2}+\frac{a}{x+a}+\frac{x}{a-x}.$$

Решение. Все слагаемые можно привести к общему знаменателю x^2-a^2 (удобно при этом изменить знак в знаменателе последнего слагаемого и знак перед ним):

$$\frac{2x^2}{x^2-a^2}+\frac{a}{x+a}+\frac{x}{a-x}=\frac{2x^2}{x^2-a^2}+\frac{a(x-a)}{x^2-a^2}-\frac{x(x+a)}{x^2-a^2}=$$
$$=\frac{2x^2+ax-a^2-x^2-ax}{x^2-a^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2-a^2}=1.$$

Наше выражение равно единице при всех значениях x, кроме $x=a$ и $x=-a$ (при этих значениях оно не определено и сокращение дроби $\frac{x^2-a^2}{x^2-a^2}$ незаконно).

Пример 2. Представить в виде алгебраической дроби выражение

$$\frac{b^2}{a(a+b)}+\frac{ab}{a^2-ab+b^2}+\frac{b^3-a^2b+a^3}{a^3+b^3}.$$

Решение. За общий знаменатель можно принять выражение $a(a^3+b^3)$. Находим последовательно:

$$\frac{b^2}{a(a+b)}+\frac{ab}{a^2-ab+b^2}+\frac{b^3-a^2b+a^3}{a^3+b^3}=$$
$$=\frac{b^2(a^2-ab+b^2)+aba(a+b)+a(b^3-a^2b+a^3)}{a(a^3+b^3)}=\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a(a^3+b^3)}=\frac{(a^2+b^2)^2}{a(a^3+b^3)}.$$

Упражнения

1. Найти значения алгебраических выражений при указанных значениях параметров:

а) $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}$ при $m=2,\ n=1$;

б) $\dfrac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q+r}}{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q+r}}\left(1+\dfrac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right):\dfrac{p-q-r}{pqr}$ при $p={}^3/_2,\ q=1,\ r={}^3/_2$.

2. Разложить на множители:

а) $x^2+xy+x-y-2$; б) $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc$.

3. Раскрыть скобки в выражении $(5x^2+4x-3)^2$.

4. Найти разложение степени бинома $\left(a^2+\dfrac{1}{2a}\right)^5$.

5. Вычислить, пользуясь формулой бинома Ньютона, степени комплексных чисел: а) $(-1+2i)^3$; б) $(-3-2i)^5$.

6. В разложении $\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}+\sqrt[10]{\dfrac{p^7}{q^3}}\right)^n$ имеется член, подобный pq; найти n и этот член.

7. Упростить следующие рациональные алгебраические выражения:

а) $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; б) $(z^2-2)(z^2+2)+(z^2+1)^2-(z^2-1)^2+8$;

в) $\dfrac{a^6-b^6}{a^2-b^2}-\dfrac{a^6+b^6}{a^2+b^2}$; г) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)[(x-y)^2+xy]+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)[(x+y)^2-xy]$;

д) $\dfrac{(2m-3n)(2m+3n)+(3m-2n)(3m+2n)}{13(m-n)}$.

§ 2. Иррациональные алгебраические выражения

24. Радикалы из алгебраических выражений. Алгебраические выражения, в записи которых используются не только четыре рациональных действия, но также знаки радикала (из буквенных выражений), мы называем *иррациональными алгебраическими*

выражениями. Таковы, например, выражения

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}}+\sqrt{\frac{a+1}{a}};\quad \frac{ab(x+y)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}};\quad \sqrt{a+\sqrt{b-2x}}.$$

При определении о. д. з. иррациональных алгебраических выражений следует учитывать, что выражения, находящиеся под знаком радикала четной степени, не должны быть отрицательными. При отыскании числовых значений выражения при данных буквенных значениях параметров корни четной степени понимаются в арифметическом смысле.

Пример 1. Найти о. д. з. выражения

$$\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+4a}$$

и его значение при $x=5$, $a=1$.

Решение. О. д. з. определяем из условий $2x-a\geqslant 0$, $x+4a\geqslant 0$. Находим, что о. д. з. определяется неравенствами $x\geqslant a/2$, $x\geqslant -4a$. При вычислении значения в заданной точке $x=5$, $a=1$ получаем

$$\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+4a}\,\Big|_{\substack{x=5\\ a=1}}=\sqrt{10-1}+\sqrt{5+4}=3+3=6.$$

При преобразовании иррациональных алгебраических выражений используются все правила действий с корнями (гл. I, § 2). Рассмотрим сначала возможные упрощения выражения типа «корень из одночлена» или «корень из частного двух одночленов». Будем говорить, что корень приведен к простейшей форме, если: 1) он не содержит иррациональности в знаменателе, 2) в нем нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения и, наконец, 3) все возможные множители вынесены из-под корня. Всякий данный корень может быть приведен к простейшей форме, т. е. заменен тождественно равным ему, но таким, который отвечает всем трем перечисленным условиям.

Пример 2. Привести к простейшей форме следующие корни ($a>0$, $b>0$):

а) $\sqrt[6]{a^9b^{15}}$; б) $\sqrt[10]{\frac{a^{16}}{b^2}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{256a^2b^{14}}}$.

Решение. а) Сокращаем на 3 показатель корня и показатель степеней каждого из сомножителей подкоренного выражения

$$\sqrt[6]{a^9b^{15}}=\sqrt{a^3b^5}.$$

Выносим из-под знака корня множители a и b^2:

$$\sqrt[6]{a^9b^{15}}=ab^2\sqrt{ab}.$$

б) $\sqrt[10]{\frac{a^{16}}{b^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^8}{b}}=\sqrt[5]{\frac{a^5a^3b^4}{b^5}}=\frac{a}{b}\sqrt[5]{a^3b^4}$;

в) $\sqrt{\sqrt[3]{256a^2b^{14}}} = \sqrt[6]{2^8a^2b^{14}} = \sqrt[3]{2^4ab^7} =$

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2ab^6b} = 2b^2\sqrt[3]{2ab}\,.$$

Корни, простейшие формы которых отличаются, быть может, лишь коэффициентами (числовыми или буквенными), принято называть *подобными*. Например, корни $\sqrt[8]{a^2b^6}$ и $\sqrt[4]{\frac{81a^5}{b}}$ подобны, так как $\sqrt[8]{a^2b^6} = \sqrt[4]{ab^3}$, $\sqrt[4]{\frac{81a^5}{b}} = 3a\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{3a}{b}\sqrt[4]{ab^3}$, а корни $\sqrt{a^3b}$ и $\sqrt{a^4b^3}$ не подобны, так как $\sqrt{a^3b} = a\sqrt{ab}$, а $\sqrt{a^4b^3} = a^2b\sqrt{b}$.

При сложении и вычитании подобных корней все они приводятся к простейшей форме, а затем корень выносится за скобки.

Пример 3. Произвести указанные действия:

$$\sqrt[4]{81a^5b} - \sqrt[8]{256a^2b^{10}} - \sqrt{a^2b\sqrt{\frac{a}{b}}}, \quad a \geqslant 0, \quad b > 0.$$

Решение. Приведем каждый из корней к простейшей форме:

$$\sqrt[4]{81a^5b} = 3a\sqrt[4]{ab}, \quad \sqrt[8]{256a^2b^{10}} = \sqrt[4]{16ab^5} = 2b\sqrt[4]{ab},$$

$$\sqrt{a^2b\sqrt{\frac{a}{b}}} = a\sqrt{\sqrt{ab}} = a\sqrt[4]{ab}.$$

Теперь находим (все корни оказались подобными)

$$\sqrt[4]{81a^5b} - \sqrt[8]{256a^2b^{10}} - \sqrt{a^2b\sqrt{\frac{a}{b}}} = 3a\sqrt[4]{ab} - 2b\sqrt[4]{ab} - a\sqrt[4]{ab} =$$

$$= (3a - 2b - a)\sqrt[4]{ab} = 2(a - b)\sqrt[4]{ab}\,.$$

При вынесении сомножителей из-под знака корня четной степени необходимо помнить, что корень понимается в арифметическом смысле. Так, если знаки a, b не указаны, то следует писать не $\sqrt{a^3b^5} = ab^2\sqrt{ab}$, а $\sqrt{a^3b^5} = |a|\,b^2\sqrt{ab}$. Здесь о. д. з. состоит не только из значений $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, но и из значений $a < 0$, $b < 0$. Поэтому

$$\sqrt{a^3b^5} = |a|\,b^2\sqrt{ab} = \begin{cases} ab^2\sqrt{ab} & (a \geqslant 0), \\ -ab^2\sqrt{ab} & (a < 0). \end{cases}$$

Пример 4. Упростить выражение

$$\sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2} - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Находим

$$\sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2} - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2} =$$

$$= \sqrt{(x + 2y)^2} - \sqrt{(x - 2y)^2} = x + 2y - |x - 2y|.$$

Возможны следующие случаи:

1) $x \geqslant 2y$; тогда $x+2y-|x-2y|=x+2y-x+2y=4y$,

2) $x<2y$; тогда $x+2y-|x-2y|=x+2y+x-2y=2x$.

Итак,

$$\sqrt{x^2+4xy+4y^2}-\sqrt{x^2-4xy+4y^2}=\begin{cases} 4y & (x \geqslant 2y \geqslant 0), \\ 2x & (2y \geqslant x \geqslant 0). \end{cases}$$

Если не предполагать заранее, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то решение примера еще усложнится, так как придется записать ответ в общей форме:

$$\sqrt{x^2+4xy+4y^2}-\sqrt{x^2-4xy+4y^2}=|x+2y|-|x-2y|,$$

и затем разбирать четыре возможных случая: 1) $x+2y \geqslant 0$, $x-2y \geqslant 0$; 2) $x+2y \geqslant 0$, $x-2y<0$; 3) $x+2y<0$, $x-2y \geqslant 0$; 4) $x+2y<0$, $x-2y<0$. Предоставляем завершить этот разбор читателю.

В примере, который мы сейчас решали, подкоренные выражения представлялись как точные квадраты некоторых двухчленов очевидным способом. В некоторых случаях такое представление подкоренного выражения производится не столь очевидным образом. Так, иногда можно упростить радикалы вида

$$\sqrt{A+B\sqrt{C}},$$

записав $A+B\sqrt{C}$ в виде точного квадрата.

Пример 5. Упростить выражение

$$\sqrt{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Подкоренное выражение перепишем в виде

$$2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}=x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}+x^2=(\sqrt{x^2-1}+x)^2.$$

Теперь имеем

$$\sqrt{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}=|x+\sqrt{x^2-1}|.$$

О. д. з. нашего выражения состоит из интервалов $1 \leqslant x<\infty$, $-\infty<x \leqslant -1$. Нетрудно заметить, что $x+\sqrt{x^2-1}>0$ при $x \geqslant 1$, а при $x \leqslant -1$ $x+\sqrt{x^2-1}<0$. Поэтому окончательно имеем

$$\sqrt{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} & (x \geqslant 1), \\ -x-\sqrt{x^2-1} & (x \leqslant -1). \end{cases}$$

Пример 6. Упростить числовые выражения:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$.

Решение. 1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$;

2) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}=\sqrt{3}+1$.

В последнем случае удается записать подкоренное выражение как точный куб.

25. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. При преобразовании дробного алгебраического выражения, в знаменателе которого записано иррациональное выражение, обычно стремятся представить дробь так, чтобы ее знаменатель был рациональным. Если A, B, C, D, ... — некоторые алгебраические выражения, то можно указать правила, с помощью которых можно освободиться от знаков радикала в знаменателе выражений вида

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B}},\quad \frac{A}{B+C\sqrt{D}},\quad \frac{A}{\sqrt{B}+C\sqrt{D}},\quad \frac{A}{\sqrt[3]{B}\pm\sqrt[3]{C}}\quad \text{и т. д.}$$

Во всех этих случаях освобождение от иррациональности производится умножением числителя и знаменателя дроби на множитель, выбранный так, чтобы его произведение на знаменатель дроби было рациональным.

1) Для освобождения от иррациональности в знаменателе дроби вида $A/\sqrt[n]{B}$ умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt[n]{B^{n-1}}$.

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B}\sqrt[n]{B^{n-1}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-1}}}{B}.$$

Пример 1. $\dfrac{4a^2b}{\sqrt[3]{2ac}}=\dfrac{4a^2b\sqrt[3]{4a^2c^2}}{2ac}=\dfrac{2ab}{c}\sqrt[3]{4a^2c^2}$.

2) В случае дробей вида $\dfrac{A}{B+C\sqrt{D}}$, $\dfrac{A}{\sqrt{B}+C\sqrt{D}}$ умножаем числитель и знаменатель на иррациональный множитель

$$B-C\sqrt{D}\quad\text{или}\quad\sqrt{B}-C\sqrt{D}$$

соответственно, т. е. на *сопряженное иррациональное выражение.*

Смысл последнего действия состоит в том, что в знаменателе произведение суммы на разность преобразуется в разность квадратов, которая уже будет рациональным выражением.

Пример 2. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения:

а) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Решение. а) Умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2+y^2}-x$. Получаем (при условии, что $y\neq 0$)

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=\frac{xy\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{(x^2+y^2)-x^2}=\frac{x}{y}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right);$$

б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

3) В случае выражений типа

$$\frac{A}{B \pm C\sqrt[3]{D}}, \quad \frac{A}{\sqrt[3]{B} \pm C\sqrt[3]{D}}$$

знаменатель рассматривается как сумма (разность) и умножается на неполный квадрат разности (суммы), чтобы получить сумму (разность) кубов ((20.11), (20.12)). На тот же множитель умножается и числитель.

Пример 3. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражений:

а) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}+1}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}$.

Решение. а) Рассматривая знаменатель данной дроби как сумму чисел $\sqrt[3]{5}$ и 1, умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат разности этих чисел:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}+1} = \frac{3\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}+1\right)\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1\right)} = \frac{3\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+1},$$

или окончательно:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}+1} = \frac{3\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1\right)}{6} = \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}{2};$$

б) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(2\sqrt[3]{b}\right)^3} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}{a-8b}.$$

В некоторых случаях требуется выполнить преобразование противоположного характера: освободить дробь от иррациональности в числителе. Оно проводится совершенно аналогично.

Пример 4. Освободиться от иррациональности в числителе дроби $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{2b}$.

Решение. $$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{2b} = \frac{(a+b)-(a-b)}{2b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}.$$

Упражнения

1. Упростить выражения:

а) $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}}$, рассмотрев два случая: 1) $x > 0$ и 2) $x < 0$;

б) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}}-3\sqrt[3]{3\sqrt{5}-8}\right)\sqrt[3]{8+3\sqrt{5}}}{2\sqrt[3]{57}}\times$

$$\times\left(\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}}+\frac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}\right).$$

2. Найти значение выражения: $z^3-a^{-2/3}b^{-1}(a^2+b^2)z+b^{1/2}$ при $z=a^{2/3}b^{-1/2}$, где $a>0$ и $b>0$.

3. Освободить от иррациональности в знаменателе следующие выражения:

а) $\dfrac{2a-1}{\sqrt{a^2+1}+a}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$.

Глава III

ЛОГАРИФМЫ

§ 1. Логарифмы по произвольному основанию

26. Определение и свойства логарифмов. В соотношении

$$a^x = N$$

может быть поставлена задача отыскания любого из трех чисел a, N, x по двум другим, заданным. Если даны a и x, то N находят действием возведения в степень. Если даны N и x, то a находят извлечением корня степени x (или возведением в степень $1/x$). Теперь рассмотрим случай, когда по заданным a и N требуется найти x.

Пусть число N положительно: $N > 0$, число a положительно и не равно единице: $a > 0$, $a \neq 1$.

Определение. *Логарифмом числа N по основанию a* называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить число N; логарифм обозначается через $\log_a N$:

$$a^{\log_a N} = N. \tag{26.1}$$

Таким образом, в равенстве (26.1) показатель степени x находят как логарифм N по основанию a. Записи

$$a^x = N \quad \text{и} \quad x = \log_a N \tag{26.2}$$

имеют одинаковый смысл. Равенство (26.1) иногда называют основным тождеством теории логарифмов; в действительности оно выражает определение понятия логарифма. По данному определению *основание логарифма a всегда положительно и отлично от единицы*; *логарифмируемое число N положительно*. Отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют. Можно доказать, что всякое число $N > 0$ при данном основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) имеет вполне определенный логарифм. Поэтому равенство $a^x = a^y$ влечет за собой $x = y$. Заметим, что здесь существенно условие $a \neq 1$, в противном случае вывод $x = y$ был бы не обоснован, так как равенство $1^x = 1^y$ верно при любых значениях x и y.

Пример 1. Найти $\log_2 \frac{1}{8}$.

Решение. Для получения числа $^1/_8$ следует возвести основание 2 в степень —3: $2^{-3} = 1/2^3 = {}^1/_8$. Поэтому $\log_2 \frac{1}{8} = -3$. Можно проводить записи при решении таких примеров в следующей форме:

$$2^x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3}, \qquad x = -3.$$

Пример 2. Найти $\log_{1/3} 9\sqrt[3]{3}$.

Решение. Имеем

$$9\sqrt[3]{3} = 3^2 \cdot 3^{1/3} = 3^{7/3} = ({}^1/_3)^{-7/3}; \qquad \log_{1/3} 9\sqrt[3]{3} = -{}^7/_3.$$

В примерах 1 и 2 мы легко находили искомый логарифм, представляя логарифмируемое число как степень основания с рациональным показателем. В общем случае, например для $\log_2 3$, $\log_3 5$ и т. д., этого сделать не удастся, так как логарифм имеет иррациональное значение. Обратим внимание на один связанный с этим утверждением вопрос. В п. 12 мы дали понятие о возможности определения любой действительной степени данного положительного числа. Это было необходимо для введения логарифмов, которые, вообще говоря, могут быть иррациональными числами.

Рассмотрим некоторые свойства логарифмов.

Свойство 1. *Если число и основание равны, то логарифм равен единице*, и, обратно, *если логарифм равен единице, то число и основание равны.*

Доказательство. Пусть $N = a$. По определению логарифма имеем $a^{\log_a a} = a = a^1$, откуда

$$\log_a a = 1. \tag{26.3}$$

Обратно, пусть $\log_a N = 1$. Тогда по определению $N = a^{\log_a N} = a^1 = a$.

Свойство 2. *Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.*

Доказательство. По определению логарифма $a^{\log_a 1} = 1 = a^0$ (нулевая степень любого положительного основания равна единице, см. (10.1)). Отсюда

$$\log_a 1 = 0, \tag{26.4}$$

что и требовалось доказать.

Верно и обратное утверждение: *если* $\log_a N = 0$, *то* $N = 1$. Действительно, имеем $N = a^{\log_a N} = a^0 = 1$.

Прежде чем сформулировать следующее свойство логарифмов, условимся говорить, что *два числа a и b лежат по одну сторону от третьего числа c*, если они оба либо больше c, либо меньше c. Если одно из этих чисел больше c, а другое меньше c, то будем говорить, что они *лежат по разные стороны от c.*

Свойство 3. *Если число и основание лежат по одну сторону от единицы, то логарифм положителен; если число и основание лежат по разные стороны от единицы, то логарифм отрицателен.*

Доказательство свойства 3 основано на том, что степень a^x больше единицы, если основание больше единицы и показатель положителен или основание меньше единицы и показатель отрицателен. Степень меньше единицы, если основание больше единицы и показатель отрицателен или основание меньше единицы и показатель положителен.

Требуется рассмотреть четыре случая:

$$\begin{array}{lll} a>1, & N>1, & (\log_a N>0); \\ a>1, & N<1, & (\log_a N<0); \\ a<1, & N>1, & (\log_a N<0); \\ a<1, & N<1, & (\log_a N>0). \end{array}$$

Ограничимся разбором первого из них, остальные читатель рассмотрит самостоятельно.

Пусть $a>1$, $N>1$; тогда в равенстве $a^{\log_a N}=N$ показатель степени не может быть ни отрицательным, ни равным нулю, следовательно, он положителен, т. е. $\log_a N>0$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Выяснить, какие из указанных ниже логарифмов положительны, какие отрицательны: а) $\log_{12} 15$; б) $\log_{1000} 2$; в) $\log_{3,1} 0,8$; г) $\log_{2/3} \frac{2}{7}$; д) $\log_{0,3} 2,1$.

Решение. а) $\log_{12} 15>0$, так как число 15 и основание 12 расположены по одну сторону от единицы;

б) $\log_{1000} 2>0$, так как 1000 и 2 расположены по одну сторону от единицы; при этом несущественно, что основание больше логарифмируемого числа;

в) $\log_{3,1} 0,8<0$, так как 3,1 и 0,8 лежат по разные стороны от единицы;

г) $\log_{2/3} \frac{2}{7}>0$; почему?

д) $\log_{0,3} 2,1<0$; почему?

Следующие свойства 4—6 часто называют правилами логарифмирования: они позволяют, зная логарифмы некоторых чисел, найти логарифмы их произведения, частного, степени каждого из них.

Свойство 4 (правило логарифмирования произведения). *Логарифм произведения нескольких положительных чисел по данному основанию равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию.*

Доказательство. Пусть даны положительные числа N_1, N_2, ..., N_k. Для логарифма их произведения напишем определяю-

щее логарифм равенство (26.1):

$$a^{\log_a N_1 N_2 \ldots N_k} = N_1 N_2 \ldots N_k.$$

Отсюда найдем

$$a^{\log_a N_1 N_2 \ldots N_k} = a^{\log_a N_1} a^{\log_a N_2} \ldots a^{\log_a N_k} = a^{\log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_k}.$$

Сравнив показатели степени первого и последнего выражений, получим требуемое равенство:

$$\log_a N_1 N_2 \ldots N_k = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_k. \qquad (26.5)$$

Заметим, что условие $N_1 > 0, \ldots, N_k > 0$ существенно; логарифм произведения двух отрицательных чисел $N_1 < 0$, $N_2 < 0$ имеет смысл, но в этом случае получим

$$\log_a (N_1 N_2) = \log_a [(-N_1)(-N_2)] = \log |N_1| \cdot |N_2| = \log_a |N_1| + \log_a |N_2|.$$

В общем случае, *если произведение нескольких сомножителей положительно, то его логарифм равен сумме логарифмов модулей этих сомножителей.*

Свойство 5 (правило логарифмирования частного). *Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию.*

Доказательство. Последовательно находим

$$a^{\log_a \frac{N_1}{N_2}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{a^{\log_a N_1}}{a^{\log_a N_2}} = a^{\log_a N_1 - \log_a N_2},$$

откуда

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2, \qquad (26.6)$$

что и требовалось доказать.

Свойство 6 (правило логарифмирования степени). *Логарифм степени какого-либо положительного числа равен логарифму этого числа, умноженному на показатель степени.*

Доказательство. Запишем снова основное тождество (26.1) для числа N^n:

$$a^{\log_a N^n} = N^n = \left(a^{\log_a N}\right)^n = a^{n \log_a N};$$

отсюда

$$\log_a N^n = n \log_a N, \qquad (26.7)$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня:*

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N. \qquad (26.8)$$

Доказать справедливость этого следствия можно, представив $\sqrt[n]{N}$ как $N^{1/n}$ и воспользовавшись свойством 6.

Пример 4. Прологарифмировать по основанию a:

а) $\sqrt[7]{\frac{b^2c^3}{d^4e^5}}$ (предполагается, что все величины b, c, d, e положительны);

б) $\sqrt[5]{\frac{(b+c)^2}{(d-e)^3}}$ (предполагается, что $b+c>0$ и $d-e>0$).

Решение. а) Удобно перейти в данном выражении к дробным степеням:

$$\sqrt[7]{\frac{b^2c^3}{d^4e^5}}=\frac{b^{2/7}c^{3/7}}{d^{4/7}e^{5/7}}.$$

На основании равенств (26.5)—(26.7) теперь можно записать:

$$\log_a\sqrt[7]{\frac{b^2c^3}{d^4e^5}}=\frac{2}{7}\log_a b+\frac{3}{7}\log_a c-\frac{4}{7}\log_a d-\frac{5}{7}\log_a e.$$

б) Имеем

$$\log_a\sqrt[5]{\frac{(b+c)^2}{(d-e)^3}}=\frac{2}{5}\log_a(b+c)-\frac{3}{5}\log_a(d-e).$$

Мы замечаем, что над логарифмами чисел производятся действия более простые, чем над самими числами: при умножении чисел их логарифмы складываются, при делении — вычитаются и т. д. Именно поэтому логарифмы получили применение в вычислительной практике (см. п. 29).

Действие, обратное логарифмированию, называется потенцированием, а именно: *потенцированием* называется действие, с помощью которого по данному логарифму числа находится само это число. По существу потенцирование не является каким-либо особым действием: оно сводится к возведению основания в степень (равную логарифму числа). Термин «потенцирование» можно считать синонимом термина «возведенение в степень».

При потенцировании надо пользоваться правилами, обратными по отношению к правилам логарифмирования: сумму логарифмов заменить логарифмом произведения, разность логарифмов — логарифмом частного и т. д. В частности, если перед знаком логарифма находится какой-либо множитель, то его при потенцировании нужно переносить в показатель степени под знак логарифма.

Пример 5. Найти N, если известно, что

$$\log_a N=\frac{2}{3}\log_a b-\frac{1}{3}\log_a c.$$

Решение. В связи с только что высказанным правилом потенцирования множители $^2/_3$ и $^1/_3$, стоящие перед знаками логарифмов в правой части данного равенства, перенесем в показатели степени под знаками этих логарифмов; получим

$$\log_a N=\log_a b^{2/3}-\log_a c^{1/3}.$$

Теперь разность логарифмов заменим логарифмом частного:

$$\log_a N = \log_a \frac{b^{2/3}}{c^{1/3}};$$

отсюда

$$N = \frac{b^{2/3}}{c^{1/3}} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{b^2c^2}}{c};$$

для получения последней дроби в этой цепочке равенств мы предыдущую дробь освободили от иррациональности в знаменателе (п. 25).

Свойство 7. *Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм (а меньшее — меньший); если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм (а меньшее — больший).*

Это свойство формулируют также и как правило логарифмирования неравенств, обе части которых положительны:

При логарифмировании неравенств по основанию, большему единицы, знак неравенства сохраняется, а при логарифмировании по основанию, меньшему единицы, знак неравенства меняется на противоположный (см. также п. 80).

Доказательство основано на свойствах 5 и 3. Рассмотрим случай, когда $a > 1$. Если $N > M > 0$, то $N/M > 1$ и, логарифмируя, получим

$$\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M > 0$$

(a и N/M лежат по одну сторону от единицы). Отсюда

$$\log_a N > \log_a M.$$

Случай $a < 1$, в котором из $N > M > 0$ следует $\log_a N < \log_a M$, читатель разберет самостоятельно.

27. Логарифмы по различным основаниям. Модуль перехода. Здесь мы установим некоторые свойства, относящиеся к логарифмам по различным основаниям. Для удобства продолжим нумерацию свойств п. 26.

Свойство 8. *При возведении основания в некоторую (ненулевую) степень логарифм делится на этот показатель степени:*

$$\log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N. \qquad (27.1)$$

Доказательство. Пользуясь основным тождеством (26.1), находим последовательно

$$N = (a^n)^{\log_{a^n} N} = a^{n \log_{a^n} N} \text{ и } N = a^{\log_a N},$$

откуда

$$a^{n \log_{a^n} N} = a^{\log_a N} \text{ и } n \log_{a^n} N = \log_a N,$$

т. е. $\log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N$, что и требовалось получить.

Следствие. *При возведении основания и числа в одну и ту же* (ненулевую) *степень логарифм не изменяется.*

Доказательство. Последовательно применяя свойства 8 и 6, находим

$$\log_{a^n} N^n = \frac{1}{n}\log_a N^n = \frac{1}{n} n \log_a N = \log_a N.$$

Пример 1. Выразить через логарифм по основанию 3:

$$\log_{1/3} 7 + 2\log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}.$$

Решение. Имеем

$$\log_{1/3} 7 + 2\log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7} = \log_{3^{-1}} 7 + 2\log_3 7 + \log_{3^{1/2}} 7 =$$
$$= -\log_3 7 + 2\log_3 7 + 2\log_3 7 = 3\log_3 7 = \log_3 343.$$

Пример 2. Вычислить $25^{1/2 + \log_{1/5} 27 + \log_{125} 81}$.

Решение. Перепишем данное выражение, сведя основания логарифмов к 5:

$$25^{1/2 - \log_5 3^3 + 1/3 \log_5 3^4} = 25^{1/2 + \log_5 3^{-5/3}} =$$
$$= 5^{1 + \log_5 3^{-10/3}} = 5 \cdot 3^{-10/3} = \frac{5}{27\sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{81}.$$

Свойство 9. *Если a, N положительны и оба не равны единице, то*

$$\log_a N \log_N a = 1. \qquad (27.2)$$

Доказательство. Напишем основное тождество

$$a^{\log_a N} = N$$

и прологарифмируем обе его части по основанию N (это возможно, так как $N \neq 1$, $N > 0$), применив свойства 4 и 1:

$$\log_a N \cdot \log_N a = \log_N N = 1.$$

Свойство 9 доказано.

Следующее важнейшее свойство дает общее правило перехода от логарифмов с основанием a к логарифмам с другим основанием b:

Свойство 10. *Имеет место следующее равенство*:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \qquad (27.3)$$

которое также в силу свойства 9 *пишут в виде*

$$\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a. \qquad (27.4)$$

Коэффициент $\frac{1}{\log_a b}$ в формуле (27.3) называют *модулем перехода* от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b.

Доказательство. Напишем снова основное тождество

$$b^{\log_b N} = N$$

и прологарифмируем обе его части по основанию a:

$$\log_b N \cdot \log_a b = \log_a N.$$

Отсюда прямо вытекает требуемое равенство (27.3).

Пример 3. Упростить выражение $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$.

Решение. В силу (27.4) и (27.2) имеем

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = \log_c a \cdot \log_a c = 1.$$

Упражнения

1. Найти:

а) $\log_5 25$; б) $\log_{\sqrt{2}} 64$; в) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[10]{a}$; г) $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$.

2. Найти a, если:

а) $\log_a 15 = -1$; б) $\log_a 8 = 2$; в) $\log_{1/a} 12 = 1/2$; г) $\log_{3\sqrt{a}} 10 = -1$; д) $\log_{a-2} 81 = -2$.

3. Найти N, если:

а) $\log_3 N = 3$; б) $\log_{1/2} N = -4$; в) $\log_{0,1} N = -2$; г) $\log_{121} N = 1/2$; д) $\log_{3\sqrt{3}} N = 4$; е) $\log_4 N = -0,5$.

4. Вычислить:

а) $8^{\log_{\sqrt{2}} 3}$; б) $729^{1/3 + \log_{81} 4}$.

5. Прологарифмировать:

а) $8\sqrt[3]{4}$ по основанию 2; б) $\sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt[5]{ab^4}$ $(a > 0,\ b > 0)$ по основанию 3; в) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\ \sqrt[5]{a} : \sqrt[4]{a}$ по основанию a.

6. Потенцированием найти N, если:

а) $\log_a N = \frac{1}{4}\log_a m - \frac{5}{8}\log_a n$; б) $\log_2 N = \frac{1}{3}\log_2 8 - 2\log_2 \sqrt{3}$.

7. Выразить в виде логарифма по основанию 2:

$$\log_4 a + \log_8 \sqrt[3]{a} + \log_{1/2} a\sqrt{a} + 1/\log_a 8.$$

8. Вычислить: $\log_{a^2} b / \log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b}$.

§ 2. Десятичные логарифмы

28. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. *Десятичным логарифмом* числа называется его логарифм по основанию 10. Кроме общего обозначения $\log_{10} N$ для десятичных логарифмов обычно применяют сокращенное обозначение $\lg N$.

Десятичные логарифмы широко применяются в приближенных вычислениях; в связи с этим имеются подробные и весьма точные таблицы десятичных логарифмов. Читателю известны четырехзначные таблицы В. М. Брадиса, применяемые при изучении лога-

рифмов в школьном курсе математики. Об использовании таблиц функций вообще говорится специально в п. 220.

Для пользования таблицами десятичных логарифмов и для их применения к приближенным вычислениям нам потребуются некоторые свойства и понятия, относящиеся к десятичным логарифмам.

Рассмотрим все числа вида 10^n, где n — целое число:

$$\ldots;\ 10^{-3}=0{,}001;\quad 10^{-2}=0{,}01;\quad 10^{-1}=0{,}1;\quad 10^0=1;\quad 10^1=10;\quad 10^2=100;\quad 10^3=1000;\ \ldots$$

Будем говорить, что эти числа *представляются единицей с нулями* (*с последующими нулями*, если $n>0$, и *с предшествующими нулями*, если $n<0$). Из определения логарифма видно, что эти числа имеют целые десятичные логарифмы: $\lg 10^n = n$. Удобно сформулировать следующее правило:

Десятичный логарифм числа, представляемого единицей с нулями, равен числу нулей в этом числе, если оно есть единица с последующими нулями, и числу нулей с противоположным знаком, если оно есть единица с предшествующими нулями.

Например:

$$\lg 0{,}0001 = -4,\quad \lg 0{,}01 = -2,\quad \lg 1000 = 3,\quad \lg 1\,000\,000 = 6.$$

Десятичный логарифм любого числа, не равного целой степени десяти, является числом дробным (вообще говоря, иррациональным).

Напомним, что всякое число (рациональное или иррациональное) однозначно разлагается на сумму своей целой части и дробной части (см. пп. 4, 6). При этом целой частью данного числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данного; дробная часть любого числа заключена между нулем и единицей:

$$3{,}176 = 3 + 0{,}176;\qquad -2{,}143 = -3 + 0{,}857 = \overline{3}{,}857.$$

Введем теперь следующее.

Определение. Для любого положительного числа целая часть десятичного логарифма называется *характеристикой*, а дробная часть — *мантиссой* этого логарифма.

Характеристику логарифма любого положительного числа можно найти точно, и делается это с помощью простого правила. Действительно, пусть дано число $N>0$; тогда можно указать такие две степени числа 10 с последовательными целыми показателями n и $n+1$, между которыми находится данное число N:

$$10^n \leqslant N < 10^{n+1}.$$

Прологарифмируем эти неравенства по основанию 10:

$$n \leqslant \lg N < n+1$$

в соответствии со свойством 5 логарифмов (п. 26). Отсюда следует, что целая часть, т. е. характеристика $\lg N$, равна n:

$\lg N = n$, ... Многоточием обозначены неизвестные десятичные знаки мантиссы, т. е. дробной части $\lg N$. При этом в случае $n < 0$ применяется искусственная форма записи $\lg N$ (п. 4).

Для формулировки соответствующего правила рассмотрим два случая: $N > 1$ и $N < 1$.

Пусть $N > 1$ (десятичный логарифм $\lg N$ в этом случае положителен). Обозначим через k число цифр в записи целой части N. Ясно, что в этом случае

$$10^{k-1} \leqslant N < 10^k. \qquad (28.1)$$

Например, для $N = 378{,}6$ (трехзначная целая часть)

$$10^2 \leqslant 378{,}6 < 10^3.$$

Логарифмируя неравенства (28.1), получаем

$$k-1 \leqslant \lg N < k \qquad (28.2)$$

и видим, что характеристика $\lg N$ равна $k-1$ (например, характеристика логарифма 378,6 равна 2).

Итак, *характеристика десятичного логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше количества цифр его целой части.*

Например:

$$\lg 3{,}524 = 0, \ \ldots; \quad \lg 47{,}01 = 1; \ \ldots, \quad \lg 936{,}3 = 2, \ \ldots$$

Пусть теперь положительное число N меньше единицы: $0 < N < 1$. Тогда $\lg N$ по свойству 4 из п. 26 будет отрицательным числом: числа N и 10 в рассматриваемом случае лежат по разные стороны от единицы.

Запись числа N начинается в этом случае с нуля целых; за этим нулем может следовать еще несколько нулей перед первой отличной от нуля цифрой числа. Если число нулей перед первой ненулевой цифрой (включая и нуль целых) равно l, то

$$10^{-l} \leqslant N < 10^{-(l-1)}. \qquad (28.3)$$

Например:

$$10^{-1} \leqslant 0{,}32 < 10^0 = 1,$$
$$10^{-2} \leqslant 0{,}032 < 10^{-1},$$
$$10^{-3} \leqslant 0{,}0032 < 10^{-2},$$

. . . .

Неравенства (28.3) показывают, что

$$-l \leqslant \lg N < -(l-1), \qquad (28.4)$$

т. е. характеристика логарифма $\lg N$ равна $-l$.

Итак, *характеристика десятичного логарифма положительного числа, меньшего единицы, равна взятому со знаком минус числу нулей в данном числе, предшествующих первой значащей цифре, включая и нуль целых.*

Например:

$$\lg 0{,}3052 = \bar{1}, \ \ldots; \quad \lg 0{,}0587 = \bar{2}, \ \ldots; \quad \lg 0{,}0096 = \bar{3}, \ \ldots$$

Мы выяснили, что характеристика десятичного логарифма числа определяется непосредственно по виду самого числа, если оно целое или представлено в виде десятичной дроби. Для определения характеристики, таким образом, не нужны никакие вычисления (и таблицы). Что же касается мантиссы, то она, как правило, берется из таблиц (например, из таблиц Брадиса). При этом следует пользоваться одним замечательным свойством мантиссы: *если в логарифмируемом числе перенести запятую на любое количество знаков влево или вправо, то мантисса десятичного логарифма от этого не изменится* (изменится только характеристика логарифма). В самом деле, перенести в числе запятую — это значит умножить его на некоторую целую (положительную или отрицательную) степень числа 10. Например, при переносе запятой на 2 знака вправо число умножится на $10^2 = 100$, а при переносе запятой на 2 знака влево оно умножится на $10^{-2} = 1/100$. Пусть

$$\lg N = n + m,$$

где n — характеристика, а m — мантисса этого логарифма. После переноса запятой в числе N на k знаков получится число $N \cdot 10^{\pm k}$ (верхний знак относится к случаю переноса запятой вправо, а нижний — к случаю переноса запятой влево). На основании правил логарифмирования (п. 25) имеем

$$\lg(N \cdot 10^{\pm k}) = \lg N \pm k \lg 10 = \lg N \pm k.$$

Но k — целое число, так что прибавление $\pm k$ к $\lg N$ может отразиться лишь на его характеристике:

$$\lg(N \cdot 10^{\pm k}) = n + m \pm k = (n \pm k) + m.$$

Из рассмотренного можно заключить, что если числа записаны с помощью одних и тех же и одинаково расположенных цифр и отличаются одно от другого только местоположением в них запятой, то десятичные логарифмы таких чисел имеют одну и ту же мантиссу (но, конечно, разные характеристики!). Таковы, например, числа 42,59, 4,259, 0,4259, 0,04259 и т. д.

В качестве примера найдем без таблиц разность $\lg 28{,}76 - \lg 0{,}002876$.

Логарифмы, из которых составлена данная разность, отличаются лишь характеристиками, а мантиссы у них одинаковы и при вычитании взаимно уничтожаются. Поэтому искомая разность логарифмов равна разности их характеристик: $\lg 28{,}76 - \lg 0{,}002876 = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$. Этот пример можно решить и так:

$$\lg 28{,}76 - \lg 0{,}002\,876 = \lg \frac{28{,}76}{0{,}002\,876} = \lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4.$$

29. Применение десятичных логарифмов к вычислениям. Как уже было указано выше, над логарифмами чисел производятся более простые действия, чем над самими числами: умножение заменяется сложением, деление — вычитанием, возведение в степень — умножением на показатель степени и т. д. В сочетании с наличием удобных таблиц десятичных логарифмов это позволяет широко использовать десятичные логарифмы для упрощения вычислений.

Пример 1. Вычислить с помощью таблиц: а) $0{,}37 \cdot 43{,}2 \cdot 0{,}94$; б) $1/\sqrt[5]{0{,}34^3}$.

Решение. а) Обозначим искомое число через x. С помощью правила логарифмирования произведения (26.5) найдем

$$\lg x = \lg 0{,}37 + \lg 43{,}2 + \lg 0{,}94.$$

Логарифмы в правой части равенства найдем по таблицам, запишем в столбец и сложим:

$$\begin{array}{r} \lg 0{,}37 = \bar{1}{,}5682 \\ +\lg 43{,}2 = 1{,}6355 \\ \lg 0{,}94 = \bar{1}{,}9731 \\ \hline \lg x = 1{,}1768. \end{array}$$

Дадим пояснение к тому, как получена характеристика: в конце действия сложения мантисс получаются две целых и одна десятая. Ясно, что одну десятую мы оставляем мантиссе — так определяется ее первая цифра, а две единицы отдаем характеристике: $\bar{1}+1+\bar{1}+2=1$. Теперь по найденному $\lg x$ из таблиц получаем $x=15{,}03$. Характеристика $\lg x$ оказалась равной 1, а она, как известно, на единицу меньше числа цифр в целой части логарифмируемого числа. Поэтому в числе 1503, взятом из таблиц, мы и отделили два знака целой части.

б) Используя правила логарифмирования степени и корня (п. 26), найдем

$$\begin{array}{r} \lg 0{,}34 = \bar{1}{,}5315 \\ \times 3 \\ \hline \bar{2}{,}5945 \\ :5 \\ \hline \bar{1}{,}7189. \end{array}$$

Мы получили $\lg \sqrt[5]{0{,}34^3}$. Характеристика $\bar{1}$ найдена так: в промежуточном результате характеристика $\bar{2}$ получилась от сложения $3 \cdot \bar{1} = \bar{3}$ и 1 (которая «набежала» от умножения первой цифры 5 мантиссы на 3); далее, число $\bar{2}$ на 5 не делится без остатка; поэтому к $\bar{2}$ мы прибавили $\bar{3}=-3$, а чтобы не изменить логарифма, тут же прибавили 3 к мантиссе.

Далее,

$$\begin{array}{r} \lg 1 = 0{,}0000 \\ \bar{1}{,}7189 \\ \hline \lg x = 0{,}2811, \end{array}$$

откуда $x = 1{,}911$.

Пользуясь десятичными логарифмами, можно также находить логарифмы чисел по произвольному основанию. Рассматривая свойства логарифмов, мы ввели в п. 26 понятие модуля перехода. Именно, модулем перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b названо число $\log_b a = 1/\log_a b$, являющееся множителем пропорциональности между логарифмами с основаниями a и b:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Если теперь положить здесь $a = 10$, то логарифм числа N по основанию b выразится через десятичные логарифмы чисел N и b:

$$\log_b N = \frac{\lg N}{\lg b}. \tag{29.1}$$

Итак, мы получили следующее правило: *для вычисления недесятичного логарифма по таблице десятичных логарифмов нужно десятичный логарифм данного числа разделить на десятичный логарифм данного основания.*

Число $1/\lg a$ является *модулем перехода* от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию 10 (к десятичным логарифмам).

Пример 2. Найти а) $\log_3 5{,}2$; б) $\log_{0,993} 7{,}98$.

Решение. а) В соответствии с формулой (29.1) запишем:

$$\log_3 5{,}2 = \frac{\lg 5{,}2}{\lg 3}.$$

Найдем $\lg 5{,}2$ и $\lg 3$ из таблиц Брадиса и получим

$$\log_3 5{,}2 = \frac{0{,}7160}{0{,}4771}.$$

Разделить у этой дроби числитель на знаменатель (чтобы получить ответ в виде десятичной дроби) можно «вручную», а можно опять-таки с помощью таблиц. Обозначим для этого

$$A = \frac{0{,}7160}{0{,}4771}.$$

Далее найдем

$$\begin{array}{r} \lg 0{,}7160 = \bar{1}{,}8549 \\ -\ \lg 0{,}4771 = \bar{1}{,}6786 \\ \hline \lg A = 0{,}1763. \end{array}$$

Отсюда $A = \log_3 5{,}2 = 1{,}501$.

б) Имеем

$$\log_{0,993} 7,98 = \frac{\lg 7,98}{\lg 0,993} = \frac{0,9020}{\bar{1},9969}.$$

Представим знаменатель этой дроби в естественной форме:

$$\bar{1},9969 = -1 + 0,9969 = -0,0031,$$

и, таким образом, найдем

$$\log_{0,993} 7,98 = -\frac{0,9020}{0,0031}$$

(отрицательность логарифма объясняется тем, что число 7,98 и основание 0,993 лежат по разные стороны от единицы (свойство 4 п.26)). Чтобы выполнить деление с помощью таблиц логарифмов, положим

$$B = |\log_{0,993} 7,98| = \frac{0,9020}{0,0031}.$$

Отсюда

$$\begin{array}{r} \lg 0,9020 = \bar{1},9552 \\ -\ \lg 0,0031 = \bar{3},4914 \\ \hline \lg B = 2,4638. \end{array}$$

Найдем теперь, что $B = 290,9$ и, следовательно,

$$\log_{0,993} 7,98 = -290,9.$$

Упражнения

1. Вычислить с помощью логарифмических таблиц:

а) $0,734 \cdot 0,0481 \cdot 2,54$; б) $\frac{11,32}{3,796} \cdot \frac{0,044}{0,57}$; в) $\frac{1}{5,821}$; г) $5,73^3 : 0,91^2$; д) $\frac{\sqrt[3]{58,11}}{\sqrt[5]{0,63}} \cdot 0,71^2$.

2. Найти:

а) $\log_2 3$; б) $\log_{0,54} 2,7$.

Глава IV

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. Общие сведения о функциях

30. Величина. Числовые множества. При изучении природы и в трудовой деятельности человеку приходится иметь дело с многими разнообразными *величинами*. К ним, в частности, относятся длина, площадь, температура, время, сила, скорость и т. д. Вообще под *величиной* обычно понимают объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения, т. е. в результате сравнения с объектом той же физической природы, принятым за единицу измерения.

В тех или иных физических процессах могут участвовать несколько величин, причем одни из них могут изменять свои числовые значения, а другие нет. Первые из них будем называть *переменными*, а вторые—*постоянными*, хотя такое разделение величин более или менее условно.

Для математики свойственно абстрагироваться от физической природы рассматриваемых величин; *величина* характеризуется множеством принимаемых ею числовых значений. Если это множество сводится к одному-единственному значению, то величина называется *постоянной*; если множество ее значений состоит более чем из одного элемента, то величина называется *переменной*. Здесь и дальше мы ограничим себя действительными величинами, множества значений которых состоят исключительно из действительных чисел.

Множество значений, принимаемых переменной величиной, называется ее *областью изменения*.

Приведем несколько примеров. Число сторон многоугольника может иметь значения 3, 4, 5, ... Частное от деления числа, не равного нулю, на модуль этого же числа может принимать только два значения. $+1$ и -1. Квадрат действительного числа может быть равен любому неотрицательному числу.

Вообще, область изменения переменной величины x может быть произвольным *числовым множеством*. Если величина принимает

только натуральные значения 1, 2, 3, ..., то ее называют *целочисленной переменной*. Часто приходится рассматривать переменные, множество значений которых представляет собой некоторый (конечный или бесконечный) *интервал* числовой оси.

Уточним в связи с этим понятие интервала (или промежутка).

Пусть a, b — два действительных числа, причем $a < b$. Тогда можно рассматривать следующие виды интервалов.

Открытым интервалом (a, b) называется множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, т. е. совокупность всех точек числовой оси, лежащих строго между точками a и b (концы исключаются). Интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$ длины $2h$ с серединой x_0 называется *окрестностью* (h-окрестностью) точки x_0.

Замкнутым интервалом или *сегментом* $[a, b]$ называется множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. совокупность всех точек, расположенных между a и b, включая a и b.

Иногда рассматриваются полуоткрытые интервалы $[a, b)$ и $(a, b]$, соответственно определяемые неравенствами $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$.

Бесконечный интервал (a, ∞) определяется как множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$; в случае неравенства $x \geqslant a$ бесконечный интервал обозначают $[a, \infty)$. Вся числовая ось также может рассматриваться как бесконечный интервал и обозначаться через $(-\infty, \infty)$.

31. Определение функции. Геометрия, механика, физика, различные области науки и техники дают нам множество примеров, когда рассматриваемые в том или ином вопросе переменные величины находятся в зависимости, так что значение одной из величин определяет значение другой. Площадь круга полностью определяется величиной его радиуса: $S = \pi R^2$. Скорость точки, движущейся равноускоренно, зависит от времени по закону $v = v_0 + at$. Давление идеального газа при постоянном объеме V_0 изменяется в зависимости от температуры: $P = RT/V_0$. Во всех указанных примерах, несмотря на различие смысла входящих в них величин, есть нечто общее: задание значения одной из двух рассматриваемых переменных величин определяет значение второй величины. Такого рода зависимости между двумя переменными называют *функциональными зависимостями*.

Сформулируем определение понятия *функции*: переменная y называется *функцией переменной* x, если каждому значению x (из некоторой области X изменения x) поставлено в соответствие по определенному закону значение y. При этом x называется *независимой переменной* (иногда *аргументом*), а область ее изменения X — *областью определения* (или *существования*) *функции* y. Множество значений, принимаемых y при изменении x, называется, как обычно, *областью изменения* y.

В принятом определении функции существенны два момента: во-первых, в нем указана область изменения X независимой переменной x, и, во-вторых, в нем требуется наличие определенного правила соответствия между y и x.

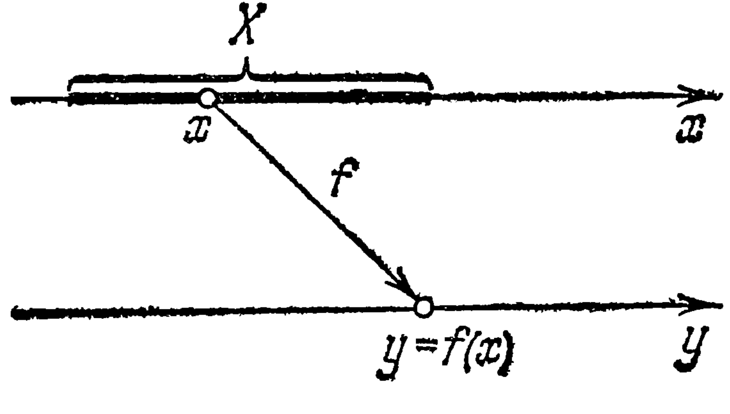


Рис. 11.

Тот факт, что y есть функция от x, выражают в записи так:

$$y=f(x)$$

(произносится: «игрек есть эф от икс»). Буквой f в этом равенстве обозначен именно *закон соответствия* между x и y.

Схематически можно изобразить это так: будем рассматривать две числовые оси x и y (рис. 11); пусть X — область определения функции $y=f(x)$. Каждой точке x из этой области ставится в соответствие некоторая точка оси y (закон соответствия f условно изображается стрелкой).

Значение функции $y=f(x)$, соответствующее определенному значению $x=x_1$ из области определения функции, обозначается так:

$$y_1=f(x_1) \quad \text{или} \quad y_1=y\,|_{x=x_1}.$$

Пример 1. Функция задана равенством $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ (и определена при всех значениях x).

Найти: а) $f(1)$; б) $f(\sqrt{2}/2)$; в) $f(a)$; г) $f(2/x)$.

Решение. а) $f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$; б) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$; в) $f(a)=\frac{a}{a^2+1}$; г) $f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{2/x}{(2/x)^2+1}=\frac{2x}{x^2+4}$.

При одновременном рассмотрении нескольких различных функций используют различные буквы для обозначения каждого из законов соответствия, например:

$$y=f(x), \quad y=F(x), \quad y=g(x), \quad y=\varphi(x).$$

Две функции считают *равными* (совпадающими), если их области определения совпадают и значения при любых одинаковых значениях аргумента равны.

Пример 2. Функции $f(x)=2$ и $\varphi(x)=1+\sin^2 x+\cos^2 x$ совпадают; нет необходимости обозначать их разными буквами f и φ.

Пример 3. Функция $f(x)=x$ и функция $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$ различаются: первая определена на всей оси, вторая — только при $x\geqslant 0$, хотя в этом случае они равны: при $x\geqslant 0$ имеем $(\sqrt{x})^2=x$.

32. График функции. Способы задания функций. Для графического представления функции $y=f(x)$ используем декартову прямоугольную систему координат (рис. 12). Каждой точке x оси Ox из области определения функции $f(x)$ отвечает значение $y=f(x)$ и, вместе с тем, точка плоскости с координатами $(x, f(x))$; при изменении x эти точки образуют график функции. Точное определение таково: *графиком функции* (относительно данной системы координат) называется множество точек плоскости, абсциссами которых служат значения аргумента x, а ординатами — соответствующие им значения функции $y=f(x)$.

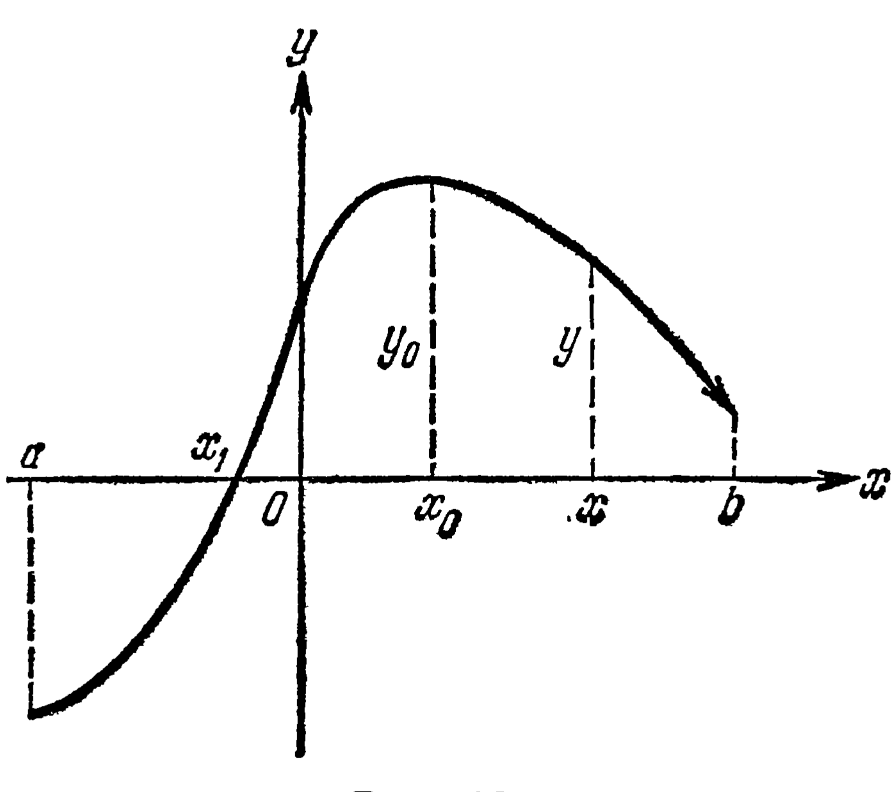


Рис. 12.

Для графика функции $y=f(x)$, изображенного на рис. 12, показаны точки с абсциссами x, x_0, x_1; их ординаты соответственно равны y, y_0, 0. График показан на интервале $[a, b)$; то, что точка $x=b$ исключена, условно показано стрелкой в правом конце кривой линии — графика функции $y=f(x)$.

График функции дает удобное и наглядное представление о ее свойствах, и ниже уделено много внимания методам построения графиков функций.

Определение функции не дает указания на то, в какой форме задан закон соответствия между значениями аргумента и зависимой переменной; практически привычной формой задания этого закона является для нас запись функциональной зависимости в виде некоторой математической формулы, например:

$$y=4x^3; \quad y=\sqrt{9-x^2}; \quad y=\sin^2 x; \quad y=\frac{\lg(x+1)}{x-2}.$$

В этом случае говорят, что функция задана *аналитическим выражением*. При этом термин «аналитическое выражение» имеет приблизительно тот же смысл, что и «алгебраическое выражение», с той разницей, что при записи аналитического выражения не ограничиваются только алгебраическими действиями (т. е. рациональными действиями и операцией извлечения корня), но пользуются, например, такими действиями, как логарифмирование, отыскание синуса или тангенса данного значения аргумента и т. п. Вообще, при определении новой математической операции для нее вводится специальный символ, который в дальнейшем уже можно использовать для записи аналитического выражения.

Для функции, заданной аналитическим выражением, область определения может состоять только из значений x, входящих в о. д. з. этого выражения. Область определения функции оказывается в этом случае частью области допустимых значений аналитического выражения, задающего функцию, или совпадает с этой областью. Например, площадь S круга, как функция радиуса R, задается выражением $S=\pi R^2$. Область определения этой функции по смыслу дела есть $0<R<\infty$; взятое же само по себе аналитическое выражение πR^2 определено при всех значениях R. Если функция задана аналитическим выражением относительно аргумента x и область определения не указана, то подразумевают, что область определения совпадает с о. д. з. задающего ее выражения.

Иногда функция задается разными аналитическими выражениями в разных частях области определения. Самый простой пример: будем рассматривать $|x|$ как функцию от x. Тогда

$$|x|=\begin{cases} x & \text{при} \quad x\geqslant 0, \\ -x & \text{при} \quad x<0. \end{cases}$$

Можно записать $|x|$ и в виде $|x|=\sqrt{x^2}$. Вообще, одна и та же функция может быть задана различными способами и в разных видах.

Кроме аналитического способа задания применяют графическое и табличное задание функций. Если функция задана графиком, то можно по чертежу находить значения y, отвечающие данным значениям x, разумеется, приближенно.

Табличный способ задания функции заключается в том, что для избранных значений аргумента x, обычно отстоящих друг от друга на некоторую постоянную величину — шаг таблицы, указываются соответствующие значения y (с определенной степенью точности). Небольшой фрагмент таблицы может выглядеть так:

x	y	x	y
0,10	34,21	0,16	43,37
0,12	36,43	0,18	48,14
0,14	39,52	0,20	54,62

В данном примере шаг таблицы равен 0,02.

Графическое и табличное задание функций часто возникает в результате проведения измерений, опытов, применения самопишущих приборов.

Для многих функций, заданных аналитически, также составлены таблицы, облегчающие применение этих функций (таблицы

квадратных и кубических корней, таблицы логарифмов, тригонометрических функций и др.). Необходимо приобрести навыки в пользовании таблицами функций (см. п. 220).

В восемнадцатом и в начале девятнадцатого века математики представляли себе функцию только с точки зрения ее аналитического выражения. Лишь в первой половине девятнадцатого столетия некоторыми математиками, в том числе великим русским ученым Н. И. Лобачевским, было сформулировано современное определение функции: существенным является наличие закона соответствия, а не возможность представить его «формулой». В частности, допускается и словесное описание закона соответствия: например, $f(x)=[x]$ — целая часть x определяется как «наибольшее целое число, не превосходящее x».

33. Элементарное исследование поведения функции. Систематическое и полное исследование функций составляет одну из главных задач области математики, называемой *математическим анализом*. В элементарной математике также рассматривают простейшие вопросы, связанные с исследованием функций. При этом под исследованием функции понимают установление ряда ее свойств. Итогом такого исследования может быть построение графика функции. В связи с этим вспомним некоторые понятия, относящиеся к функциям.

а) *Нулем* (или *корнем*) функции $f(x)$ называется такое значение аргумента x, при котором функция обращается в нуль. Графически нули функции суть точки пересечения ее графика с осью Ox (например, точка x_1 на рис. 12).

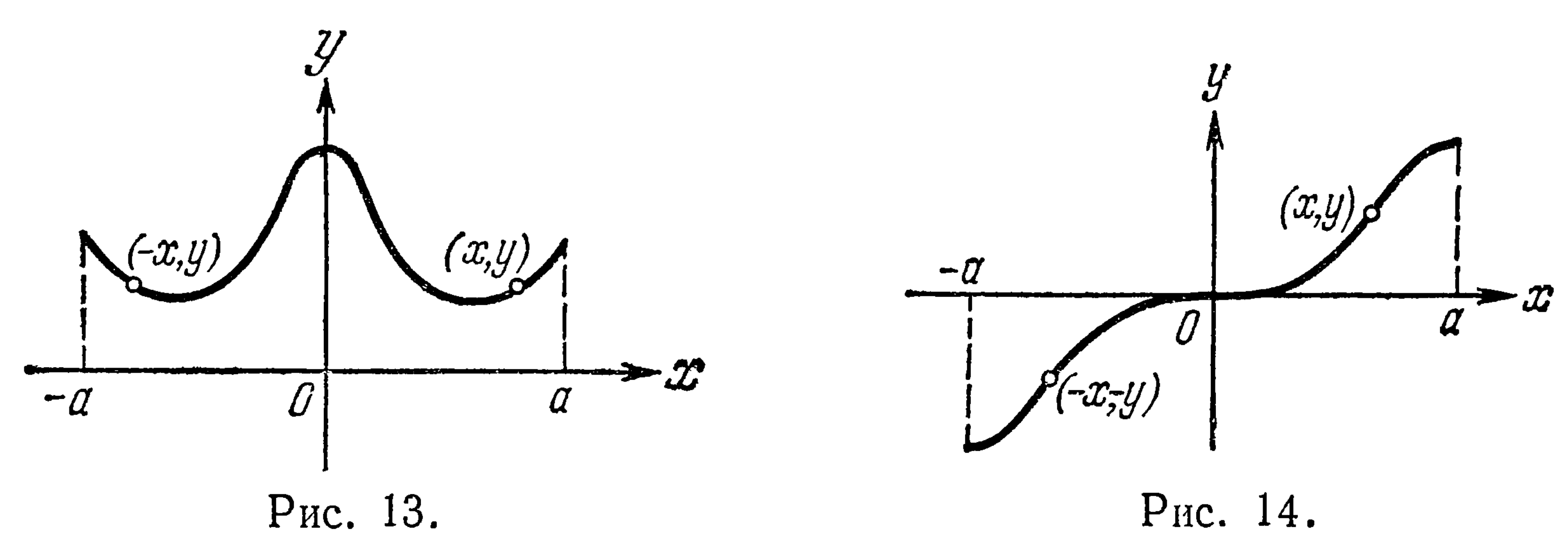


Рис. 13. Рис. 14.

б) Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно начала отсчета O (например, является сегментом $[-a, a]$), называется *четной*, если для любого x из ее области определения выполнено равенство

$$f(-x)=f(x). \tag{33.1}$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 13), так как вместе с точкой $(x, f(x))$ ему будет принадлежать и симметричная точка $(-x, f(x))$. Обратно, если график симметричен относительно оси Oy, то функция — четная.

в) Функция $f(x)$, область определения которой на оси Ox симметрична относительно начала O, называется *нечетной*, если для

любого x из ее области определения выполнено равенство

$$f(-x) = -f(x). \qquad (33.2)$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат, так как вместе с любой его точкой $(x, f(x))$ ему принадлежит и симметричная точка $(-x, -f(x))$ (рис. 14). Обратно, если график функции симметричен относительно O, то функция — нечетная.

Примеры четных и нечетных функций:

$y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg}^2 x$ (четные функции);

$y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$ (нечетные функции).

Многие функции, например $y = x^2 + x$, $y = \sin x + \cos x$ не являются ни четными, ни нечетными функциями.

г) Функция называется *возрастающей* в некотором промежутке, лежащем в ее области определения, если для любых двух значений x_1, x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ (бо́льшим значениям аргумента отвечают бо́льшие значения функции). Если из $x_1 < x_2$ следует лишь неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется *неубывающей*. Аналогично, *убывающей* называется функция, для которой из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а *невозрастающей* — функция, для которой при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Интервал, на котором функция убывает или возрастает, называется *интервалом монотонности* функции. Так, например, для функции, график которой изображен на рис. 12, интервалами монотонности служат интервалы (a, x_0) и (x_0, b) (на первом из них функция монотонно возрастает, на втором — монотонно убывает).

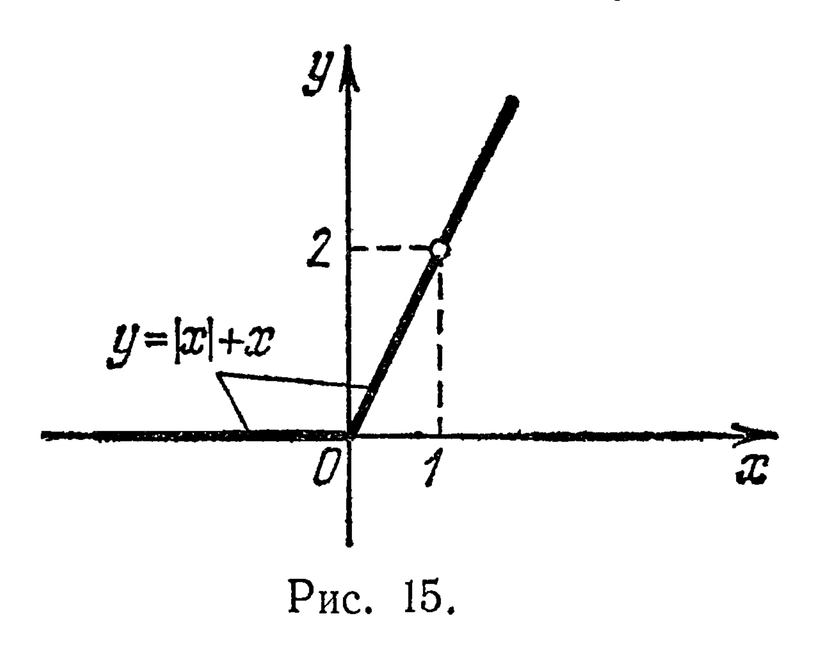


Рис. 15.

Функция $y = |x| + x$, которая также может быть задана парой равенств

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

является неубывающей функцией на всей числовой оси. Она возрастает на положительной полуоси (рис. 15).

д) Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если функция определена в самой этой точке и в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad \text{(для максимума)},$$
$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \text{(для минимума)}.$$

На рис. 16 точки x_1, x_3 суть точки максимума, а точки x_2, x_4 — точки минимума функции. Максимум функции — ее наибольшее значение по сравнению с «соседними» точками слева и справа, но не обязательно по сравнению с отдаленными точками. Практически, если находятся интервалы монотонности, то на их стыке часто обнаруживаются точки максимума или минимума, как на рис. 16. Термин «экстремум» функции объединяет понятия максимума и минимума: точки x_1, x_2, x_3, x_4 суть точки экстремума функции $f(x)$.

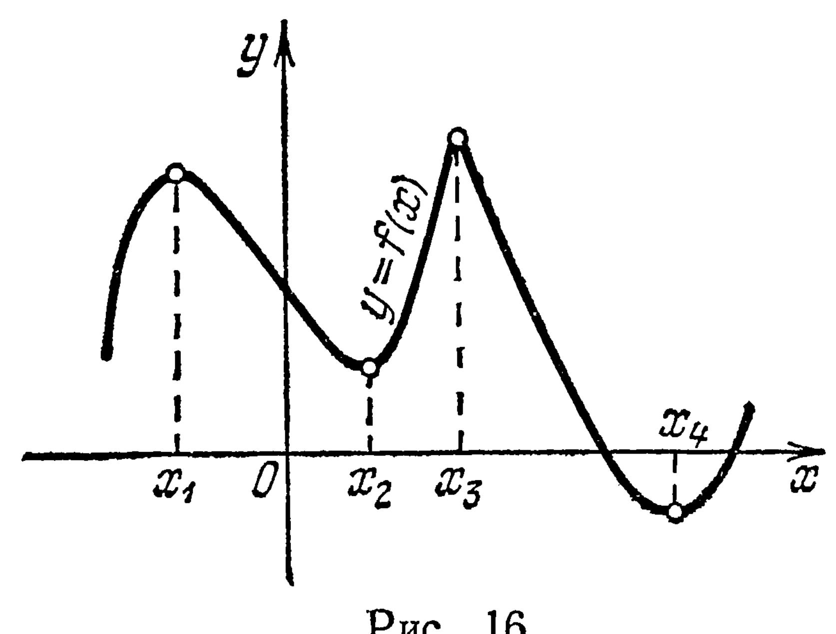


Рис. 16.

е) Прямая линия называется *асимптотой* графика функции, если график функции неограниченно сближается с этой прямой при удалении точки графика в бесконечность. На рис. 17, *а* прямые $x=1$ и $y=0$ — асимптоты графика функции. На рис. 17, *б* показан график с асимптотой $y=x$ (биссектриса первого координатного угла).

При исследовании функции необходимо ответить на следующие вопросы.

1) Область определения функции; 2) область изменения функции, т. е. область ее значений; 3) нули функции; интервалы знакопостоянства функции (т. е. интервалы, в которых функция

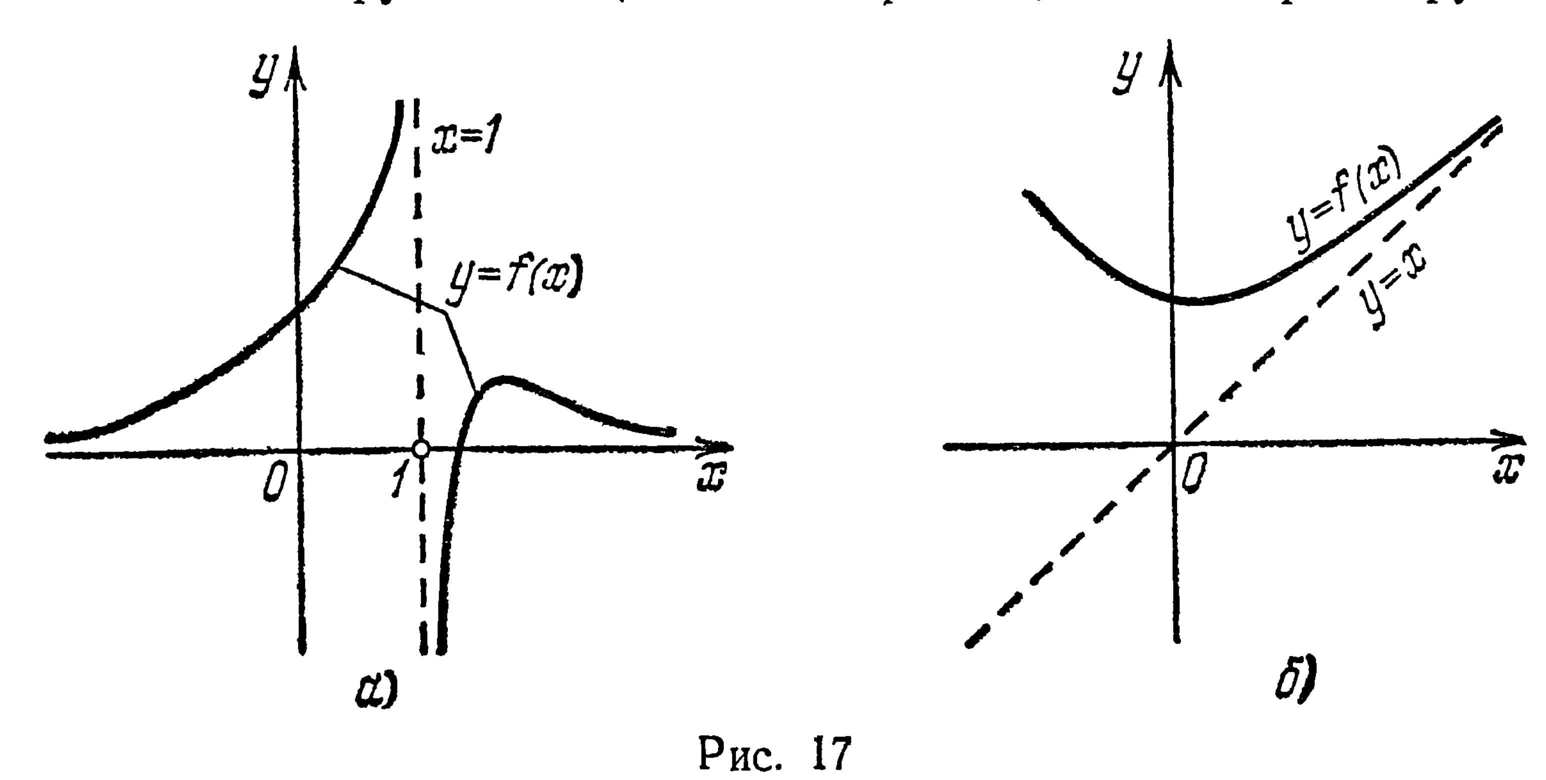


Рис. 17

положительна или отрицательна); точка пересечения графика с осью Oy (если функция определена при $x=0$); 4) свойства симметрии графика функции (четность или нечетность функции); 5) интервалы возрастания и убывания функции; 6) точки максимума и минимума функции; 7) асимптоты графика функции.

Разумеется, не всегда мы можем элементарными средствами получить точный ответ на все вопросы. Напротив, иногда возникают и другие, дополнительные вопросы различного содержания. Здесь указана примерная схема, которой мы в общих чертах придерживаемся при исследовании функции и построении ее графика.

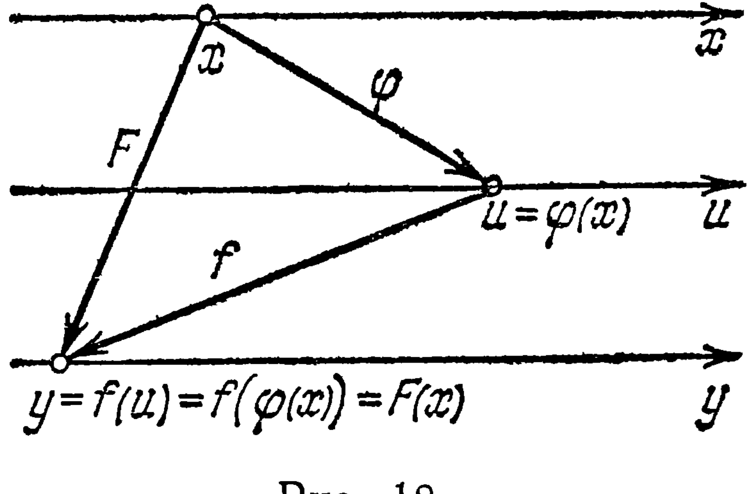


Рис. 18.

34. Сложная функция. Понятие сложной функции, или функции от функции, определяется следующим образом. Пусть $u = \varphi(x)$ — некоторая функция от x; рассмотрим другую функцию $y = f(u)$ такую, чтобы ее область определения совпадала, или хотя бы имела общую часть с областью значений функции $u = \varphi(x)$. Тогда можно рассматривать $y = f(u) = f(\varphi(x))$ как функцию от x: задание x определяет $u = \varphi(x)$, а значение u, если оно попадет в область определения функции $y = f(u)$, определит y. Таким образом, в конечном счете заданием x определяется значение y, т. е. y становится функцией x. Заданная таким способом функция

$$y = f(u) = f(\varphi(x)) = F(x)$$

называется *сложной функцией* от x (заданной через посредство промежуточного аргумента u).

Пример. Функция $y = \sqrt{\sin x}$ естественно представляется как сложная функция так: $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x$.

Схематически сущность понятия сложной функции поясняется рис. 18.

Следует заметить, что термин «сложная функция» указывает на способ задания этой функции, а не на какие-либо ее особые свойства. Любую функцию при желании можно представить как сложную функцию. Например, для функции $y = x$ можно записать $y = \sqrt[3]{x^3}$ или

$$y = \sqrt[3]{u}, \qquad u = x^3,$$

т. е. представить ее как сложную функцию.

35. Обратная функция. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой служит, например, сегмент $[a, b]$ (рис. 19), а областью изменения — сегмент $[c, d]$. Функция $y = f(x)$ ставит каждой точке сегмента $[a, b]$ в соответствие некоторую точку сегмента $[c, d]$. Для изображенной на рис. 19 функции (благодаря тому, что она м о н о т о н н а) можно установить и обратное соответствие: каждому значению y_0 из сегмента $[c, d]$ соответствует единственное значение x_0 из сегмента $[a, b]$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Тем самым x можно рассматривать как функцию от y

с областью определения $[c, d]$ и областью изменения $[a, b]$. Функцию $x=g(y)$ назовем *обратной* по отношению к функции $y=f(x)$ (можно эти две функции назвать *взаимно обратными*).

При схематическом изображении взаимно обратные функции f и g представятся стрелками, как показано на рис. 20. При этом, однако, существенно, чтобы данному y могло отвечать лишь одно значение x такое, что $y=f(x)$, тогда мы и пишем: $x=g(y)$. Записи $y=f(x)$ и $x=g(y)$ имеют здесь равнозначный смысл: $x=g(y)$ в том и только в том случае, если $y=f(x)$.

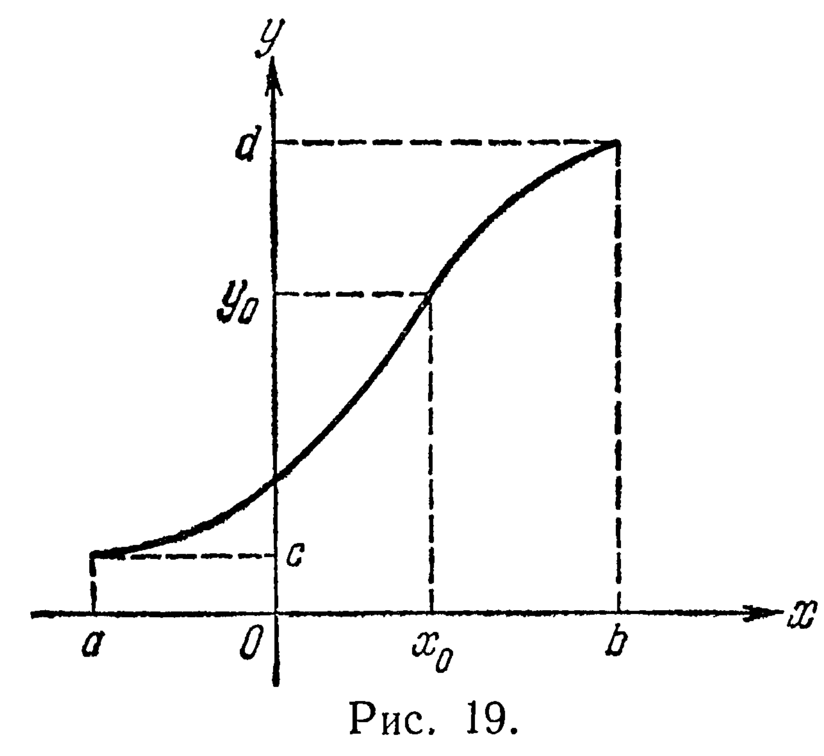


Рис. 19.

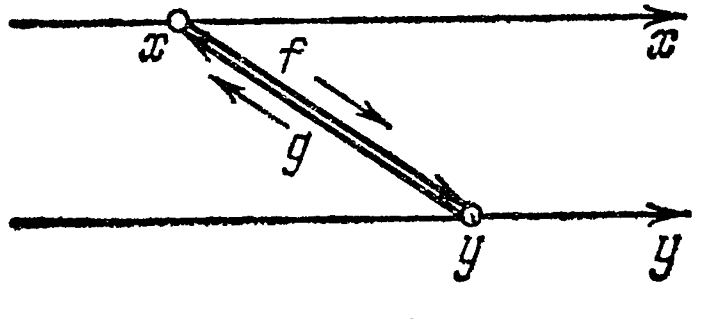


Рис. 20.

Поэтому пары чисел (x, y), определяемые любым из двух соотношений $y=f(x)$ и $x=g(y)$, будут одними и теми же. Это означает, что графики функций $y=f(x)$ и $x=g(y)$ совпадают. Первая из этих функций имеет своим аргументом переменную x, изменяющуюся на сегменте $[a, b]$, вторая — переменную y с областью изменения аргумента $[c, d]$. Следует заметить, что во втором случае мы значения аргумента изображаем на оси ординат, а значения функции — на оси абсцисс. Такое изображение является непривычным и потому менее удобным. Представим себе, что произойдет, если теперь и для обратной функции $x=g(y)$ мы станем значения аргумента обозначать через x и изображать на оси Ox, а значения функции будем обозначать через y и изображать на оси ординат (напомним, что мы условились обозначать для разных функций разными буквами законы соответствия, символизируемые здесь буквами f и g; зависимые же и независимые переменные для разных функций допустимо обозначать одинаково). При таком изменении обозначений запись обратной по отношению к $y=f(x)$ функции будет уже иметь вид $y=g(x)$.

Теперь график функции $y=g(x)$ будет получаться из графика $y=f(x)$ (или $x=g(y)$) с помощью преобразования зеркальной симметрии относительно биссектрисы первого — третьего координатных углов (рис. 21). В самом деле, пусть точка (x_0, y_0) лежит на графике данной функции; тогда точка (y_0, x_0) с переставленными координатами должна лежать на графике обратной функции. Но такие две точки расположены симметрично относительно указанной биссектрисы (п. 8), а отсюда и следует наше утвер-

ждение: *графики двух взаимно обратных функций расположены симметрично относительно биссектрисы* I—III *координатных углов.*

Пример. Найти функцию, обратную по отношению к функции $y=4\sqrt[3]{x}-1$.

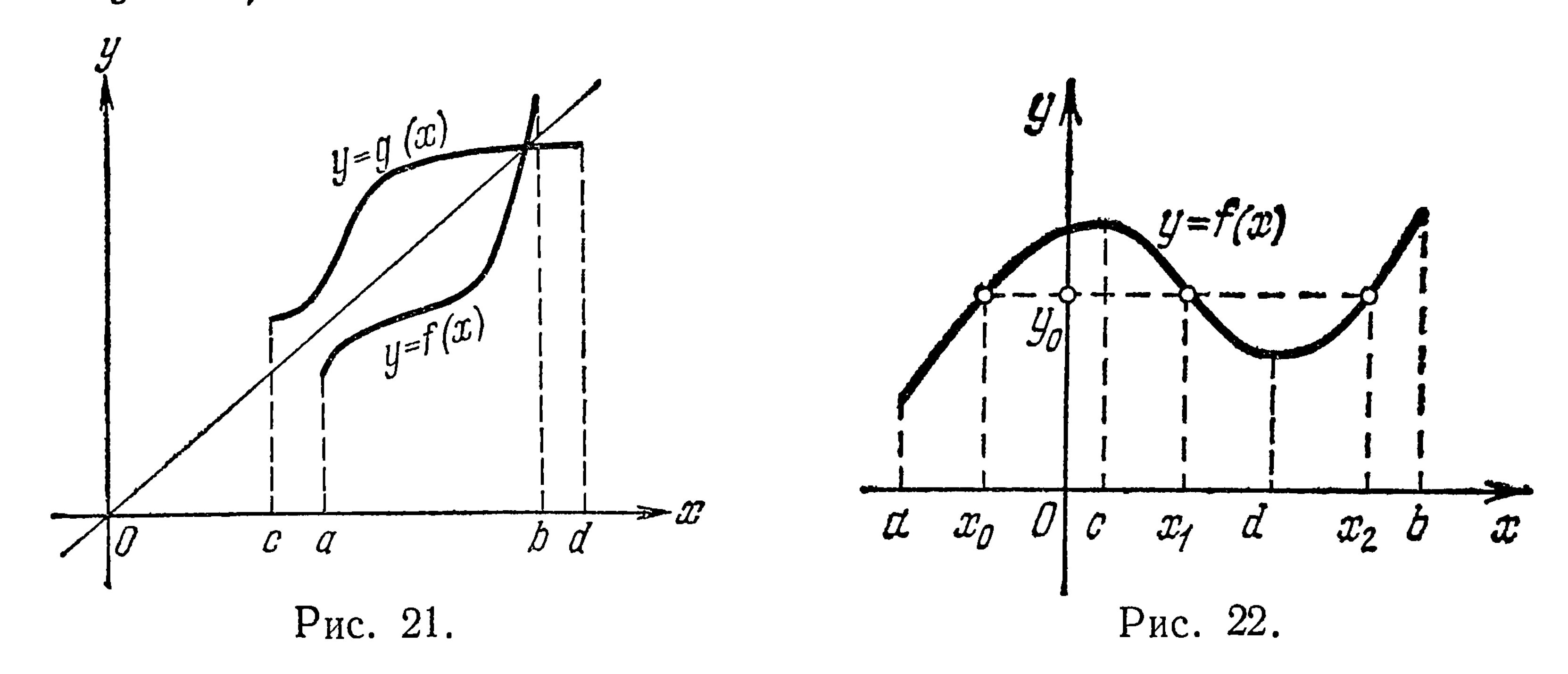


Рис. 21. Рис. 22.

Решение. Из равенства, определяющего данную функцию, выразим x через y:

$$4\sqrt[3]{x}=y+1, \quad \sqrt[3]{x}=\frac{y+1}{4}, \quad x=\frac{(y+1)^3}{64}.$$

В последнем равенстве поменяем местами x и y и получим выражение для функции

$$y=\frac{(x+1)^3}{64},$$

обратной по отношению к данной функции.

Внесем некоторые уточнения в понятие обратной функции. Мы начали рассматривать вопрос об обратной функции на примере функции, заданной графиком на рис. 19. Эта функция монотонна всюду в области определения. Именно этим обусловлен тот факт, что каждой точке y_0 из сегмента $[c, d]$ функция $x=g(y)$ ставит в соответствие только одну точку x_0 из сегмента $[a, b]$. Но для функции, не являющейся монотонной, это может не выполняться. В самом деле, на рис. 22 на сегменте $[a, b]$ показан график немонотонной функции $y=f(x)$. По этой причине имеются значения y, которым соответствует не единственная точка сегмента $[a, b]$; так, точке y_0 отвечают три точки x_0, x_1, x_2 такие, что $y_0=f(x_0)$, $y_0=f(x_1)$, $y_0=f(x_2)$. В силу этого функция $y=f(x)$, рассматриваемая на сегменте $[a, b]$, не имеет обратной функции, если, конечно, не обобщать понятие функции, вводя «многозначные функции». Если наряду с функцией $f(x)$, определенной на сегменте $[a, b]$, рассматривать функцию, определенную только на интервале монотонности функции $f(x)$ (например, $[a, c]$, $[c, d]$ или $[d, b]$) и совпадающую с $f(x)$ на этом

интервале, то у этой новой функции уже будет существовать обратная функция. С этим вопросом мы встретимся в п. 41 при изучении функции $y=\sqrt{x}$ и в пп. 130—133 при изучении обратных тригонометрических функций.

36. Функции нескольких переменных. Схема представления зависимостей величин в природе с помощью функций одной переменной является очень упрощенной; в действительности значения данной интересующей нас величины зависят от многих факторов (определяются значениями ряда других величин). Возьмем в качестве примера уравнение состояния идеального газа

$$PV=RT.$$

Это уравнение связывает три (вообще говоря, переменные) величины: давление P, температуру T, объем V. Если ограничиться изучением изотермических процессов ($T=T_0=\text{const}$), то можно будет объем считать функцией давления:

$$V=f(P)=\frac{RT_0}{P}.$$

Если рассматривать изобарические процессы ($P=P_0=\text{const}$), то придется уже объем считать функцией температуры:

$$V=\varphi(T)=\frac{RT}{P_0},$$

и т. д. В общем же случае объем V надо рассматривать как функцию двух переменных P, T:

$$V=F(P,\ T)=\frac{RT}{P}.$$

Дадим определение функции двух переменных (случай функции большего числа переменных трактуется аналогично). Величина z называется *функцией двух переменных* x, y (принимающих значения в некоторой допустимой области изменения, называемой *областью определения функции* $z=f(x,\ y)$), если каждой паре значений x, y (из этой области) отвечает по некоторому закону единственное значение z.

Поскольку пара значений аргументов x, y может быть изображена точкой плоскости, то область определения функции удобно изображать на плоскости.

Пример. Функция задана аналитическим выражением:

$$\text{а) } z=\sqrt{x}+\sqrt{-y}; \qquad \text{б) } z=\lg(1-x^2-y^2);$$

найти ее область определения (т. е. о. д. з. соответствующего выражения) и изобразить ее графически.

Решение. а) Функция определена при $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$. Соответствующая область — четвертый квадрант (включая ограничивающие его лучи координатных осей), рис. 23, *а*.

б) Здесь $1-x^2-y^2>0$, или $x^2+y^2<1$. Это условие определяет множество точек, расстояние которых от начала O меньше

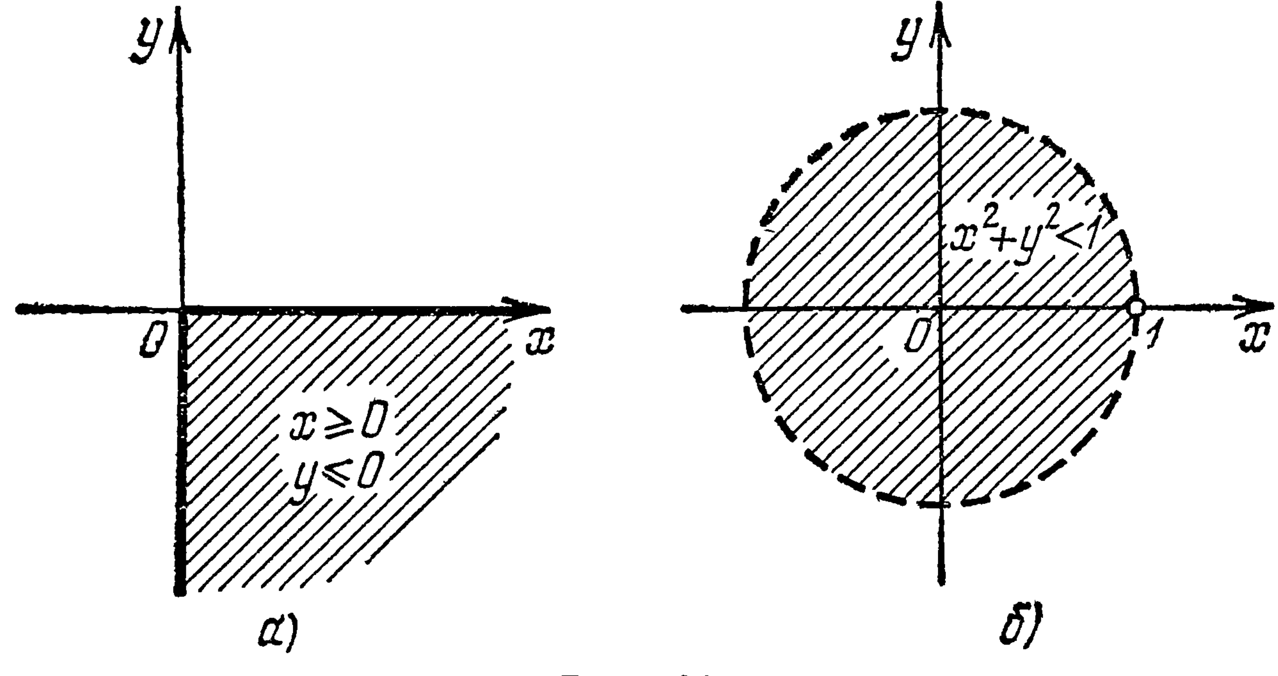


Рис. 23.

единицы. Такие точки заполняют внутренность круга с центром в O и радиусом, равным единице (точки окружности в область не входят), как показано на рис. 23, *б*.

Упражнения

1. Найти область определения следующих функций:

а) $y=\frac{2x+3}{x^3-27}$; б) $y=\sqrt[4]{x^2-36}$; в) $y=\sqrt[3]{x-10}$; г) $y=\sqrt{121-x^2}$.

2. Найти функции, обратные по отношению к следующим функциям:

а) $y=\frac{3}{x^3+1}$; б) $y=\frac{2x-1}{x+2}$.

3. Показать, что функция $y=\frac{5x+3}{2x-5}$ совпадает со своей обратной функцией.

4. Записать в виде сложных функций (введя промежуточный аргумент $u=\varphi(x)$) следующие функции:

а) $y=\operatorname{tg}\sqrt{\pi x}$; б) $y=(\log_2 x)^3$.

5. Найти область определения функций и изобразить ее графически:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$; б) $z=\lg x+\lg(y-1)$.

§ 2. Элементарные функции

37. Обзор элементарных функций. В элементарной математике по большей части рассматриваются функции, которые могут быть аналитически заданы с помощью рациональных действий (сложение, вычитание, умножение и деление), выполняемых над числами (константами) и перечисленными ниже так называемыми *основными элементарными функциями*, а также с помощью образования сложных функций. Основными элементарными функциями условимся считать следующие:

I) *степенные функции* $y=x^k$, где k — любое действительное число;

II) *показательные функции* $y=a^x$, где a — любое положительное число, отличное от единицы: $a>0$, $a\neq 1$;

III) *логарифмические функции* $y=\log_a x$, где a — любое положительное число, отличное от единицы: $a>0$, $a\neq 1$;

IV) *тригонометрические функции*

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,\quad y=\operatorname{ctg} x;$$

V) *обратные тригонометрические функции*

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,$$
$$y=\operatorname{arctg} x,\quad y=\operatorname{arcctg} x.$$

Функции, получающиеся из основных элементарных функций перечисленными выше операциями (из которых особенно важна операция образования сложной функции), будем называть *элементарными функциями*. Так, например, элементарными являются функции

$$y=\frac{\sqrt{x}}{2+\sin x},$$
$$y=\log_3\left(\sqrt[7]{\operatorname{tg} x}+5^x\right),$$
$$y=\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg} 8x\right)$$

и т. п.

Выделим некоторые особенно важные виды элементарных функций.

Функции, образуемые применением к аргументу только трех целых рациональных действий, называют *целыми рациональными функциями* (ц. р. ф.). Их также называют *многочленами* или *полиномами* от переменной x; любая ц. р. ф. записывается в виде

$$y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{37.1}$$

Если $a_0\neq 0$, то она называется ц. р. ф. или *полиномом степени n*. Линейную ц. р. ф.

$$y=ax+b \tag{37.2}$$

называют просто *линейной функцией*; квадратичную ц. р. ф.

$$y=ax^2+bx+c \tag{37.3}$$

— *квадратным* (или *квадратичным*) *трехчленом*.

Дробно-рациональной функцией (д. р. ф.) называют функцию, которая требует для своего образования выполнения рациональных действий (включая деление). Таковы, например, функции

$$y=\frac{x+1}{x^2-6};\qquad y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

Вообще, д. р. ф. представляется как частное от деления двух ц. р. ф.:

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}. \tag{37.4}$$

В простейшем случае, когда числитель и знаменатель — линейны, функция имеет вид

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (37.5)$$

и называется *дробно-линейной функцией.*

Если, кроме рациональных операций, для образования функции применяется еще извлечение корня целой степени (т. е. возведение в рациональную степень), то такую функцию мы называем *алгебраической иррациональной функцией*. Примеры алгебраических иррациональных функций:

$$y=\sqrt{\frac{x}{x-1}}; \quad y=x+2\sqrt[3]{1-x}; \quad y=\sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

Все перечисленные до сих пор виды элементарных функций называются *алгебраическими функциями.*

Показательная функция, логарифмическая функция, степенная функция при иррациональном показателе степени называются *трансцендентными функциями*; также трансцендентными считают и тригонометрические функции. Сам термин «трансцендентный» означает «превосходящий» (в смысле превосходящий силу алгебраических методов). Тригонометрические функции изучаются в главах VIII—XII; здесь мы рассмотрим некоторые алгебраические и трансцендентные функции (логарифмическую и показательную).

38. Линейная функция. Линейной функцией мы назвали функцию вида (37.2):

$$y=ax+b. \qquad (38.1)$$

При $b=0$ она принимает вид

$$y=ax. \qquad (38.2)$$

В этом случае говорят, что *y прямо пропорционально x (с коэффициентом пропорциональности a)*; равенство (38.2) задает *прямую пропорциональную зависимость* между x и y.

Отметим простейшие свойства функции $y=ax$: 1) функция определена при всех значениях x; 2) график функции проходит через начало координат (при $x=0$ имеем $y=0$); 3) функция нечетная, график ее симметричен относительно начала координат, так как $a\cdot(-x)=-(ax)$.

Чтобы построить график функции $y=ax$, проведем через начало координат прямую линию под углом φ к оси Ox (угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки; см. п. 8) таким, что $\operatorname{tg}\varphi=a$.

Докажем, что эта прямая и является графиком функции. Для этого следует установить два положения: 1. Любая точка этой прямой есть точка графика функции. 2. Любая точка графика функции лежит на построенной нами прямой.

Возьмем любую точку прямой, отличную от начала координат (точка $M_0(x_0, y_0)$ на рис. 24, *а*). Имеем для нее

$$\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg}\varphi = a, \quad \text{т. е.} \quad y_0 = ax_0$$

— точка лежит на графике функции. Обратно, если для некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$ выполнено равенство $y_0 = ax_0$, т. е. $y_0/x_0 = \operatorname{tg}\varphi$, то прямая, соединяющая эту точку с началом координат,

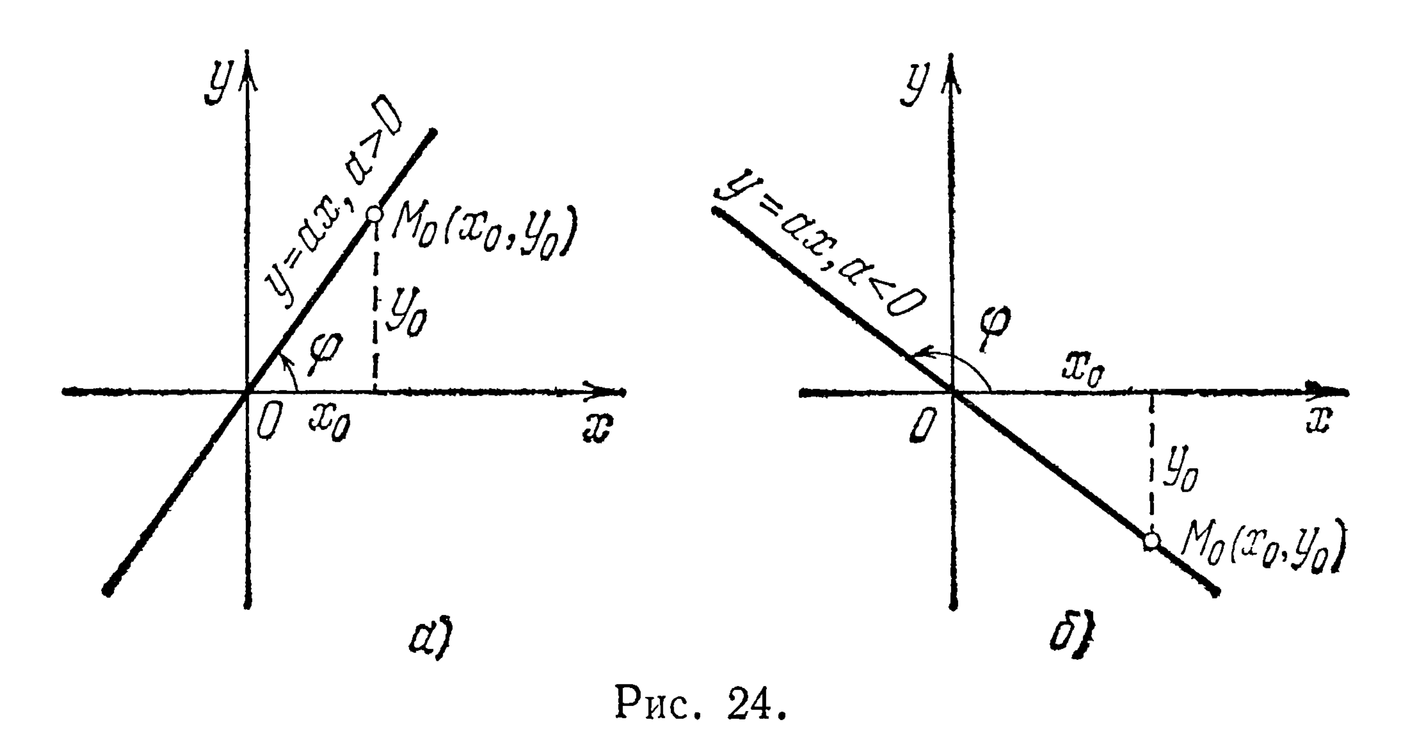


Рис. 24.

наклонена к оси Ox под углом φ, т. е. совпадает с построенной нами прямой.

Таким образом, график функции $y = ax$ есть прямая, проходящая через начало координат под углом φ (где $\operatorname{tg}\varphi = a$) к оси Ox. В связи с этим коэффициент a прямой пропорциональности называют также *угловым коэффициентом* прямой, служащей графиком нашей функции. При $a > 0$ прямая располагается в I и III квадрантах (угол φ острый; рис. 24, *а*), при $a < 0$ она располагается во II и IV квадрантах (угол φ тупой; рис. 24, *б*), при $a = 0$ прямая совпадает с Ox.

Для построения графика линейной функции (38.1) сравним ее с функцией (38.2) и заметим, что при любом значении x величина y, т. е. ордината графика линейной функции $y = ax + b$, получится из ординаты графика функции $y = ax$ прибавлением одного и того же слагаемого b. Отсюда ясно, что графиком функции (38.1) будет служить прямая линия, параллельная линии $y = ax$, служащей графиком функции (38.2). Эта прямая получается из прямой $y = ax$ сдвигом на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$ или вниз при $b < 0$. При $x = 0$ имеем $y = b$; величина b показывает, в какой точке график пересекает ось ординат (рис. 25).

Доказано, что *графиком линейной функции является прямая линия, пересекающая ось Oy в точке с ординатой b и наклоненная к оси Ox под углом, тангенс которого равен a.*

Справедливо и обратное утверждение: *всякая* (*не параллельная оси* Oy) *прямая на плоскости является графиком линейной функции* (38.1).

Величины a и b называются, соответственно, *угловым коэффициентом* и *начальной ординатой* прямой, служащей графиком линейной функции (38.1). При $a > 0$ линейная функция возрастает, при $a < 0$ — убывает, при $a = 0$ является постоянной.

Для фактического построения графика $y = ax + b$ с данными числовыми значениями коэффициентов a и b используем то, что прямая линия определяется любыми двумя своими точками.

Пример 1. Построить графики следующих линейных функций: а) $y = 2x - 3$; б) $y = -2x$; в) $y = -1$.

Решение. а) Для построения прямой линии — графика данной функции найдем ее точки пересечения с осями координат.

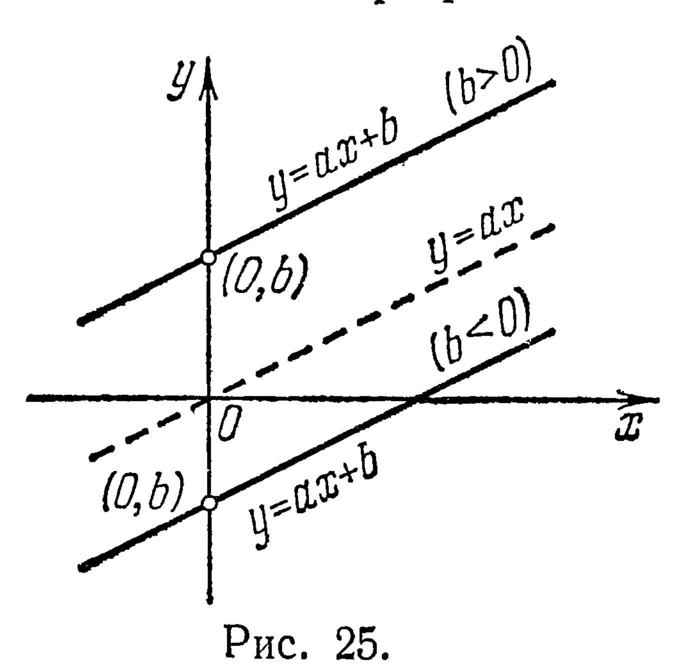


Рис. 25.

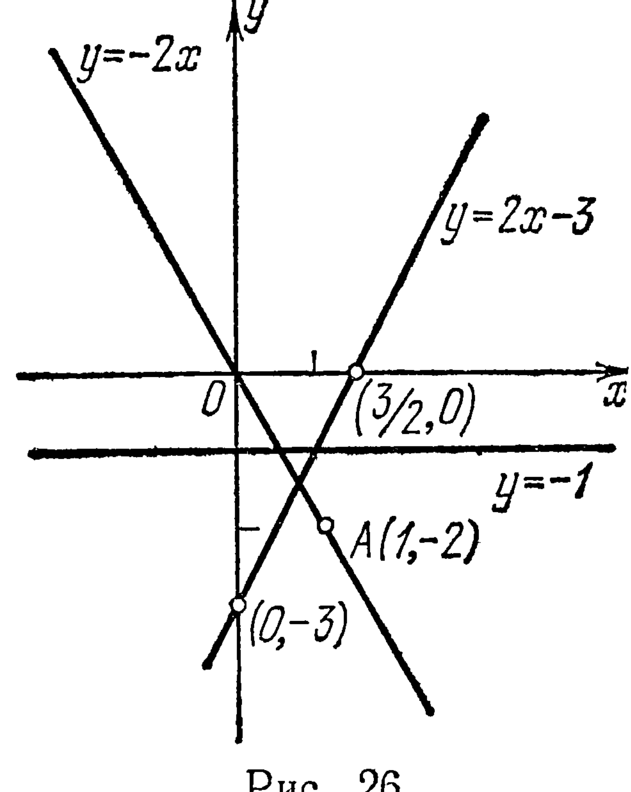


Рис. 26.

Чтобы найти точку пересечения с Oy, полагаем в уравнении прямой $x = 0$ и находим $y = 2x - 3|_{x=0} = -3$. Аналогично, полагая $y = 0$, получаем абсциссу $x = 3/2$ точки, в которой прямая пересекает ось Ox; через полученные точки $(0, -3)$ и $(3/2, 0)$ проводим прямую (рис. 26).

б) В этом случае прямая проходит через начало координат $O(0, 0)$ и для ее построения достаточно найти еще одну точку. Положим, например, $x = 1$, при этом $y = -2$; значит точка $A(1, -2)$ принадлежит искомому графику. Построим прямую, проходящую через точки A и O, она и является графиком данной функции (рис. 26).

в) В этом примере $a = 0$. Графиком функции служит прямая, параллельная оси Ox. В данном случае она удалена от этой оси на одну единицу масштаба и лежит под ней (рис. 26).

Произвольная прямая, не параллельная оси Oy, является графиком некоторой линейной функции. Если прямая параллельна оси Oy и пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = a$,

то все точки прямой имеют такую же абсциссу; прямая определяется уравнением

$$x=a, \tag{38.3}$$

не содержащим y.

Можно вообще рассмотреть произвольное уравнение первой степени (линейное уравнение) относительно x и y:

$$Ax+By+C=0. \tag{38.4}$$

Такое уравнение называется *общим линейным уравнением.* При $B\neq 0$ оно, по существу, определяет y как линейную функцию x:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \quad \text{т. е.} \quad y=ax+b, \quad \text{где} \quad a=-\frac{A}{B}, \quad b=-\frac{C}{B}.$$

Если функция $y=f(x)$ задана уравнением $F(x, y)=0$, связывающим x и y, которое не разрешено относительно y, то говорят, что функция задана в *неявном виде*; уравнение (38.4) задает линейную функцию в неявном виде.

Если $B=0$, то считаем $A\neq 0$ и находим

$$Ax+C=0, \quad x=-\frac{C}{A},$$

т. е. получаем уравнение прямой, параллельной оси Oy. Окончательный вывод: *общее линейное уравнение* (38.4) *всегда определяет на плоскости прямую линию* (предполагается, что A и B одновременно нулю не равны).

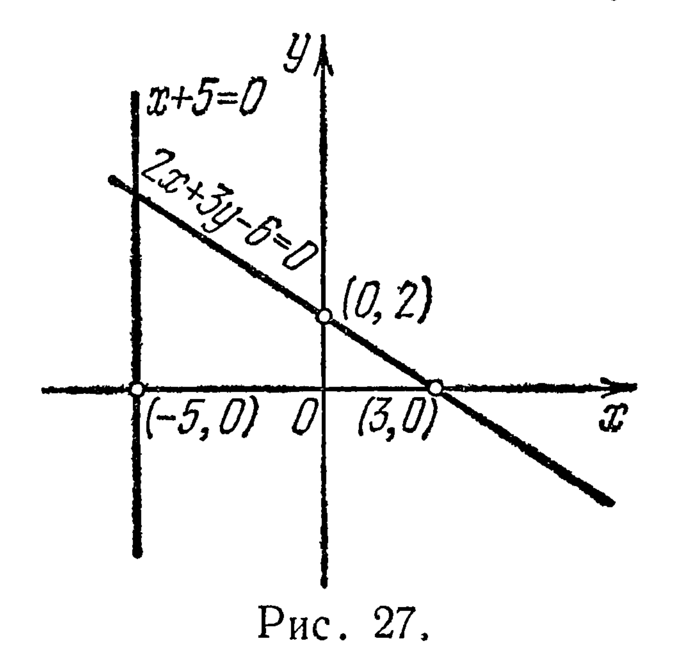


Рис. 27.

Пример 2. Построить прямые, заданные следующими уравнениями: а) $2x+3y-6=0$; б) $3x+15=0$.

Решение. а) Определим точки пересечения данной прямой с осями координат. Для этого в уравнении положим сначала $x=0$, а затем $y=0$. Найдем точки $(0, 2)$ и $(3, 0)$ и проведем через эти две точки прямую (рис. 27).

б) В уравнении отсутствует член с y. Поэтому оно задает прямую, параллельную оси ординат. Находим $x=-5$ и строим прямую, параллельную оси ординат, расположенную слева от этой оси и отстоящую от нее на 5 единиц масштаба (рис. 27).

39. Квадратичная функция $y=ax^2$. Рассмотрим функцию

$$y=x^2, \tag{39.1}$$

установим ее простейшие свойства и построим график этой функции.

1. Функция определена при всех значениях x; значения функции неотрицательны: она равна нулю при $x=0$ и положительна при любых других значениях x. Следовательно, график функции проходит через начало координат и располагается выше оси Ox (имея с ней общую точку $O(0, 0)$).

2. Функция четная: $(-x)^2 = x^2$; график функции симметричен относительно оси Oy. Поэтому достаточно построить его для $x \geqslant 0$ и затем зеркально отразить относительно Oy.

3. При $x \geqslant 0$ функция $y = x^2$ — возрастающая; действительно, при $0 \leqslant x_1 < x_2$ имеем $x_1^2 < x_2^2$, т. е. $y_1 < y_2$. Для отрицательных x, т. е. в интервале $(-\infty, 0]$, функция убывает. Всего имеем два интервала монотонности:

1) интервал убывания $(-\infty, 0]$,

2) интервал возрастания $[0, +\infty)$.

Точка $O(0, 0)$ — точка минимума функции. В ней функция принимает свое наименьшее значение, равное нулю.

4. Для правильного изображения графика функции полезно рассмотреть более подробно характер ее изменения («поведение») при x, весьма близких к нулю, и при весьма больших x.

Если x принимает, например, большие положительные значения, скажем $x = 10$, $x = 100$, $x = 1000$ и т. д., то y также быстро растет (при $x \to \infty$ функция $y = x^2$ также стремится к бесконечности). При этом y растет не только в абсолютном смысле, но и *по отношению* к x. Именно, находим из $y = x^2$

$$\frac{y}{x} = x, \tag{39.2}$$

откуда видно, что с увеличением x отношение y/x растет неограниченно, стремится к бесконечности. Поэтому график функции поднимается вверх (вправо) весьма круто (рис. 28).

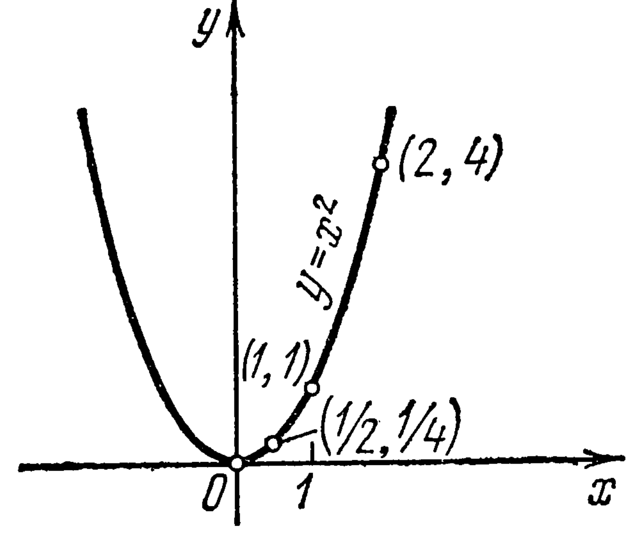


Рис. 28.

При очень малых x, например при $x = 0{,}1$, $x = 0{,}01$, $x = 0{,}001$, y принимает, соответственно, еще более быстро убывающие значения 0,01; 0,0001; 0,000001, малые не только «абсолютно», но и по отношению к x (что видно из того же равенства (39.2)). Геометрически это означает, что наклон хорды, соединяющей точку (x, y) графика с точкой $(0, 0)$, при малых x будет очень мал: график подходит к началу координат, тесно сближаясь с осью Ox, «касаясь» оси Ox (рис. 28).

Для более точного изображения графика составим еще небольшую табличку значений функции, например:

x	0	$^1/_2$	1	2
$y = x^2$	0	$^1/_4$	1	4

Полученные на рисунке точки соединим плавной линией с учетом общих, установленных выше свойств функции.

Графики функций $y=ax^2$ имеют такой же характер; при $a>0$ ординаты графика функции $y=ax^2$ отличаются множителем a от ординат графика функции $y=x^2$. При $a<0$ получается график, симметрично расположенный с графиком $y=|a|x^2$ относительно оси Ox.

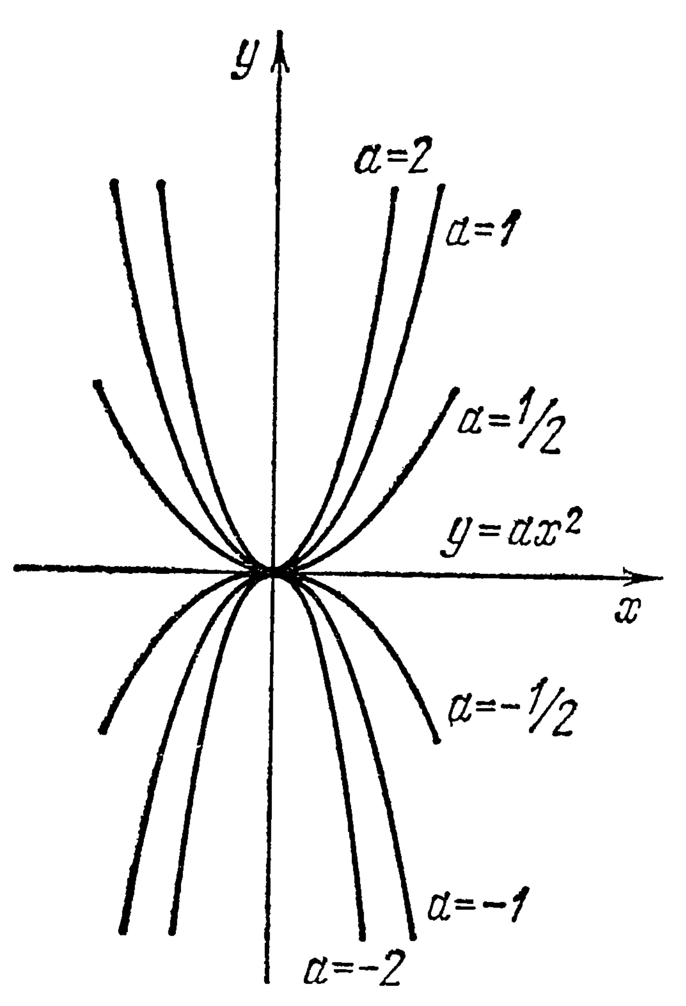


Рис. 29.

На рис. 29 показаны графики функций $y=ax^2$ при $a=1, {}^1/_2, 2, -1, -{}^1/_2, -2$.

Напомним, что график функции вида $y=ax^2$ называется *параболой*; ось симметрии графика называется *осью параболы* (здесь она совпадает с осью Oy), точка пересечения параболы со своей осью — *вершиной параболы* (здесь вершина совпадает с началом координат).

Функции более общего вида (37.3) (квадратные трехчлены) изучаются в п. 45.

40. Степенная функция $y=x^n$. Рассмотрим теперь функцию

$$y=x^n \qquad (40.1)$$

при любом натуральном n. В случае $n=1$ и $n=2$ получаются уже знакомые функции: линейная $y=x$ и квадратичная $y=x^2$, графиками которых являются прямая (биссектриса I—III координатных углов) и парабола.

Можно также рассмотреть и несколько более общий случай функций вида $y=ax^n$. Их графики получатся из графиков функций $y=x^n$ аналогично тому, как параболы $y=ax^2$ получались в п. 39 из параболы $y=x^2$.

Можно указать на некоторые общие свойства рассматриваемых функций. Все они принимают нулевое значение при $x=0$ (их графики проходят через начало координат). При четном $n=2k$ функция $y=x^n=x^{2k}$ четная, так как $(-x)^{2k}=x^{2k}$. График симметричен относительно оси Oy. Если n — нечетное, $n=2k+1$, то и функция нечетная, так как $(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}$. В этом случае график симметричен относительно начала координат.

Для $x\geqslant 0$ функции (40.1) все являются возрастающими. При этом, чем больше показатель n, тем больше значения x^n для $x>1$; напротив, при $0<x<1$ функции с бóльшим показателем степени n принимают меньшие значения. Для $x=1$ все функции $y=x^n$ принимают значения, равные 1.

Вот табличка, поясняющая это на примере отдельных значений:

y \ x	0	$^1/_2$	1	2
$y=x$	0	$^1/_2$	1	2
$y=x^2$	0	$^1/_4$	1	4
$y=x^3$	0	$^1/_8$	1	8
$y=x^4$	0	$^1/_{16}$	1	16

Графики функций $y=x^n$ для $n=1$, 2, 3, 4 показаны на рис. 30. При $n=3$ и $n=4$ они соответственно называются *параболами третьей* и *четвертой степени* (парабола третьей степени называется также *кубической параболой*).

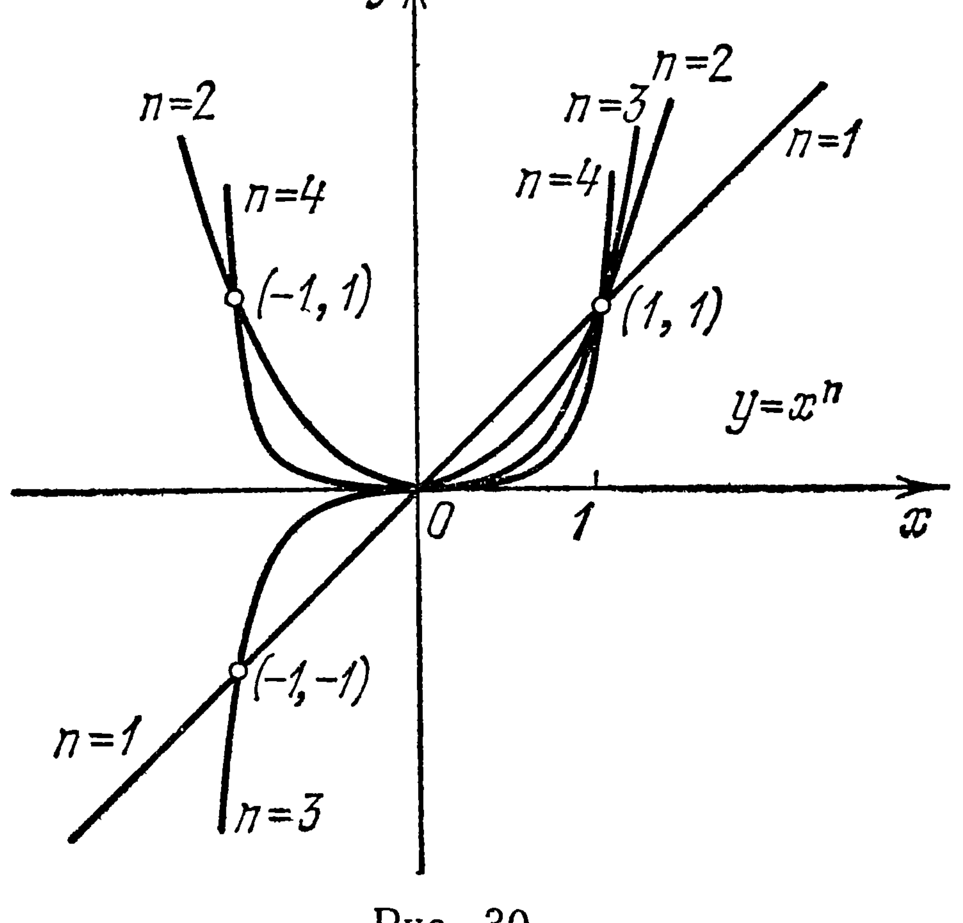


Рис. 30.

41. Обратная пропорциональная зависимость. Степенная функция с рациональным показателем степени. Начнем с исследования степенной функции $y=x^k$ в случае $k=-1$:

$$y=\frac{1}{x}, \qquad (41.1)$$

или с несколько более общей функции:

$$y=\frac{m}{x} \qquad (m\neq 0) \qquad (41.2)$$

(в этом случае говорят, что x и y находятся в *обратной пропорциональной зависимости*, а число m называют *коэффициентом обратной пропорциональности*). Равенство (41.2) записывают также в симметричной относительно x и y форме:

$$xy=m. \qquad (41.3)$$

Таким образом, *произведение величин, находящихся в обратной пропорциональной зависимости, постоянно и равно коэффициенту пропорциональности.*

Проведем исследование функции (41.2) в случае $m>0$.

1) Областью определения функции (41.2) служит вся ось Ox, кроме точки $x=0$: эта область состоит из двух бесконечных открытых интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$.

2) Функция не обращается в нуль. Если $x>0$, то (в силу $m>0$) и $y>0$, для отрицательных x функция также принимает отрицательные значения. Областью изменения функции является множество всех действительных чисел, кроме нуля.

3) Функция (41.2) нечетна (докажите); ее график симметричен относительно начала координат. Достаточно поэтому рассмотреть лишь ту его часть, которая соответствует интервалу $(0,\ +\infty)$.

График функции (41.2) обладает и симметрией относительно биссектрис координатных углов. Покажем, например, его симметрию относительно биссектрисы I—III углов. Запись (41.3) совершенно симметрична относительно x и y; поэтому, если точка $M_1(x_1,\ y_1)$ лежит на графике функции, то и симметричная с ней точка $M_2(x_2,\ y_2)$, имеющая координаты $x_2=y_1$, $y_2=x_1$, лежит на том же графике; из равенства $x_1y_1=m$ следует

$$x_2y_2=y_1x_1=m.$$

Это соображение применимо всякий раз, когда соотношение между x и y можно представить в форме, симметричной относительно x и y, т. е. в виде $F(x,\ y)=0$, причем функция $F(x,\ y)$ удовлетворяет условию $F(y,\ x)=F(x,\ y)$.

4) При $x>0$ функция (41.2) убывающая; действительно, из $0<x_1<x_2$ следует $m/x_1>m/x_2$, т. е. $y_1>y_2$. Функция является убывающей и в интервале $(-\infty,\ 0)$ (проверьте самостоятельно). Было бы ошибкой тем не менее считать функцию убывающей во всей области определения: в точке $x=0$ она не определена, имеется два интервала ее монотонности: $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$, в каждом из которых она убывает.

5) Изучим характер изменения y при условии, что x принимает все бо́льшие положительные значения (стремится к бесконечности). Ясно, что $y=m/x$ при этом будет приближаться к нулю, оставаясь все же положительным. Графически это означает, что кривая приближается (при движении точки вправо) к оси абсцисс, оставаясь выше оси абсцисс. Ось Ox является асимптотой графика обратной пропорциональности.

Если, напротив, заставить x приближаться к нулю, оставаясь положительным, то y будет неограниченно возрастать (стремиться к бесконечности). График имеет и вторую асимптоту — ось Oy (последнее ясно также из наличия асимптоты Ox и симметрии относительно прямой $y=x$). Кривая, соответствующая разобранному случаю $m>0$, показана на рис. 31, *а*; случай $m<0$ рассматривается аналогично, график изображен на рис. 31, *б*.

Кривая, служащая графиком обратной пропорциональной зависимости, называется *равнобочной гиперболой*. В обоих слу-

чаях $m > 0$ и $m < 0$ гипербола состоит из двух отдельных частей, называемых *ветвями* гиперболы. Гипербола имеет оси

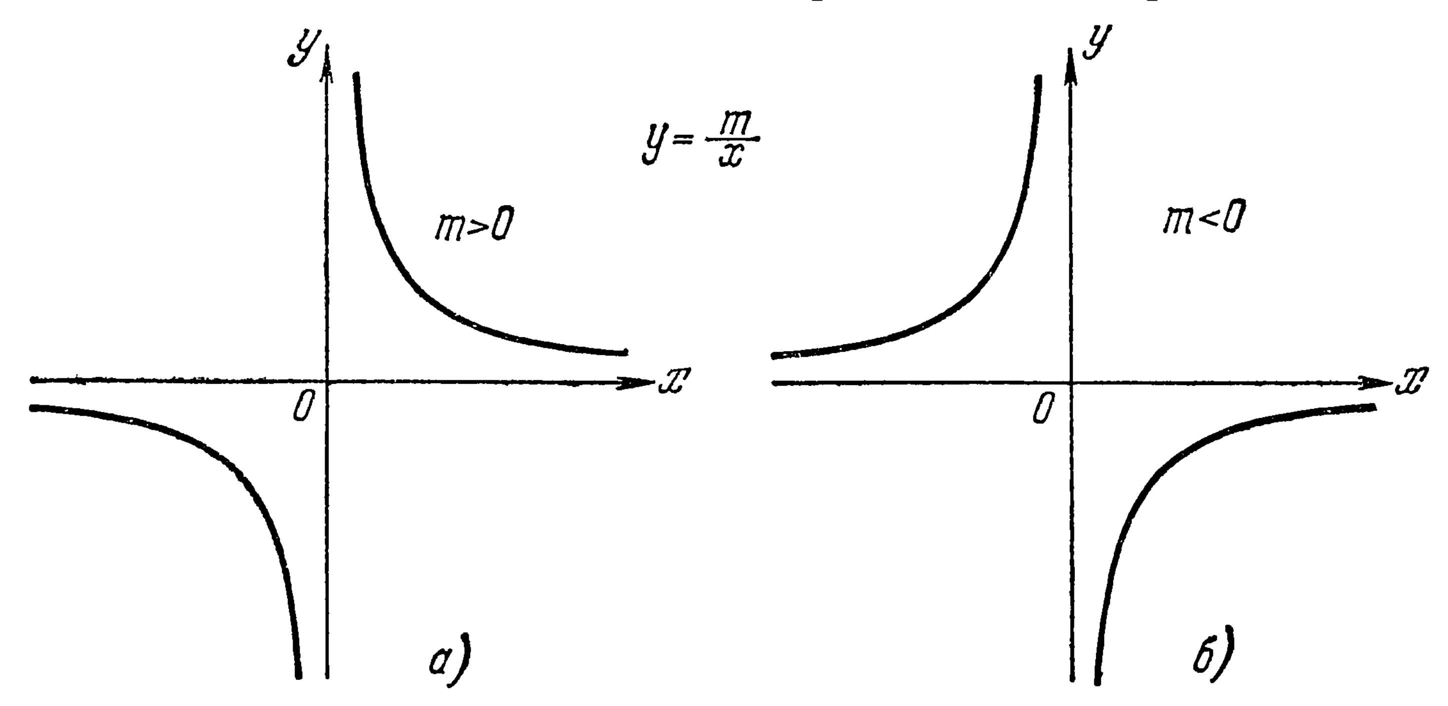


Рис. 31.

симметрии (здесь они совпадают с биссектрисами координатных углов), две асимптоты (они совпали с координатными осями), центр симметрии (помещающийся в точке пересечения осей симметрии и асимптот).

Рис. 32.

Рис. 33.

На рис. 32 показаны графики функций $y = 1/x^n$ при $n = 2$, $n = 3$; исследование этих функций предоставляется читателю.

В качестве примеров степенных функций с дробными показателями степени рассмотрим $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt{x}$.

Функцию $y = \sqrt[3]{x}$ можно рассматривать как обратную по отношению к $y = x^3$; поэтому можно построить ее график как кривую, симметричную с кубической параболой $y = x^3$ относительно биссектрисы I—III координатных углов (рис. 33). Ясно,

что и не зная правила, относящегося к графикам взаимно обратных функций, мы могли бы переписать уравнение $y=\sqrt[3]{x}$ в равносильном виде $x=y^3$ и строить график функции $x=y^3$ как кубической функции от y.

В случае функции $y=\sqrt{x}$ область определения — полуось $x \geqslant 0$. И здесь можно применить правило, относящееся к графикам взаимно обратных функций; в самом деле, если мы

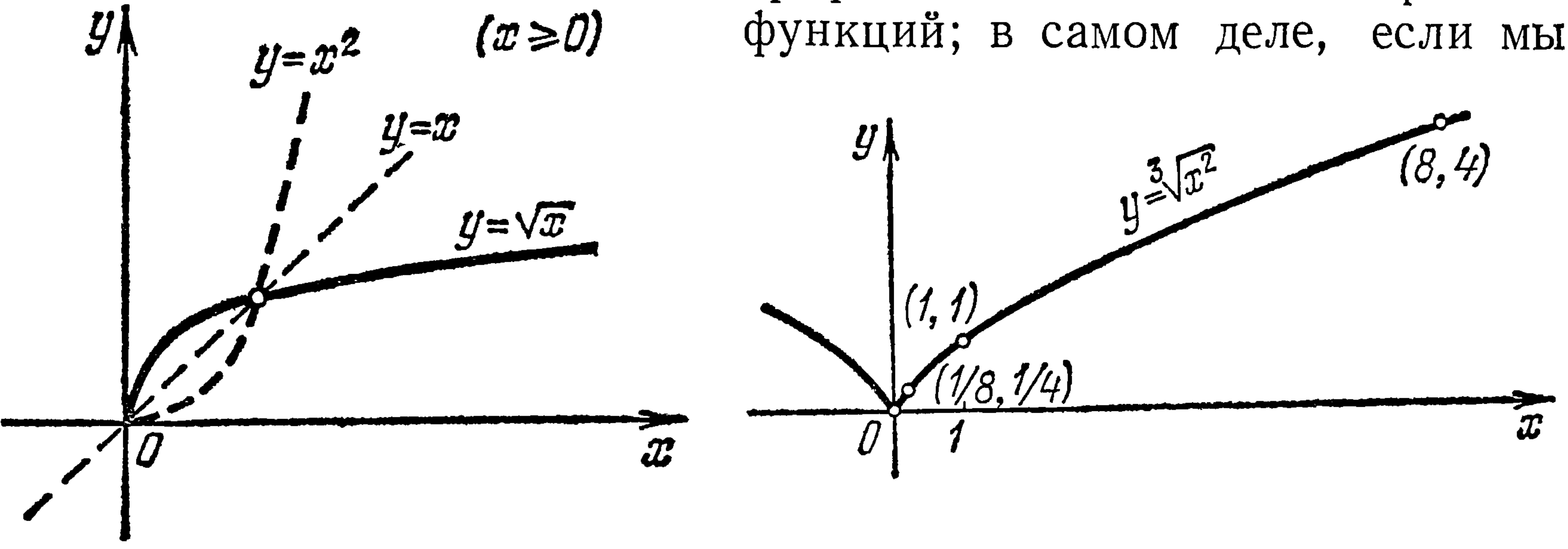


Рис. 34. Рис. 35.

рассмотрим функцию $y=x^2$ во всей ее области опреденения $(-\infty, +\infty)$, то она не будет монотонной и не будет иметь обратной функции. Возьмем, однако, функцию $y=x^2$, ограничив область изменения x положительной полуосью (рис. 34). Теперь функция $y=x^2$ монотонна (на всей полуоси $x \geqslant 0$) и имеет обратную функцию $y=\sqrt{x}$, график которой показан на том же рис. 34.

Покажем еще график функции $y=\sqrt[3]{x^2}$, называемый часто *полукубической параболой.*

Проведем краткое исследование функции.

1) Область определения—вся числовая ось.

2) Функция неотрицательна и обращается в нуль только при $x=0$; график функции проходит через начало координат и лежит выше оси абсцисс.

3) Функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy.

4) Функция монотонно возрастает при положительных x (и монотонно убывает при отрицательных x, что видно, например, из симметрии графика относительно Oy).

5) При неограниченно растущем x функция также растет (стремится к бесконечности), но медленнее, чем x; равенство $y=\sqrt[3]{x^2}$ влечет за собой $y/x=1/\sqrt[3]{x}$, т. е. при $x \to +\infty$ отношение y/x уменьшается, приближаясь к нулю. Это означает, что хорда, соединяющая точку (0, 0) с любой точкой $(x, \sqrt[3]{x^2})$, наклонена к оси Ox по мере удаления точки в бесконечность под все более острым углом (рис. 35), график поднимается полого.

Исследуем еще вид кривой вблизи начала координат. Здесь при малых значениях x отношение $y/x = 1/\sqrt[3]{x}$, показывающее наклон хорды, весьма велико, кривая входит в начало координат, тесно приближаясь к оси Oy (касаясь оси Oy). График на рис. 35 построен с учетом этого исследования и с использованием отдельных точек (0, 0), ($^1/_8$, $^1/_4$), (1, 1), (8, 4).

Аналогичными приемами могут быть исследованы функции $y = x^k$ с любыми рациональными показателями степени.

42. Показательная функция. Функция вида

$$y = a^x \tag{42.1}$$

при $a > 0$, $a \neq 1$ называется *показательной функцией*.

Исследуем эту функцию.

1) Областью определения функции (42.1) служит вся ось абсцисс, т. е. бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

2) Функция (42.1) не является ни четной, ни нечетной.

3) Функция $y = a^x$ положительна при всех значениях аргумента, поэтому ее график весь располагается выше оси абсцисс. Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $a^x < 1$ при $x < 0$. Напротив, если $a < 1$, то $a^x < 1$ при $x > 0$ и $a^x > 1$ при $x < 0$. В любом случае $a^x|_{x=0} = 1$. График проходит через точку (0, 1) на оси Oy.

4) Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ монотонно возрастает; если $a < 1$, то она монотонно убывает. Действительно, пусть, например, $a > 1$. При $x_1 > x_2$ имеем

$$y_1 - y_2 = a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_2}(a^{x_1 - x_2} - 1);$$

в этом выражении оба множителя положительны и $y_1 > y_2$. Аналогично доказывается убывание функции в случае $a < 1$.

5) Пусть $a > 1$; как мы видели, функция $y = a^x$ возрастает; можно показать, что при этом ее значения по мере возрастания x становятся сколь угодно большими. График функции круто поднимается вверх при движении точки x по оси абсцисс вправо.

Если теперь заставить переменную точку x двигаться без ограничений по оси Ox влево, то при этом значения функции (42.1) будут становиться все меньше и меньше, оставаясь, однако, положительными. По мере неограниченного движения точки x по оси Ox влево график функции (42.1) будет сверху все ближе и ближе подходить к оси Ox. Ось Ox является *горизонтальной асимптотой* графика функции (42.1), как показано на рис. 36,*а*.

В случае $a < 1$ функция $y = a^x$, как уже отмечено, убывает; по мере возрастания x ее значения быстро приближаются к нулю — ось Ox является асимптотой графика функции. Отрицательным значениям x теперь соответствуют значения функции,

большие единицы, с увеличением модуля x ($x \to -\infty$) функция растет, стремится к бесконечности. График показательной функции при $a < 1$ показан на рис. 36, *б*.

Чем больше основание $a > 1$, тем круче поднимается график функции $y = a^x$ вправо и тем быстрее приближается к асимптоте

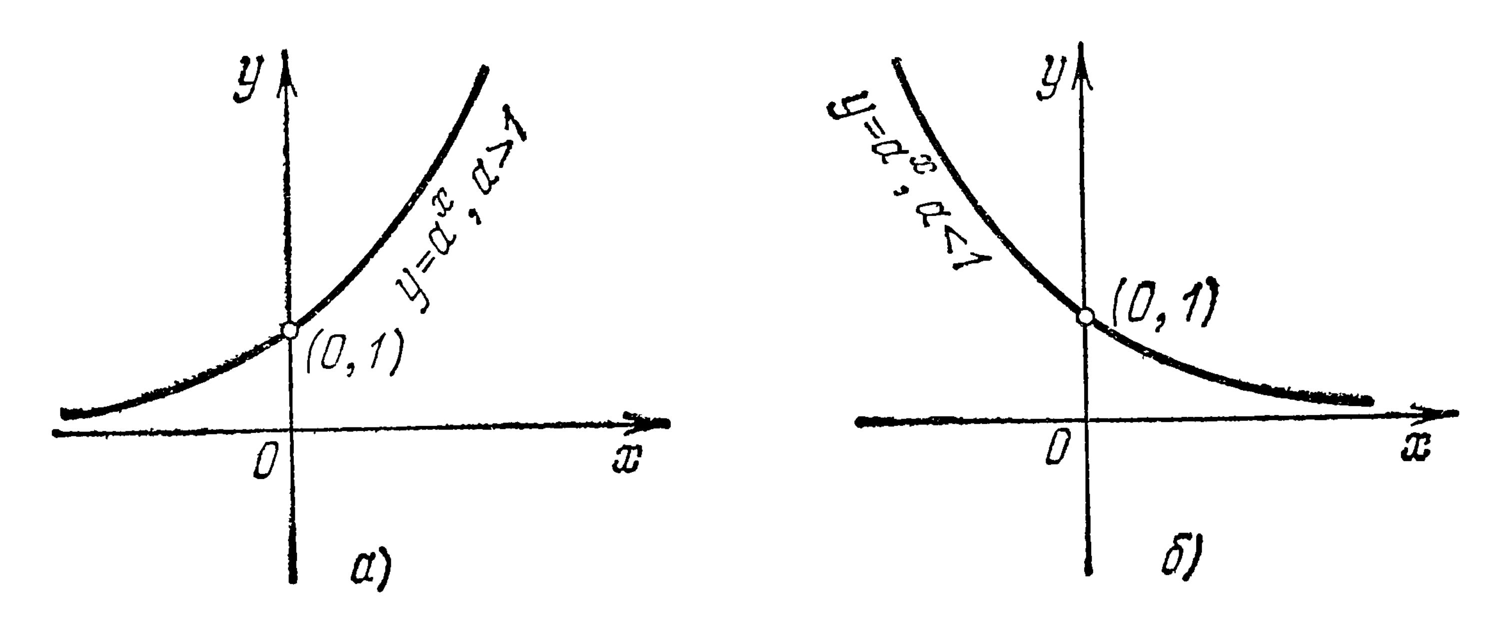


Рис. 36.

при движении точки влево. На рис. 37 показаны графики показательных функций $y = a^x$ при значениях основания $a = 2, 3, {}^1/_2, {}^1/_3$. Заметим, что графики $y = 2^x$ и $y = ({}^1/_2)^x$ (или $y = 3^x$ и $y = ({}^1/_3)^x$) соответственно симметричны относительно оси Oy. Действительно, $y = ({}^1/_2)^x$ можно записать как $y = 2^{-x}$; если точка (x, y) принадлежит графику функции $y = 2^x$, то точка $(-x, y)$, симметричная ей относительно оси Oy, лежит на графике $y = 2^{-x}$.

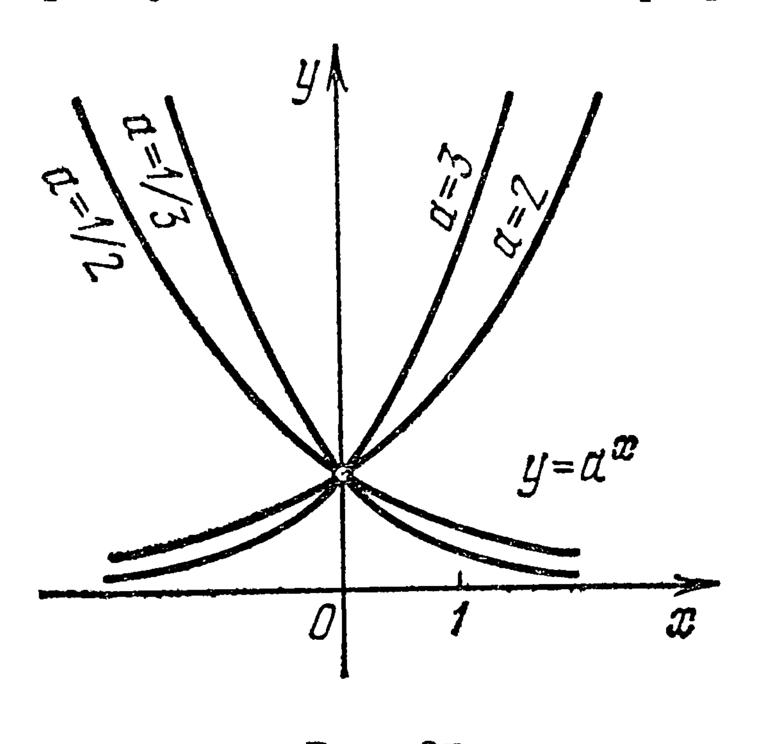


Рис. 37.

Замечание. Исключение из числа значений основания a чисел $a = 0$, $a = 1$ и отрицательных значений a объясняется следующими обстоятельствами. При $a = 0$ выражение вида 0^x определено при $x > 0$ и в этом случае тождественно равно нулю. При $a = 1$ выражение 1^x определено при всех x, но снова имеет постоянное значение (тождественно равно единице). Для отрицательных a возможно возведение в целую степень $x = n$ или в рациональную степень $x = p/q$ с нечетным знаменателем q; a^x имеет смысл в случае $a < 0$ лишь при указанных сравнительно «редких» значениях a. Поэтому $a = 0$ и $a = 1$ исключают из определения показательной функции в силу того, что эти случаи неинтересны (приводят к постоянным), а $a < 0$ — в силу того, что область допустимых значений x не является «сплошной», а состоит из «разрозненных» точек. Само аналитическое выражение a^x в указанных случаях сохраняет смысл и может встречаться в решении задач. Например, для выражения x^y точка $x = -1$, $y = -1$ входит в о.д.з.

43. Логарифмическая функция. Функция вида

$$y = \log_a x, \tag{43.1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *логарифмической функцией*.

Чтобы построить график логарифмической функции, проще всего заметить, что она является обратной функцией для показательной функции. Действительно, если $y = \log_a x$, то $x = a^y$, и обратно. Функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ — взаимно обратные функции, их графики расположены зеркально-симметрично относительно биссектрисы I—III координатных углов.

Этим мы и воспользовались при построении на рис. 38 графика логарифмической функции $y = \log_a x$ по известному (изображенному здесь пунктиром) графику показательной функции

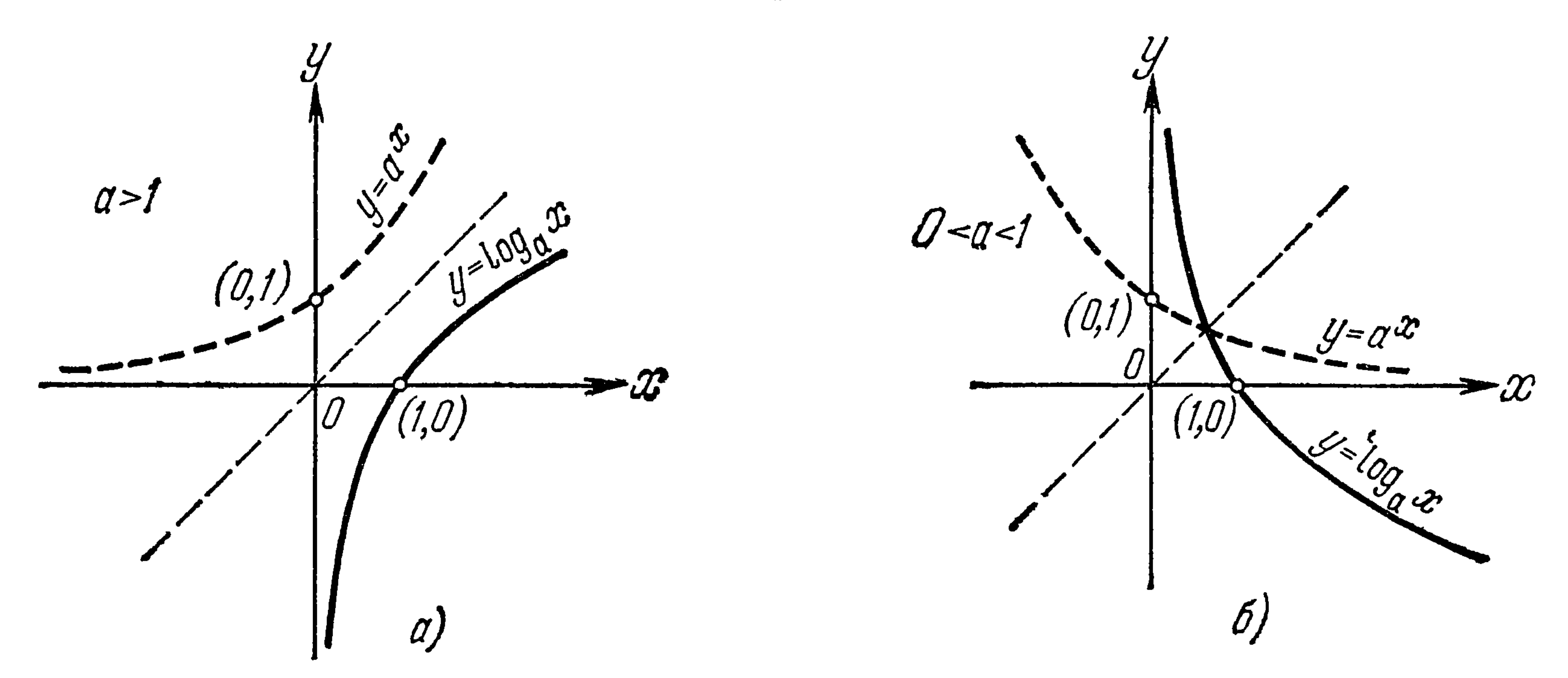


Рис. 38.

$y = a^x$ (рис. 38, *а* относится к случаю $a > 1$, а рис. 38, *б* — к случаю $0 < a < 1$).

Отметим, что графики логарифмических функций в обоих случаях расположены правее оси ординат Oy, поскольку логарифмическая функция определена лишь для положительных значений независимой переменной x. При всяком основании a ($a > 1$ или $0 < a < 1$) графики проходят через точку (1, 0). Число $x = 1$ служит нулем логарифмической функции $y = \log_a x$ при любом a.

При $a > 1$ логарифмическая функция (43.1) является возрастающей функцией, при $0 < a < 1$ — убывающей.

Упражнения

1. Построить графики функций:
а) $y = 3x + 6$; б) $y = -2x - 8$; в) $y = 3x$; г) $y = -4$.

2. Построить прямые, заданные уравнениями:
а) $4x + 3y + 12 = 0$; б) $2x - 10 = 0$; в) $x + y = 0$; г) $x - 3y + 9 = 0$.

3. Построить графики следующих функций:
а) $y = 1/\sqrt{x}$; б) $y = x^5$; в) $y = 2^x$; г) $y = (1/3)^x$; д) $y = \log_{1/2} x$; е) $y = \log_3 x$.

§ 3. Преобразование графиков

44. Параллельный сдвиг графика. Во многих случаях графики функций могут быть построены путем некоторых преобразований уже известных графиков других функций более простого вида. Так, если известен график функции $y=f(x)$, то можно построить графики функций вида

$$y=f(x)+\beta; \quad y=f(x+\alpha).$$

1) Построение графика функции $y=f(x)+\beta$ (сдвиг графика в направлении оси ординат). Вспомним, что график линейной функции $y=ax+b$ получался из графика функции $y=ax$ сдвигом на $|b|$ единиц (вверх или вниз, смотря по знаку b) в направлении оси Oy (см. рис. 25). Точно так же ясно, что ординаты графика функции $y=f(x)+\beta$ получаются из ординат графика функции $y=f(x)$ прибавлением постоянного слагаемого β, т. е. для получения графика $y=f(x)+\beta$ надо весь график $y=f(x)$ переместить параллельно оси Oy на $|\beta|$ единиц вверх или вниз, смотря по знаку β (рис. 39).

Рис. 39.

Рис. 40.

2) Построение графика функции $y=f(x+\alpha)$ (сдвиг графика в направлении оси абсцисс). Пусть по графику функции $y=f(x)$ нужно построить график функции $y=f(x+\alpha)$. Эту задачу можно решить переносом графика функции $y=f(x)$ на $|\alpha|$ единиц масштаба влево, если $\alpha>0$, и вправо, если $\alpha<0$ (рис. 40).

Поясним это на следующем примере. Рассмотрим функцию $y=(x+1)^2$ и сравним ее график с графиком функции $y=x^2$. Одни и те же ординаты мы получим, если для функции $y=(x+1)^2$ будем брать абсциссы на единицу меньшие, чем для $y=x^2$. Абсциссы всех точек графика $y=x^2$ следует уменьшить на единицу, т. е. сдвинуть график $y=x^2$ влево на одну единицу масштаба (рис. 41, *а*).

По таким же соображениям видно, что график функции $y=(x-2)^2$ получится из графика функции $y=x^2$ сдвигом на две единицы вправо (рис. 41, *б*).

Оба сдвига — в направлении осей Ox и Oy — могут применяться одновременно. Так, для построения графика функции $y=(x-2)^2-1$ следует график функции $y=x^2$ снести на две

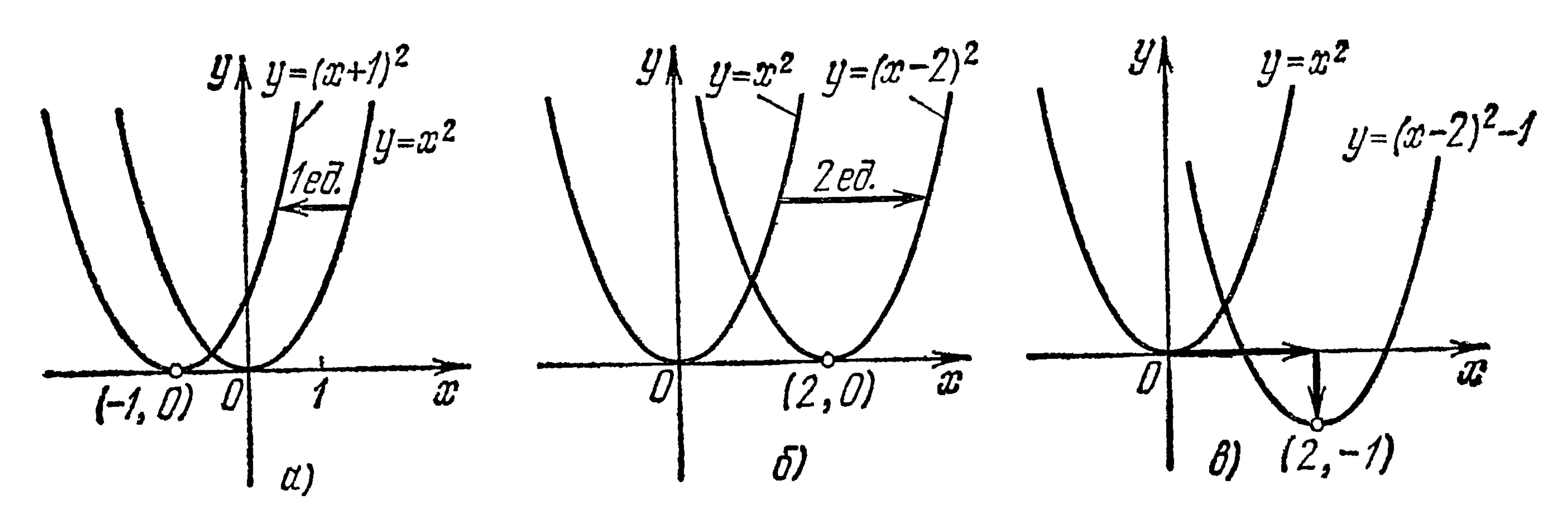


Рис. 41.

единицы вдоль оси Ox вправо и на одну единицу вдоль оси Oy вниз (рис. 41, *в*).

Пример. Построить графики функций: а) $y=(x+2)^3+1$; б) $y=2+\sqrt{x-3}$.

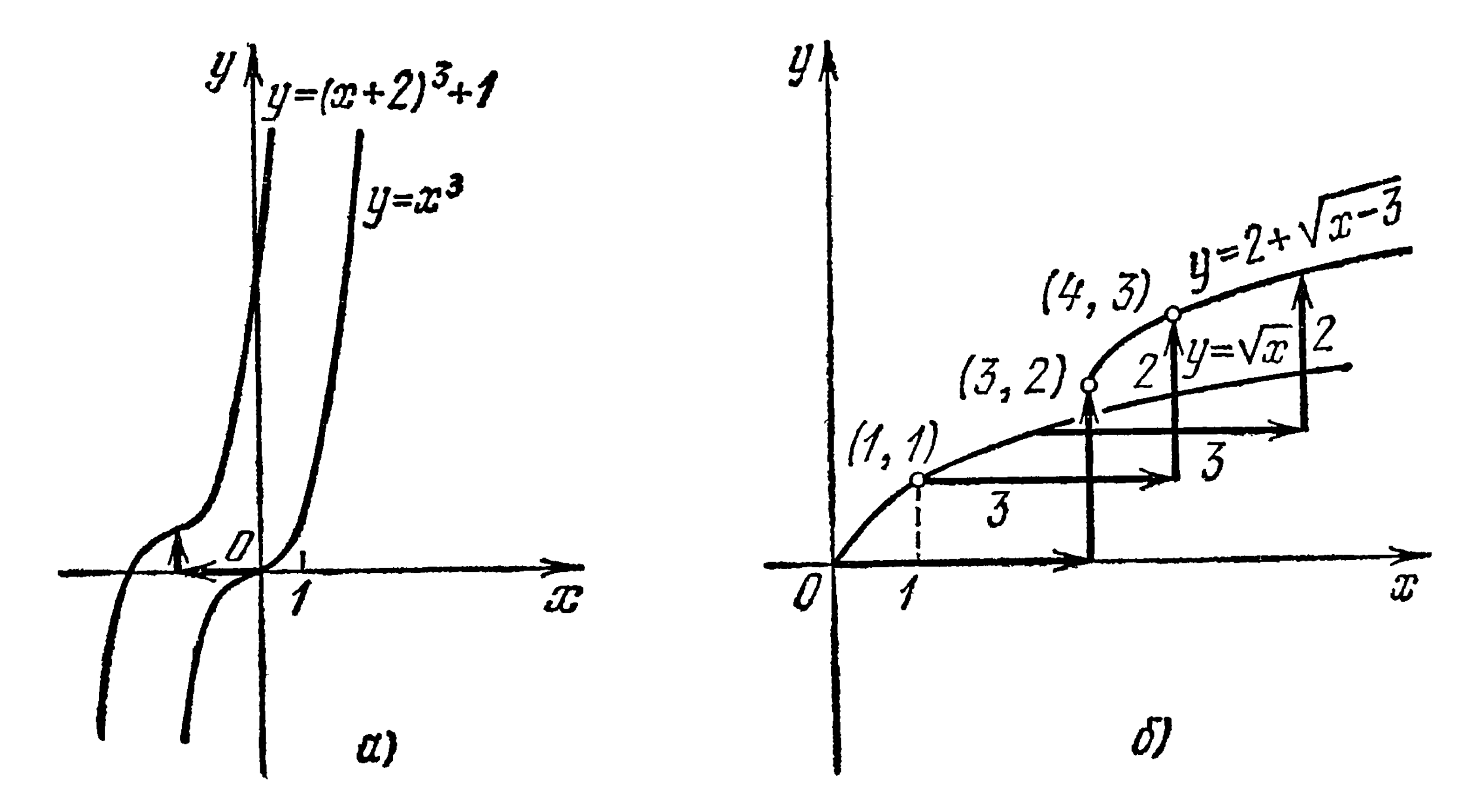


Рис. 42.

Решение. а) График функции $y=(x+2)^3+1$ получится из известного графика функции $y=x^3$ (рис. 30) сдвигом на две единицы влево и на одну единицу вверх (рис. 42, *а*).

б) Решение понятно из рис. 42, *б*. Область определения функции здесь — бесконечный интервал $[3, \infty)$.

В некоторых случаях вместо сдвига графика пользуются переносом начала координат (п. 8, рис. 6). Покажем, как это делается, на примере функции $y=(x-2)^2-1$, график которой уже был показан на рис. 41, *в*.

Возьмем точку O' (вершину параболы) с координатами (2, —1) (рис. 43) и перенесем в нее начало координат; при этом связь между старыми и новыми координатами по формулам (8.1) будет такая: $x-2=x'$, $y+1=y'$. В новых координатных осях уравнение параболы $y=(x-2)^2-1$ примет простейший вид $y'=x'^2$; парабола строится уже по ее новому уравнению непосредственно относительно новой системы координат.

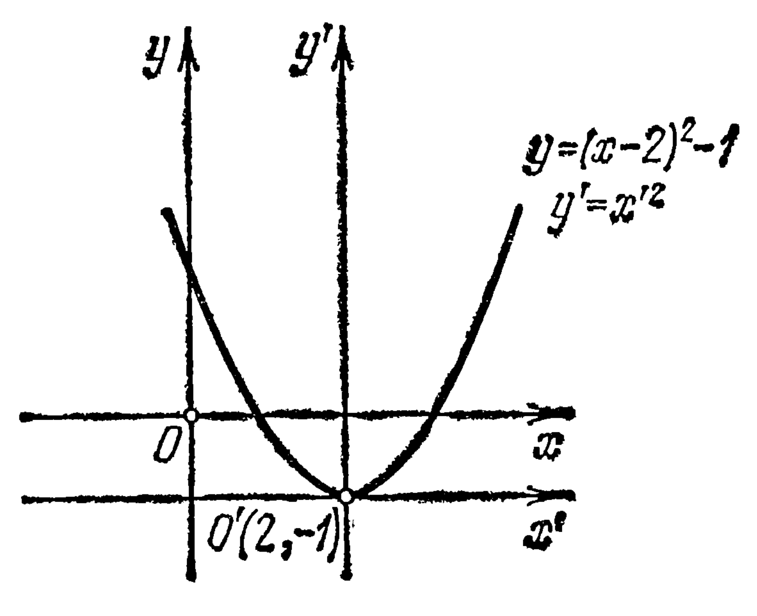


Рис. 43.

45. График квадратного трехчлена. Квадратным трехчленом мы назвали целую рациональную функцию второй степени (37.3):

$$y=ax^2+bx+c, \qquad (45.1)$$

где $a \neq 0$. Докажем, что графиком квадратного трехчлена является парабола, получаемая параллельными сдвигами (в направлениях координатных осей) из параболы $y=ax^2$. Для этого приведем выражение (45.1) путем простых тождественных преобразований к виду

$$y=a(x+\alpha)^2+\beta. \qquad (45.2)$$

Соответствующие преобразования, записанные ниже, известны как «выделение точного квадрата»:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (45.2')$$

Мы привели квадратный трехчлен к виду (45.2); при этом

$$\alpha=\frac{b}{2a}, \qquad \beta=-\frac{b^2-4ac}{4a} \qquad (45.3)$$

(эти выражения не следует запоминать, удобней всякий раз выполнять преобразование трехчлена (45.1) к виду (45.2) непосредственно).

Теперь видно, что график трехчлена (45.1) — парабола, равная параболе $y=ax^2$ и получаемая сдвигами параболы $y=ax^2$ в направлениях осей координат на α и β (с учетом знака α и β) соответственно. Вершина этой параболы помещается в точке $(-\alpha, \beta)$, ее осью служит прямая $x=-\alpha$. При $a>0$ вершина — наинизшая точка параболы, при $a<0$ — наивысшая.

Пример. Построить графики функций: а) $y=2x^2+4x-6$; б) $y=-x^2+4x$.

Решение. а) Преобразуем квадратный трехчлен:

$$y = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x+1)^2 - 8.$$

Вершина параболы — точка $O'(-1, -8)$, ось — прямая $x = -1$. Вершина здесь — наинизшая точка графика (минимум и наименьшее значение функции получаются при $x = -1$). Наметим еще точки пересечения графика с осями координат: при $x = 0$ имеем $y = -6$. Если $y = 0$, то $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. По указанным данным парабола построена на рис. 44, *а*.

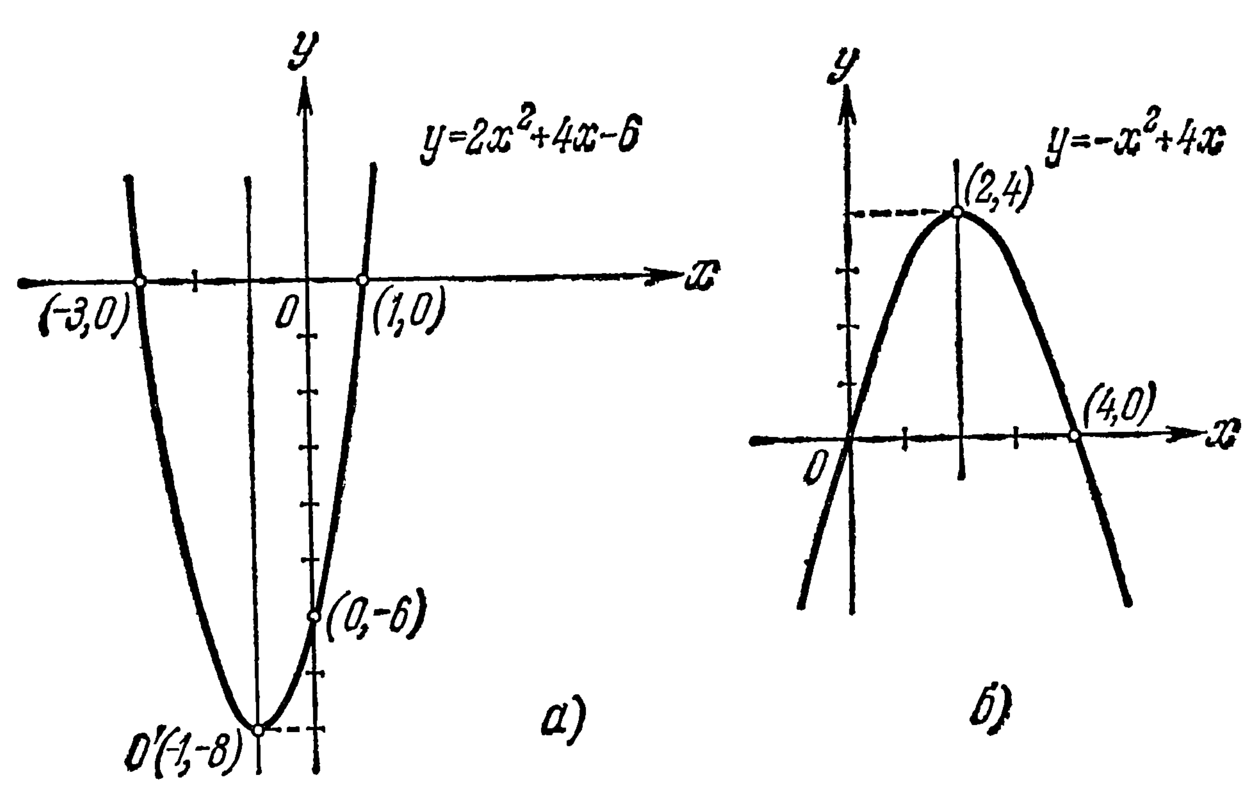


Рис. 44.

б) На рис. 44, *б* показан график второй функции $y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$.

Проведем теперь исследование квадратного трехчлена, т. е. выясним его свойства в зависимости от числовых значений коэффициентов a, b, c в его выражении (45.1).

Обозначим в равенстве (45.2′) величину $b^2 - 4ac$ через d:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a}; \qquad (45.4)$$

$d = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена. Свойства трехчлена (45.1) (и расположение его графика) определяются знаками дискриминанта d и старшего коэффициента a.

1) $a > 0$, $d < 0$. Вершина графика $O'(-b/(2a), -d/(4a))$ лежит выше оси Ox, поскольку $-d/(4a) > 0$; так как $a > 0$, то график расположен выше вершины O'; он лежит в верхней полуплоскости ($y > 0$; рис. 45, *а*).

2) $a < 0$, $d < 0$. Вершина $O'(-b/(2a)\ \ -d/(4a))$ лежит ниже оси Ox и является наивысшей точкой графика. Парабола расположена в нижней полуплоскости ($y < 0$; рис. 45, *б*).

3) $a > 0$, $d > 0$. Вершина O' лежит ниже оси Ox, парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1, x_2 (рис. 45, *в*).

4) $a<0$, $d>0$. Вершина O' лежит выше оси Ox, парабола снова пересекает ось Ox в двух точках x_1, x_2 (рис. 45, *г*).

5) $a>0$, $d=0$. Вершина лежит на самой оси Ox, парабола расположена в верхней полуплоскости (рис. 45, *д*).

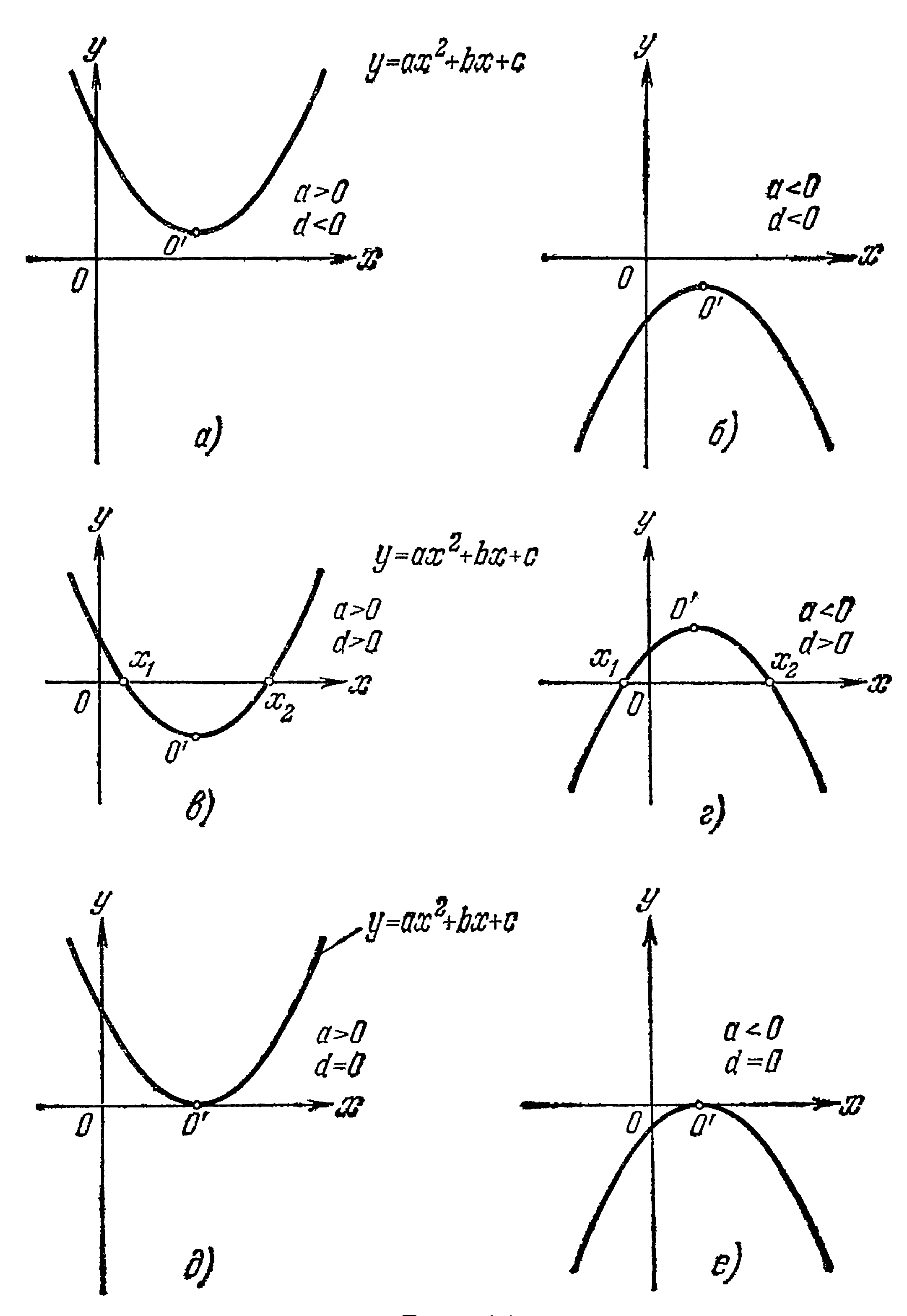


Рис. 45.

6) $a<0$, $d=0$. Вершина снова лежит на оси Ox, но парабола расположена в нижней полуплоскости (рис. 45, *е*).

Выводы. Если $d<0$, то график функции весь лежит либо выше (при $a>0$), либо ниже (при $a<0$) оси абсцисс. Функция $y=ax^2+bx+c$ с $d<0$ знакопостоянна. Если $d=0$, то положение отличается лишь тем, что вершина параболы лежит на оси Ox (функция знакопостоянна, но в одной точке обращается в нуль).

Если $d > 0$, то функция знакопеременная (график частью лежит ниже, частью выше оси Ox). Квадратный трехчлен с $d > 0$ имеет два корня (нуля) x_1, x_2. При $a > 0$ он отрицателен в интервале между корнями (рис. 45, *в*) и положителен вне этого интервала. При $a < 0$ он положителен в интервале между корнями (рис. 45, *г*) и отрицателен вне этого интервала.

Все эти сведения будут использованы в теории квадратных уравнений и при решении квадратных неравенств (пп. 61, 79).

46. График дробно-линейной функции. Так же как построение графика квадратного трехчлена полностью сводится к построению графика квадратичной функции $y = ax^2$, исследование дробно-линейной функции (37.5)

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0) \tag{46.1}$$

и построение ее графика сводятся к построению графика обратной пропорциональности (равнобочной гиперболы). Именно докажем, что график функции (46.1) получается параллельным сдвигом графика функции $y = k/x$ вдоль осей Ox и Oy. Для этого приведем тождественными преобразованиями выражение (46.1) к виду

$$y = \frac{k}{x+\alpha} + \beta. \tag{46.2}$$

Рассмотрим два случая: $a \neq 0$ и $a = 0$.

1) Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\,\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\,\frac{\left(x+\frac{d}{c}\right)+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}},$$

т. е. мы привели выражение y к виду (46.2) при

$$\alpha = \frac{d}{c}, \quad \beta = \frac{a}{c}, \quad k = \frac{bc-ad}{c^2}$$

(запоминать эти формулы не нужно).

2) Если $a = 0$, то преобразование проводится еще проще:

$$y = \frac{b}{cx+d} = \frac{b/c}{x+\frac{d}{c}} = \frac{k}{x+\alpha}.$$

Пример. Построить графики функций:

а) $y = \frac{2}{4x+3}$; б) $y = \frac{x+1}{x+3}$; в) $y = \frac{3x+1}{2x-5}$.

Решение. а) Перепишем y в виде $y = \frac{1/2}{x+3/4}$.

График получается из графика функции $y = \frac{1/2}{x}$ сдвигом влево на $3/4$ единицы; его асимптотами будут прямые $y = 0$ и $x = -3/4$; для построения графика использована также точка его пересечения с осью Oy: $x = 0$, $y = 2/3$. График изображен на рис. 46, *а*.

б) Имеем $y = \frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$.

Асимптоты графика — линии $x = -3$ и $y = 1$; точки пересечения с осями координат: $(0,\ 1/3)$ и $(-1,\ 0)$. График построен на рис. 46, *б*.

в) График показан на рис. 46, *в*.

Замечание. Условие $ad-bc\neq 0$ (46.1) имеет простой смысл: если $ad-bc=0$, то числитель и знаменатель в записи формулы (46.1), задающей функцию, пропорциональны и при всех значениях $x\neq -d/c$ функция сводится к постоянной: $y=a/c$. Этот случай естественно исключить.

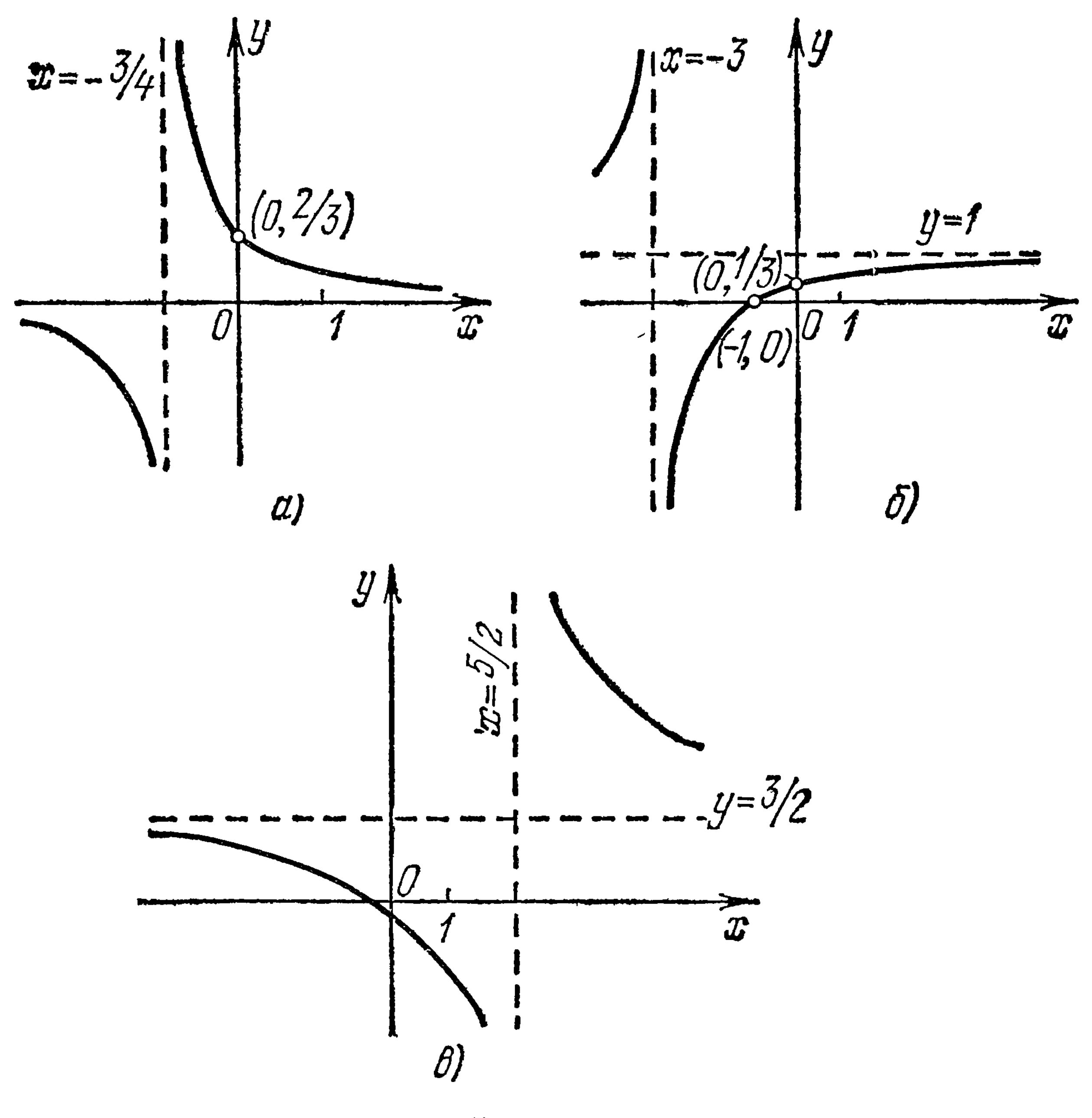


Рис. 46.

47. Преобразование симметрии. Сжатие и растяжение графика. Если имеется график функции $y=f(x)$, то нетрудно построить графики функций $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$. Эти графики будут симметричны с графиком функции $y=f(x)$ относительно оси Ox, оси Oy, начала координат соответственно. Рассмотрим каждый случай отдельно.

1) $y=-f(x)$; точки этого графика будут симметричны с точками графика функции $y=f(x)$ относительно оси Ox (каждой точке $(x, f(x))$ отвечает точка $(x, -f(x))$, симметричная с ней).

2) $y=f(-x)$; в этом случае область определения функции $y=f(-x)$ состоит из точек оси Ox, симметричных с точками области определения функции $y=f(x)$ относительно начала координат. Например, функция $y=\sqrt{x}$ определена при $x\geqslant 0$, функция же $y=\sqrt{-x}$ определена при $x\leqslant 0$. Графики функций $y=f(x)$ и $y=f(-x)$ состоят из попарно симметричных относительно оси Oy точек $(x, f(x))$ и $(-x, f(x))$.

3) $y=-f(-x)$; точки этого графика будут соответственно расположены симметрично точкам $(x,\ f(x))$ графика $y=f(x)$ относительно начала координат.

На рис. 47 показан график некоторой функции $y=f(x)$ и графики функций $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$.

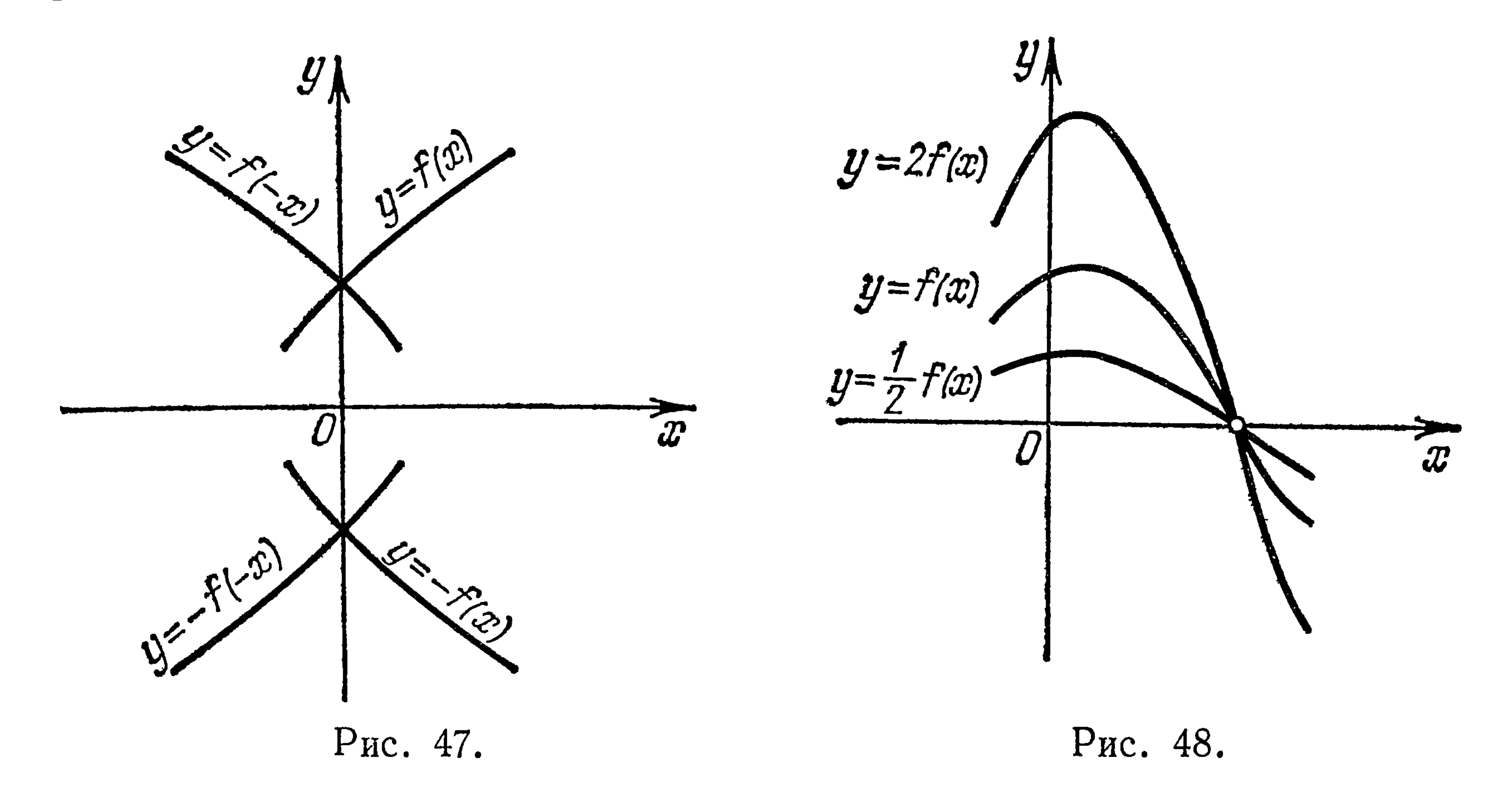


Рис. 47. Рис. 48.

По графику функции $y=f(x)$ можно также построить график функции вида

$$y=\alpha f(x), \qquad \alpha=\text{const}\neq 0.$$

Положим для определенности $\alpha>0$ (случай $\alpha<0$ сведется к случаю положительного α после преобразования симметрии рассмотренного только что).

Ясно, что график функции $y=\alpha f(x)$ получится из графика функции $y=f(x)$ умножением всех ординат на одно и то же число α (так получались, например, графики функций $y=ax^2$ по графику функции $y=x^2$). Если $\alpha>1$ (например, $\alpha=2$, как на рис. 48), то можно сказать, что график растягивается в α раз в направлении оси Oy. При $\alpha<1$ (на рис. 48 показан случай $\alpha=1/2$) «растяжение» в α раз удобней назвать сжатием (в $1/\alpha$ раз).

Наконец, покажем еще, как по графику функции $y=f(x)$ найти график функции $y=f(\alpha x)$. Пусть сначала $\alpha>1$. Тогда точкам графика $y=f(x)$ с координатами $(x,\ y)$ можно поставить в соответствие точки графика $y=f(\alpha x)$ с теми же ординатами y и абсциссами x/α в α раз меньшими, чем абсциссы x графика $y=f(x)$. Так, в случае $\alpha=2$ мы будем получать равные значения функций $y=f(x)$ и $y=f(2x)$, выбирая для второй вдвое меньшие абсциссы, чем для первой. При $0<\alpha<1$ действие деления абсцисс x на α приведет не к уменьшению (сжатию), а к увеличению (растяжению) абсцисс. На рис. 49 показаны график

некоторой функции $y=f(x)$ (заданной на сегменте $[a, b]$) и графики функций $y=f(2x)$, $y=f(x/2)$. Заметим, что сама область оси Ox, в которой задана функция $y=f(x)$, соответственно растягивается или сжимается.

Рассмотренные преобразования могут осуществляться одновременно в разных сочетаниях. Так, чтобы по графику функции $y=f(x)$ построить график функции $y=-3f(2x)$, следует выполнить преобразования: 1) сжатия в направлении Ox в два раза, 2) растяжения в направлении оси Oy в три раза, 3) отражения относительно оси Ox.

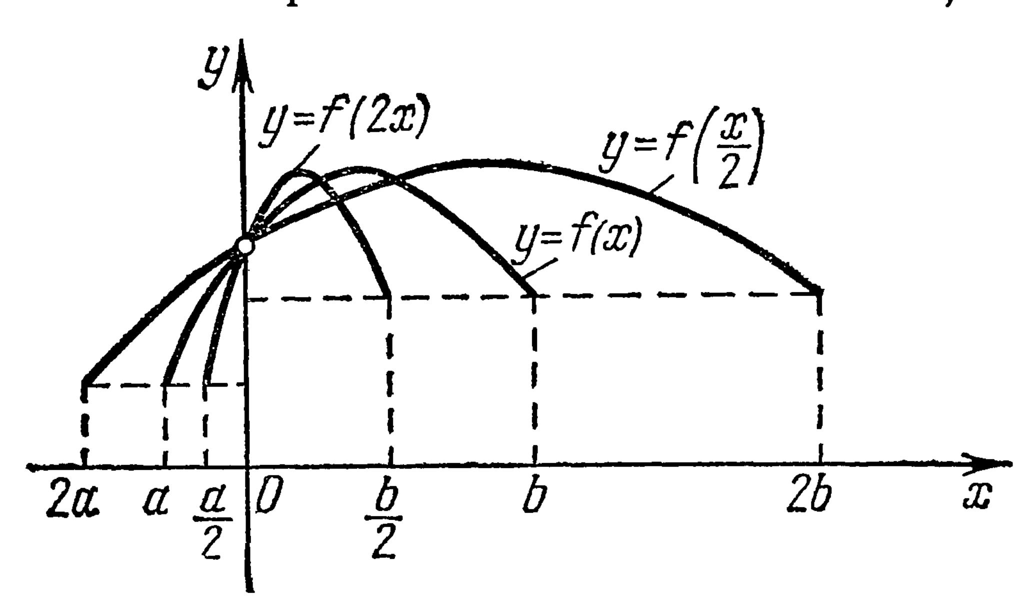


Рис. 49.

Преобразования сжатия (растяжения) в направлениях осей Ox и Oy встретятся, например, при построении графиков некоторых тригонометрических функций (п. 112).

48. Построение графиков функций $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=|f(|x|)|$. Если дан график функции $y=f(x)$, то легко можно получить и графики функций $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=|f(|x|)|$.

1) $y=|f(x)|$; ясно, что область определения у этой функции та же, что и у функции $y=f(x)$. Если для данного x значение $f(x)\geqslant 0$, то ординаты обоих графиков совпадают, графики имеют общую точку. При $f(x)<0$, в силу определения модуля (п. 6), $|f(x)|=-f(x)$ и точки графиков симметричны относительно оси Ox. Таким образом, все точки графика функции $y=f(x)$, лежащие выше оси абсцисс и на ней, принадлежат также и графику функции $y=|f(x)|$; все точки графика функции $y=f(x)$, лежащие ниже оси абсцисс, нужно зеркально отразить относительно этой оси, чтобы получить точки графика функции $y=|f(x)|$, соответствующие тем же абсциссам (рис. 50).

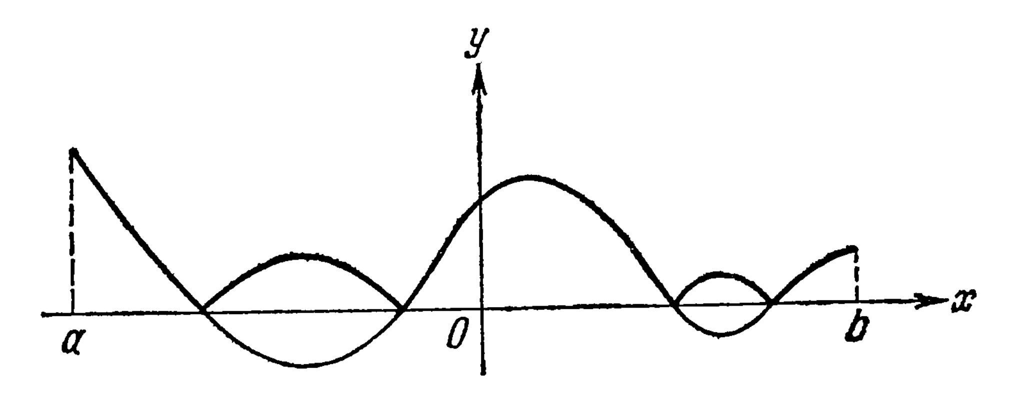


Рис. 50.

2) Для построения графика функции $y=f(|x|)$ заметим, что при всех $x\geqslant 0$ будет $|x|=x$ и, значит, $f(|x|)=f(x)$. Таким образом, все точки графика функции $y=f(x)$, расположенные в правой полуплоскости, будут принадлежать также и графику функции $y=f(|x|)$. Далее, функция $y=f(|x|)$ — четная (п. 33).

В самом деле, $|-x|=|x|$ и, значит, $f(|-x|)=f(|x|)$. Поэтому для построения графика функции $y=f(|x|)$ по графику функции $y=f(x)$ нужно сохранить без изменения часть данного графика, расположенную в правой полуплоскости, и зеркально отразить

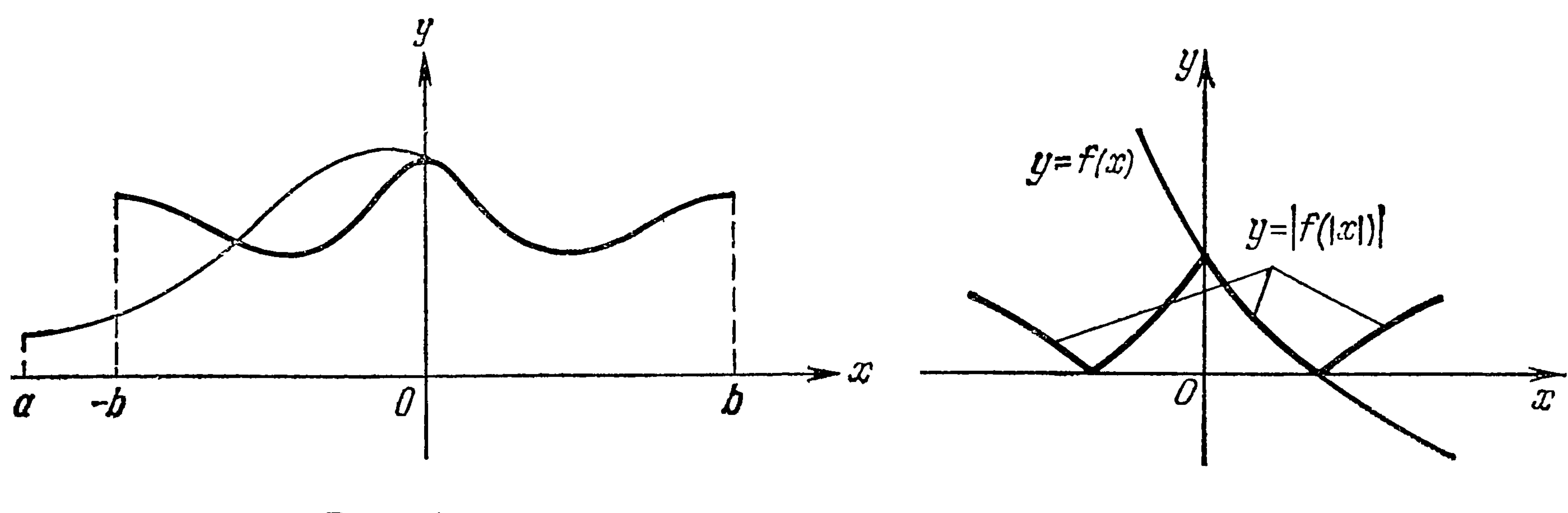


Рис. 51.

Рис. 52.

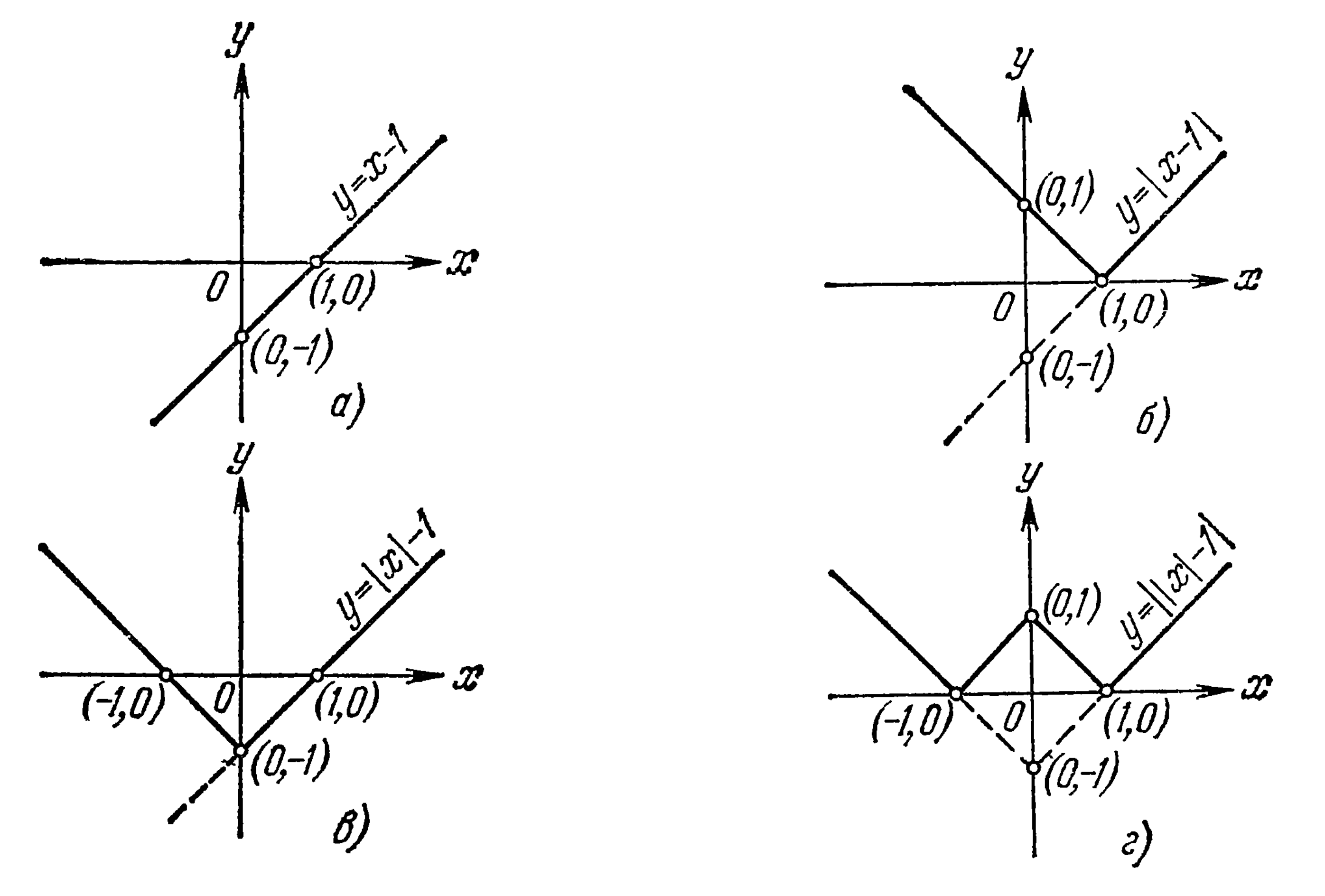


Рис. 53.

ее относительно оси ординат (при этом часть графика $y=f(x)$, расположенную в левой полуплоскости, нужно отбросить). Соответствующая иллюстрация дается на рис. 51.

3) Для построения графика функции $y=|f(|x|)|$ следует последовательно перейти от графика функции $y=f(x)$ к графику функции $y=f(|x|)$, а затем от него — к графику $y=|f(|x|)|$. Пример показан на рис. 52.

Пример 1. Построить графики следующих функций: а) $y=x-1$; б) $y=|x-1|$; в) $y=|x|-1$; г) $y=||x|-1|$.

Решение. Каждая из заданных функций определена на всей оси абсцисс. В качестве основного возьмем график функции $y=x-1$ и из него подходящим преобразованием получим все другие требуемые графики.

а) График линейной функции $y=x-1$ изображен на рис. 53, *а*.

б) Для построения графика функции $y=|x-1|$ следует часть графика функции $y=x-1$, лежащую ниже оси Ox, зеркально отразить в оси Ox (рис. 53, *б*).

в) В соответствии с общим правилом построения графика функции $y=f(|x|)$ по графику функции $y=f(x)$ поступаем так:

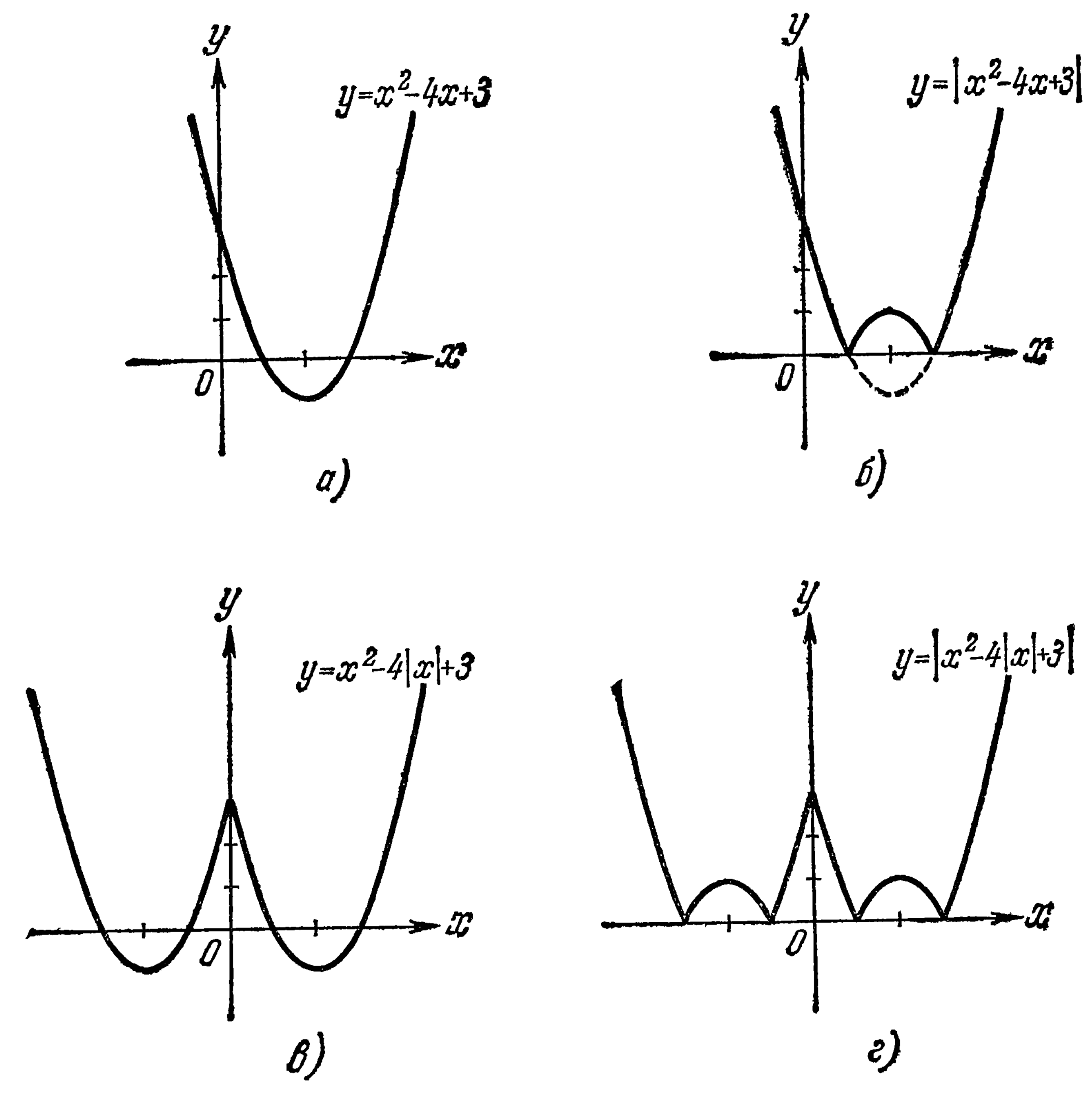


Рис. 54.

берем график функции $y=x-1$; часть его, лежащую левее оси Oy, отбрасываем, а часть, лежащую правее оси Oy, зеркально отражаем в оси Oy. В результате получаем график функции $y=|x|-1$ (рис. 53, *в*).

г) Пользуясь уже имеющимся графиком функции $y=|x|-1$, получаем график $y=||x|-1|$, как показано на рис. 53, *г*.

Пример 2. Построить графики следующих функций: а) $y=x^2-4x+3$; б) $y=|x^2-4x+3|$; в) $y=x^2-4|x|+3$; г) $y=|x^2-4|x|+3|$.

Решение. Каждая из данных функций определена на всей оси абсцисс. В качестве основного возьмем график функции $y=x^2-4x+3$. а) Перепишем выражение, задающее функцию,

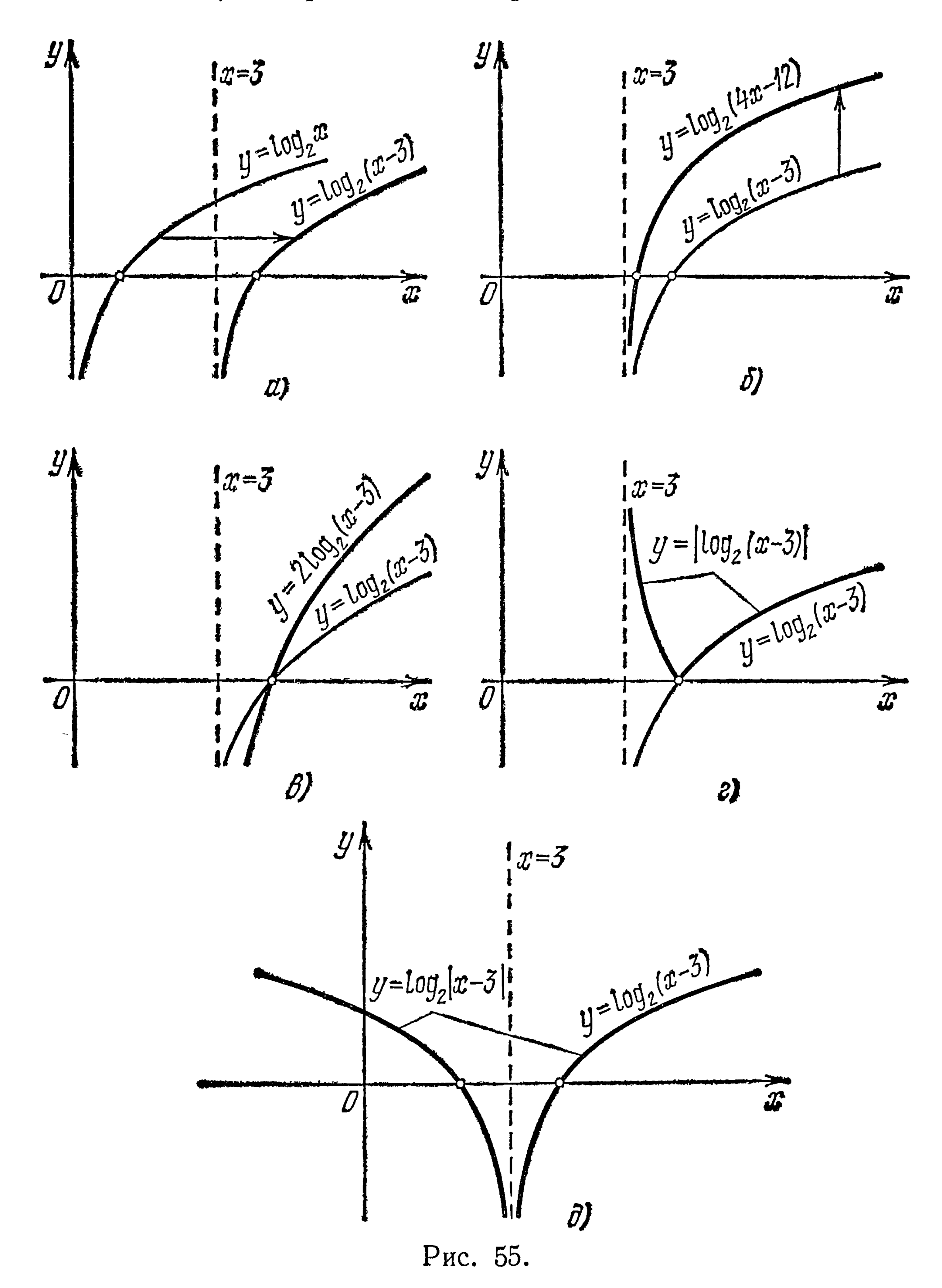


Рис. 55.

в виде $y=(x-2)^2-1$; график функции — парабола с вершиной $(2, -1)$ (рис. 54, *а*).

б) График функции $y=|x^2-4x+3|$ показан на рис. 54, *б*.

в) Заметим, что функцию $y=x^2-4|x|+3$ можно представить в виде $y=|x|^2-4|x|+3$ (так как $x^2=|x|^2$); график этой функции изображен на рис. 54, *в*.

г) График функции $y=|x^2-4|x|+3|$ показан на рис. 54, *г*.

Пример 3. Построить графики следующих функций: а) $y=\log_2(x-3)$; б) $y=\log_2(4x-12)$; в) $y=2\log_2(x-3)$; г) $y=|\log_2(x-3)|$; д) $y=\log_2|x-3|$.

Решение. а) График функции $y=\log_2(x-3)$ получается из графика $y=\log_2 x$ сдвигом на три единицы вправо. На рис. 55, *а* показаны оба указанных графика.

б) Записываем функцию в виде

$$y=\log_2(4x-12)=\log_2 4+\log_2(x-3)=2+\log_2(x-3).$$

Ее график получается из графика $y=\log_2(x-3)$ сдвигом на две единицы вверх (рис. 55, *б*).

в) График $y=2\log_2(x-3)$ получается растяжением в направлении оси Oy в два раза (рис. 55, *в*) из графика $y=\log_2(x-3)$.

г) $y=|\log_2(x-3)|$; построение понятно из рис. 55, *г*.

д) $y=\log_2|x-3|$; построение понятно из рис. 55, *д*.

49. Сложение графиков. Иногда функция, график которой должен быть построен, представляется как сумма двух простейших функций, графики которых нам знакомы или легко могут быть построены. В этом случае можно применить прием графического сложения ординат этих графиков (для краткости говорят просто о *сложении графиков*). Покажем этот прием на примерах.

Пример 1. Построить график функции $y=x^3-2x+2$.

Решение. Можно представить данную функцию как сумму функций $y=x^3$ и $y=-2x+2$, графики которых нам хорошо знакомы. Они изображены на рис. 56 тонкими линиями: это — прямая $y=-2x+2$ и кубическая парабола $y=x^3$. Далее производится суммирование ординат: к ординатам точек кубической параболы прибавляются (с учетом знака!) ординаты точек прямой. При выполнении этой операции удобно пользоваться мерительным циркулем; следует использовать наиболее важные и характерные точки каждого из графиков (в нашем примере — вершину $O(0, 0)$ параболы, точки пересечения прямой с осями и т. д.).

Итогом построения служит график, показанный жирной линией. Мы можем многое сказать о функции: она имеет максимум и минимум, обращается в нуль в одной точке и т. д. Положение этих характерных точек ее графика мы могли бы найти приближенно по чертежу.

Пример 2. Построить график функции $y=2^x-2x$.

Решение. График данной функции можно получить сложением графиков показательной функции $y=2^x$ (п. 42) и линейной функции $y=-2x$ (п. 38). Это сделано на рис. 57.

График пересекает ось Ox в точках $x=1$, $x=2$, являющихся нулями функции $y=2^x-2x$.

Обратим еще внимание на то, что прямая $y=-2x$ является асимптотой графика (так как при x, стремящемся к минус бесконечности, разность между значениями функций $y=2^x-2x$ и $y=-2x$ стремится к нулю). Из построения видно, что функция имеет

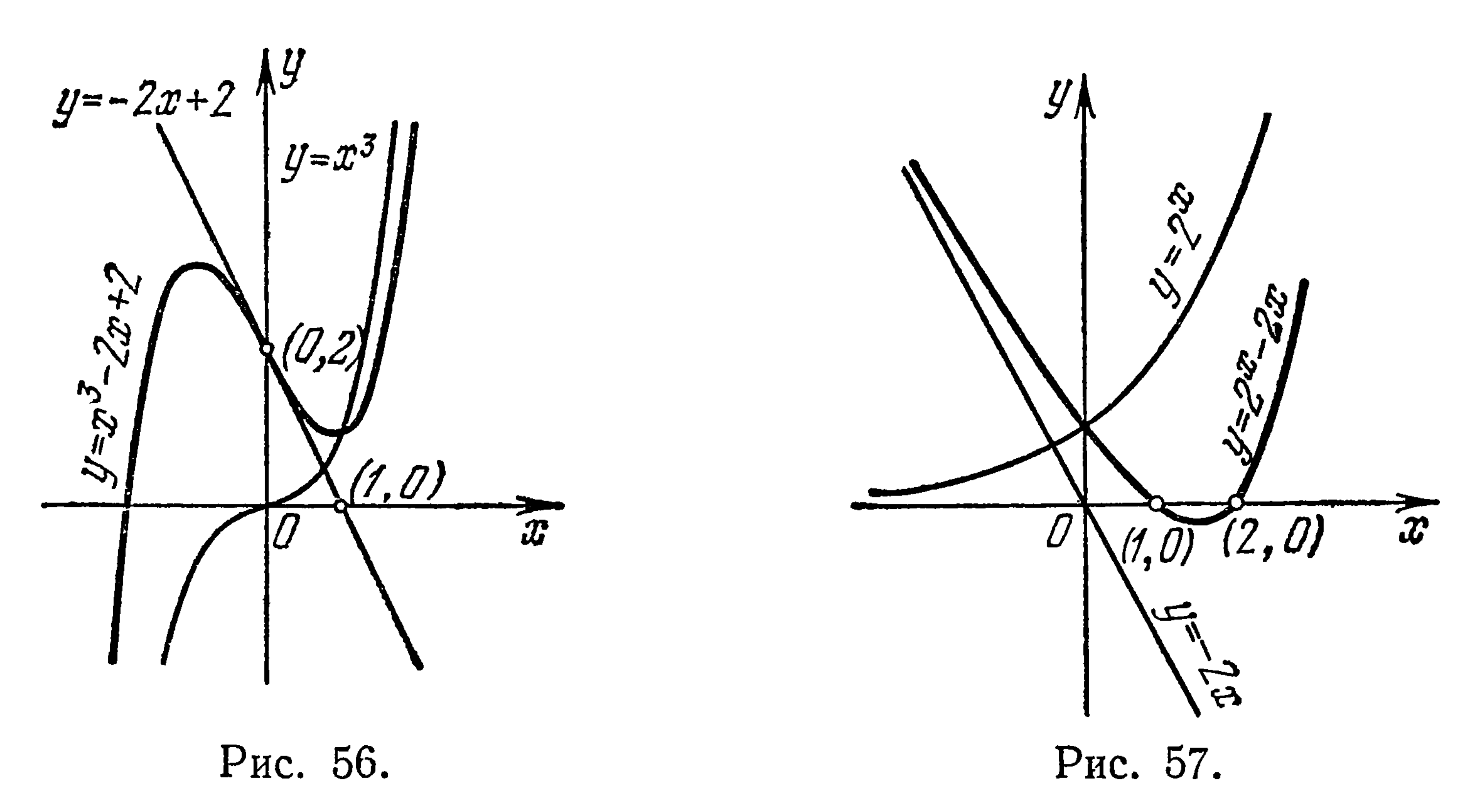


Рис. 56. Рис. 57.

точку минимума, найти ее точное положение для нас затруднительно.

Пример 3. Построить график функции $y=x^2-x^4$.

Решение. График может быть построен вычитанием ординат графика $y=x^4$ из ординат графика $y=x^2$ (рис. 58). В данном

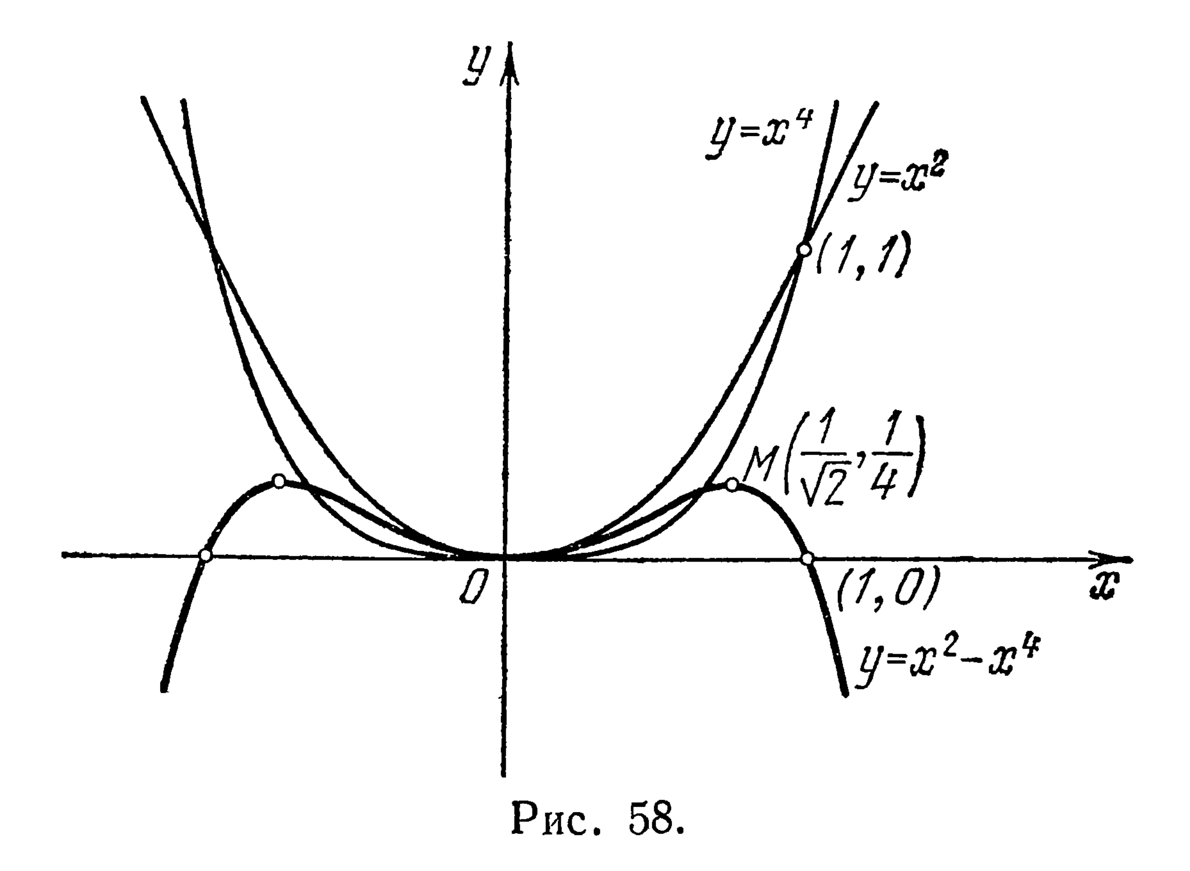


Рис. 58.

случае полезно дополнить это построение некоторым общим исследованием свойств функции $y=x^2-x^4$. Ясно, что функция определена для всех значений x и является четной. Она обращается в нуль при $x=0$, $x=\pm 1$. Как видно из построения графика методом вычитания, следует ожидать у функции наличия двух точек максимума. В данном случае их нетрудно найти;

преобразуем выражение функции:

$$y=x^2-x^4=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-x^2+x^4\right)=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Теперь видно, что наибольшее значение $y={}^1/_4$ функция имеет при $x=\pm 1/\sqrt{2}$. Точка $x=0$ является точкой минимума данной функции (но значение функции в этой точке, равное нулю, не есть ее наименьшее значение).

Упражнения

1. Построить графики функций: $y=x^3+2$; $y=(x-1)^3$; $y=2^x+1$.
2. Построить графики функций: а) $y=x^2-6x+1$; б) $y=x-4x^2$.
3. Построить графики функций:
а) $y=x^2+5x+6$; б) $y=|x^2+5x+6|$; в) $y=x^2+5|x|+6$; г) $y=|x^2+5|x|+6|$.
4. Построить графики функций:
а) $y=\log_3(x+2)$; б) $y=\log_3(3x+6)$; в) $y=3\log_3(x+2)$; г) $y=|\log_3(x+2)|$; д) $y=\log_3|x+2|$; е) $y=|\log_3|x+2||$.
5. Построить график функции $y=x^3+3^{-x}$.

§ 4. Некоторые сведения о рациональных функциях

50. Целые и дробные рациональные функции. Деление многочленов. В п. 37 мы определили понятия целой и дробной рациональной функции от x; ц. р. ф. степени n задавались в виде

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \qquad (50.1)$$

а д. р. ф.— как частное от деления двух ц. р. ф.:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{S_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}. \qquad (50.2)$$

Ц. р. ф. определена при всех значениях аргумента, а д. р. ф. не определена только в нулях знаменателя.

При сложении, вычитании, умножении и делении рациональных функций вновь получаются рациональные функции. Здесь мы остановимся на вопросе о делении двух целых рациональных функций (или о делении двух многочленов от x).

Напомним сначала определение частного и остатка при делении натуральных чисел (п. 6): если a и b — два любых натуральных числа, то всегда можно найти два других числа q и r такие, что

$$a=bq+r$$

и $r<b$. Число q называется *частным*, а r — *остатком* при делении a на b.

Весьма сходным образом мы определим теперь частное и остаток при делении двух многочленов. Пусть

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

и

$$S_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

— два произвольных многочлена. Назовем два других многочлена $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ P_n(x) = S_m(x)\,Q(x) + R(x), \\ &2)\ \text{степень } R(x) \text{ меньше степени } S_m(x), \end{aligned}\right\} \qquad (50.3)$$

соответственно *частным* и *остатком* при делении многочленов $P_n(x)$ и $S_m(x)$. Заметим, что, вместо условия «остаток меньше делителя» в случае чисел, для многочленов вводится условие «степень остатка меньше степени делителя».

В этом определении подразумевается, что равенство (50.3) имеет тождественный характер: если произвести действия умножения и сложения многочленов в его правой части, то получится многочлен с теми же коэффициентами при соответствующих степенях x, что и у $P_n(x)$.

Пример 1. В записи

$$x^3 + 3 = (x^2 - x + 1)(x + 1) + 2$$

$x + 1$ — частное, а 2 — остаток от деления $x^3 + 3$ на $x^2 - x + 1$.

Пример 2. В записи

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$x^2 + 1$ — частное от деления $x^4 - 1$ на $x^2 - 1$, а остаток равен нулю

Определение. Говорят, что многочлен $P_n(x)$ *делится* на многочлен $S_m(x)$ *нацело*, если существует многочлен $Q(x)$ такой, что

$$P_n(x) = S_m(x)\,Q(x)$$

(иначе: *остаток* при делении $P_n(x)$ на $S_m(x)$ *равен нулю*).

Следует поставить вопросы: всегда ли для двух многочленов $P_n(x)$ и $S_m(x)$ существуют частное и остаток, единственным ли образом определены частное и остаток? Не приводя доказательства, даем ответ на эти вопросы: каковы бы ни были два многочлена $P_n(x)$ и $S_m(x)$ ($S_m(x) \not\equiv 0$), существуют единственным образом определенные многочлены $Q(x)$, $R(x)$, являющиеся частным и остатком при делении $P_n(x)$ на $S_m(x)$.

Так как, очевидным образом, степень многочлена-произведения равна сумме степеней многочленов-сомножителей, то нетрудно сделать вывод: при $n \geqslant m$ степень частного от деления $P_n(x)$ на $S_m(x)$ равна разности степеней $n - m$; при $n < m$ частное тождественно равно нулю; в последнем случае

$$P_n(x) = S_m(x) \cdot 0 + P_n(x), \qquad \text{т. е.} \qquad R(x) = P_n(x)$$

(аналогично тому, как при делении 5 на 7 получим: $5 = 0 \cdot 7 + 5$).

При $n \geqslant m$ наше утверждение о степени $Q(x)$ выясняется из сравнения степеней многочленов в обеих частях равенства

$$P_n(x) = S_m(x)\,Q(x) + R(x).$$

Так как степень $R(x)$ по определению меньше m, то она также меньше степени $S_m(x)\,Q(x)$. Степень $S_m(x)\,Q(x)$ должна равняться степени $P_n(x)$, откуда степень $Q(x)$ равна $n-m$.

Напомним на примере метод деления многочленов (деление «углом»).

Пример 3. Найти частное и остаток при делении

$$P_4(x) = 2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2 \quad \text{на} \quad S_2(x) = x^2 + 3x - 4.$$

Решение.

$$\begin{array}{rl|l} P_4(x) = & 2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2 & x^2 + 3x - 4 = S_2(x) \\ - & \underline{2x^4 + 6x^3 - 8x^2} & 2x^2 + 5x - 1 = Q(x) \\ & 5x^3 + 14x^2 - 21x - 2 & \\ - & \underline{5x^3 + 15x^2 - 20x} & \\ & -x^2 - x - 2 & \\ - & \underline{-x^2 - 3x + 4} & \\ & 2x - 6 = R(x). & \end{array}$$

Ограничимся пояснением первых шагов: делим старший член делимого на старший член делителя; получаем $2x^2$. Умножаем делитель на $2x^2$ и результат подписываем под делимым. Вычитаем подписанный результат из делимого и снова делим старший член разности на старший член делителя ... Процесс заканчивается, когда очередной остаток при вычитании имеет степень, меньшую степени делителя (или просто равен нулю).

Таким образом,

$$\underbrace{2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2}_{P_4(x)} = \underbrace{(x^2 + 3x - 4)}_{S_2(x)}\,\underbrace{(2x^2 + 5x - 1)}_{Q(x)} + \underbrace{2x - 6}_{R(x)}.$$

Если обе части равенства $P(x) = S(x)\,Q(x) + R(x)$, определяющего частное и остаток от деления $P(x)$ на $S(x)$, разделить почленно на $S(x)$, то получим равенство

$$\frac{P(x)}{S(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{S(x)},$$

представляющее дробную рациональную функцию $\frac{P(x)}{S(x)}$ в виде суммы целой части $Q(x)$ и дроби $\frac{R(x)}{S(x)}$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя (*правильная рациональная дробь*). Это сходно с разложением числовой дроби (рационального числа) на целую и дробную части.

51. Схема Горнера. Теорема Безу. Рассмотрим более подробно процесс деления многочлена $P_n(x)$ на линейный двучлен вида $x-\alpha$. В этом случае деление упрощается и может быть проведено по специальной схеме, называемой обычно *схемой Горнера*.

Запишем основное равенство, определяющее частное и остаток, в случае делителя вида $x-\alpha$; частное имеет степень $n-1$, а остаток — нулевую степень, т. е. просто является числом:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+r. \quad (51.1)$$

Как уже указывалось, это равенство — тождественное, многочлены в его левой и правой частях совпадают; раскрыв скобки, получим равенства, выражающие совпадение коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned} a_0&=b_0,\\ a_1&=-\alpha b_0+b_1,\\ a_2&=-\alpha b_1+b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_{n-1}&=-\alpha b_{n-2}+b_{n-1},\\ a_n&=-\alpha b_{n-1}+r. \end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned} b_0&=a_0,\\ b_1&=a_1+\alpha b_0,\\ b_2&=a_2+\alpha b_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ b_{n-1}&=a_{n-1}+\alpha b_{n-2},\\ r&=a_n+\alpha b_{n-1}. \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов частного и остатка располагают в такой таблице:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α	$a_0=b_0$	αb_0+a_1	αb_1+a_2	...	$\alpha b_{n-2}+a_{n-1}$	$\alpha b_{n-1}+a_n=r$

Верхняя строка таблицы заполняется сразу; в нижней строке помещаются коэффициенты частного и остаток; она заполняется постепенно, слева направо. В каждой клетке нижней строки записывается сумма коэффициентов из верхней строки и умноженного на α результата, записанного в соседней слева клетке нижней строки.

Пример 1. Выполнить деление многочлена x^3+4x^2-3x+5 на $x-2$ по схеме Горнера.

Решение. Составляем таблицу:

	1	4	—3	5
2	1	6	9	23

Частное равно x^2+6x+9, остаток $r=23$.

Пример 2. Разделить, пользуясь схемой Горнера, многочлен x^4+6x^2-5x-3 на двучлен $x+1$.

Здесь $\alpha=-1$. В остальном решение выполняется так же:

	1	0	6	−5	−3
−1	1	−1	7	−12	9

Частное равно $x^3-x^2+7x-12$, остаток равен 9.

Замечательно, что остаток от деления многочлена на двучлен $x-\alpha$ может быть найден независимо от выполнения деления, без отыскания частного. Действительно, положим в равенстве

$$P_n(x)=(x-\alpha)\,Q(x)+r$$

$x=\alpha$. Так как равенство тождественное, то оно удовлетворится и мы найдем

$$P_n(\alpha)=r.$$

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен вида $x-\alpha$ равен значению многочлена при $x=\alpha$:

$$r=P_n(x)|_{x=\alpha}.$$

Как следствие отсюда вытекает

Теорема Безу. *Многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $x-\alpha$ в том и только в том случае, когда α — корень многочлена.*

Пример 3. Найти остаток от деления многочлена x^3+6x^2-2x+5 на двучлен $x-3$ (не выполняя деления).

Решение. Значение остатка находим так:

$$x^3+6x^2-2x+5\,|_{x=3}=27+54-6+5=80.$$

Пример 4. При каком значении λ многочлен

$$P(x)=x^4+6x^2+\lambda x+6$$

разделится на $x+2$ нацело?

Решение. Для того чтобы деление выполнялось нацело, в силу теоремы Безу необходимо и достаточно, чтобы число -2 было нулем многочлена. Имеем

$$16+24-\lambda\cdot 2+6=46-2\lambda,$$

откуда находим: многочлен разделится на $x+2$ нацело, если $\lambda=23$ (и только при этом условии).

Пользуясь теоремой Безу, легко выяснить, при каких условиях выражения вида $(a\neq 0)$

$$x^n-a^n, \qquad x^n+a^n$$

будут делиться на $x-a$, $x+a$ без остатка.

1) $x^n - a^n$ делится на $x-a$ при любом n. Действительно,

$$x^n - a^n |_{x=a} = a^n - a^n = 0,$$

откуда делимость вытекает в силу теоремы Безу.

2) $x^n - a^n$ делится на $x+a$ при четном n и не делится при нечетном n. Действительно, находим

$$x^n - a^n |_{x=-a} = (-a)^n - a^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное}, \\ -2a^n, & \text{если } n \text{ — нечетное}, \end{cases}$$

откуда и следует наше утверждение.

3) $x^n + a^n$ делится на $x+a$ при нечетном n и не делится при четном n; $x^n + a^n$ не делится на $x-a$ ни при каком n.

Доказательство аналогично и предоставляется читателю.

52. Нули многочлена. Разложение многочлена на множители. Ц. р. ф. или многочлен можно рассматривать не только при действительных значениях x, но и при любых комплексных значениях z; в самом деле, все действия, необходимые для получения значения многочлена

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{52.1}$$

имеют смысл при любом комплексном z (мы сохраним обозначение x для действительной части $z = x + iy$). Разумеется, при этом и значения, принимаемые многочленом, будут, вообще говоря, комплексными числами. Однако вполне возможно, что при некоторых комплексных (мнимых) значениях z многочлен не только будет иметь действительные значения, но может обращаться в нуль. В дальнейшем, в гл. V, изучая алгебраические уравнения, мы будем искать все их корни, а не только действительные. Поэтому полезно сейчас рассмотреть вопрос о значениях многочлена $P_n(z)$ при комплексных значениях z.

Даламбером была сделана попытка доказать, а Гауссом окончательно доказано важное предложение:

Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет в комплексной области хотя бы один корень.

Это предложение, устанавливающее существование корня многочлена (быть может, не действительного), носит название *основной теоремы алгебры*. Теорема эта верна даже и для многочленов с комплексными коэффициентами, но мы ограничиваемся только случаем многочленов с действительными коэффициентами. Доказательства теоремы Гаусса мы привести не можем.

В п. 15, говоря о комплексно сопряженных числах, мы отметили, что сумма, разность, произведение чисел, комплексно сопряженных с данными, комплексно сопряжены, соответственно,

с их суммой, разностью, произведением. Отсюда вытекает утверждение:

Значения многочлена (52.1) *при комплексно сопряженных значениях* z, $\bar{z}$ *сопряжены между собой.*

Доказательство. Значения $P_n(z)$, $P_n(\bar{z})$, выражаемые равенствами

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$P_n(\bar{z}) = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \ldots + a_n,$$

будут сопряжены, так как получаются одинаковыми действиями над сопряженными числами. В самом деле, a_k — действительные коэффициенты, и они, следовательно, сами себе сопряжены: $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_1 = a_1$, ..., $\bar{a}_n = a_n$. Поэтому можно написать

$$P_n(\bar{z}) = \bar{a}_0 \bar{z}^n + \ldots + \bar{a}_n,$$

и из сравнения $P_n(z)$ и $P_n(\bar{z})$ получим $P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$.

Следствие. *Если многочлен* $P_n(z)$ *имеет комплексный корень* $z = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, *то и сопряженное число* $\alpha - \beta i$ *является его корнем.*

В самом деле, если $P_n(\alpha + \beta i) = 0$, то и $P_n(\alpha - \beta i) = P_n(\overline{\alpha + \beta i}) = \bar{0} = 0$. Пусть теперь α — действительный корень многочлена (52.1). По теореме Безу разделим $P_n(z)$ на $z - \alpha$ и напишем

$$P_n(z) = (z - \alpha) P_{n-1}(z).$$

Если $n \geqslant 2$, то многочлен $P_{n-1}(z)$ также обязан иметь корень. Может случиться, что число α снова является его корнем. Тогда повторим деление $P_{n-1}(z)$ на $(z - \alpha)$ и получим

$$P_n(z) = (z - \alpha)^2 P_{n-2}(z).$$

Пусть, вообще говоря, деление на $(z - \alpha)$ нацело удается выполнить k раз, но уже не удается в $(k+1)$-й раз. Тогда α мы называем *k-кратным корнем многочлена* $P_n(z)$ и пишем

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z).$$

Многочлен $P_{n-k}(z)$ здесь уже не делится на $(z - \alpha)$ нацело. Если $k = 1$, то корень α называется *однократным* или *простым*; если $k > 1$, корень называется *кратным.*

Может быть, многочлен $P_{n-k}(z)$ также имеет действительный корень β (кратности l). Тогда мы напишем

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k (z - \beta)^l P_{n-k-l}(z)$$

и продолжим этот процесс до исчерпания всех действительных корней $P_n(z)$. Если при этом в записи

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k (z - \beta)^l \ldots P_{n_1}(z) \qquad (52.2)$$

$n_1 = 0$ и, следовательно, последний множитель $P_{n_1}(z)$ — константа, то процесс привел нас к отысканию всех корней многочлена и разложению многочлена на линейные множители. Сравнение степеней даст нам при этом

$$n = k + l + \ldots,$$

т. е. *сумма кратностей корней равна степени многочлена*. Говорят проще, что *многочлен имеет столько корней, какова его степень* (считая каждый кратный корень столько раз, какова его кратность).

Может, однако случиться, что на некотором шаге в записи (52.2) многочлен положительной степени $P_{n_1}(z)$ уже не имеет ни одного действительного корня. Тогда, в силу основной теоремы алгебры, он имеет комплексный корень $\sigma + i\tau$ $(\tau \neq 0)$. Вместе с тем он имеет и корень $\sigma - i\tau$. Нетрудно было бы распространить теорему Безу и на случай деления на двучлен $z - \alpha$ с мнимым α. Многочлен должен делиться поэтому на $z - \sigma - i\tau$ и на $z - \sigma + i\tau$. Для того чтобы не вводить эти мнимые сомножители в разложение многочлена на множители, можно, вместо последовательного выполнения деления на $z - \sigma - i\tau$ и $z - \sigma + i\tau$, разделить $P_{n_1}(z)$ сразу на произведение

$$(z - \sigma - i\tau)(z - \sigma + i\tau) = (z - \sigma)^2 + \tau^2 =$$
$$= z^2 - 2\sigma z + \tau^2 + \sigma^2 = z^2 + pz + q,$$

которое уже оказывается квадратным трехчленом с действительными коэффициентами (и отрицательным дискриминантом: $d = p^2 - 4q = 4\sigma^2 - 4\tau^2 - 4\sigma^2 = -4\tau^2 < 0$). В результате в записи разложения $P_n(z)$ на множители появятся множители вида $z^2 + pz + q$ (снова однократные или повторяющиеся):

$$P_n(z) = (z - \alpha)^k (z - \beta)^l \ldots (z^2 + pz + q)^m \ldots P_0, \tag{52.3}$$

где последнее частное P_0 — число. Сравнение коэффициента при z^n в левой и правой частях равенства (52.2′) покажет, что $P_0 = a_0$. Поэтому окончательно разложение многочлена с действительными коэффициентами на действительные множители имеет вид

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha)^k \ldots (x^2 + px + q)^m \ldots \tag{52.4}$$

Вывод: *многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение* (повторяющихся или нет) *линейных двучленов вида $x - \alpha$ и квадратных трехчленов вида $x^2 + px + q$. Число всех корней многочлена с учетом их кратности равно его степени n.*

Пример. Число $x = 1$ является корнем многочлена

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1.$$

Указать кратность корня $x = 1$ и разложить $P(x)$ на множители

Решение. Применяя схему Горнера для деления многочлена на $x-1$ (можно обойтись и без схемы Горнера, выполнив деление обычным способом, как в п. 50):

	3	−4	0	0	1
1	3	−1	−1	−1	0

Таким образом, частное равно $3x^3-x^2-x-1$:

$$P(x)=(x-1)(3x^3-x^2-x-1).$$

Многочлен, найденный как частное от деления, снова делим на $x-1$:

	3	−1	−1	−1
1	3	2	1	0

Получаем частное $3x^2+2x+1$ и еще раз делим его на $x-1$:

	3	2	1
1	3	5	6

Теперь остаток отличен от нуля, поэтому окончательно

$$P(x)=(x-1)^2(3x^2+2x+1),$$

где $3x^2+2x+1$ уже не делится на $x-1$ без остатка. Корень $x=1$ — двукратный корень многочлена. Трехчлен $3x^2+2x+1$ имеет комплексно сопряженные корни (см. п. 59), так как его дискриминант отрицателен: $d=2^2-4\cdot3\cdot1=-8<0$. Разложение на множители, записанное в форме (52.4), имеет вид

$$P(x)=3(x-1)^2\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right).$$

Упражнения

1. Разделить многочлен $P(x)=x^3-3x^2+2x-1$ на многочлен $S(x)=x^2-4x+5$, найти частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$.

2. Проверить, делится или не делится многочлен $x^5+2x^4-3x^3+x^2+2x-3$ на двучлен: а) $x-2$; б) $x-1$; в) $x+3$; г) $x+2$.

3. Определить коэффициенты a и b многочлена x^3+2x^2+ax+b, если известно, что он без остатка делится на двучлен $x-1$, а при делении на двучлен $x+1$ дает остаток, равный 6.

4. Многочлен x^4-2x^3+2x-1 имеет корень $x=1$. Какова кратность этого корня? Разложить многочлен на множители.

Глава V

УРАВНЕНИЯ

§ 1. Общие сведения об уравнениях

53. Уравнение. Корни уравнения. Многие задачи приводятся к решению следующего вопроса: Дано равенство

$$f_1(x) = f_2(x), \qquad (53.1)$$

левая и правая части которого являются алгебраическими выражениями, содержащими неизвестную величину x (или функциями от x). Требуется найти все те значения x, которые *удовлетворяют равенству* (53.1) (т. е. значения x, подстановка которых в равенство (53.1) обращает его в верное числовое равенство). Равенство (53.1) называют в этом случае *уравнением с одной неизвестной* x. Множество значений x, при которых определены обе части уравнения (53.1), называют *областью допустимых значений* (о. д. з.). Каждое значение x, удовлетворяющее уравнению (53.1), называется его *решением* или *корнем*. Ясно, что всякий корень уравнения принадлежит о. д. з., множество корней уравнения составляет часть о. д. з. (уравнение может и не иметь корней, тогда говорят, что множество его решений *пусто*). Основная задача состоит в том, чтобы найти все корни данного уравнения, т. е. множество его решений.

Для придания точного смысла задаче решения уравнения следует еще указать, в какой числовой области (числовом поле) ищутся его решения. Как правило, подразумевается, что требуется найти все действительные решения уравнения, но для важнейшего класса уравнений, называемых алгебраическими (п. 55), ставится задача отыскания всех их комплексных решений, в том числе, конечно, и действительных.

Приведем несколько примеров, поясняющих сказанное.

Пример 1. Уравнение $x^2 - x = 0$ имеет в качестве о. д. з. всю числовую ось, множество его решений состоит из двух корней $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Пример 2. Уравнение $x^2 + 4 = 0$ в действительной области не имеет решений. В комплексной области оно имеет два решения: $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$.

Пример 3. Уравнение $\frac{x^2-1}{x-1}-x-1=0$ удовлетворяется при всех допустимых значениях x, т. е. при $x\neq 1$.

Пример 4. Уравнение $x+5=x+3$ не удовлетворяется ни при каком значении x. Множество его решений пусто.

54. Равносильные уравнения. Пусть даны два уравнения:

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{54.1}$$

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x). \tag{54.2}$$

Уравнение (54.2) назовем *следствием уравнения* (54.1), если каждый корень уравнения (54.1) является также корнем уравнения (54.2), иначе говоря, *если множество корней уравнения* (54.1) *входит во множество корней уравнения* (54.2).

Пример 1. Рассмотрим два уравнения:

$$x+1=3, \quad x^2+2x+1=9$$

(второе, как легко заметить, получено возведением обеих частей первого уравнения в квадрат).

Второе уравнение является следствием первого; в самом деле, число 2 есть единственный корень первого уравнения и, как легко проверить, является корнем также и второго уравнения; между тем число (—4) служит корнем второго уравнения, но не является корнем первого уравнения. Итак, по определению, второе уравнение есть следствие первого уравнения.

Переход от одного уравнения к другому, являющемуся его следствием, удобен, если это новое уравнение проще решить. В этом случае, найдя все его корни, мы подстановкой этих корней в исходное уравнение проверим, какие из них ему удовлетворяют, и тем самым найдем все его решения. На этом приеме основано, например, решение некоторых иррациональных уравнений (п. 70).

Еще более существенным является понятие равносильности двух уравнений.

Два уравнения называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если каждое из них является следствием другого. Иными словами, уравнения называются равносильными, если множества их корней в точности совпадают. Ясно, что два уравнения, порознь равносильные третьему, равносильны друг другу.

Если два уравнения не имеют корней (множества их решений пусты), то их также естественно считать равносильными: все уравнения, не имеющие решений, равносильны между собой.

В процессе решения уравнений часто производятся действия, в результате которых данное уравнение заменяется другим (обычно более простым), ему равносильным. Такой переход от одного уравнения к другому может выполняться на основе следующих утверждений.

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения прибавить выражение (функцию), имеющее смысл во всей о. д. з. данного уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.*

Иначе говоря, если дано уравнение

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{54.3}$$

то уравнение

$$f_1(x)+\varphi(x)=f_2(x)+\varphi(x), \tag{54.4}$$

где $\varphi(x)$ имеет смысл в о. д. з. уравнения (54.3), равносильно уравнению (54.3).

Доказательство. При каждом числовом значении $x=x_0$ из о. д. з. равенство

$$f_1(x_0)+\varphi(x_0)=f_2(x_0)+\varphi(x_0)$$

будет иметь место в том и только в том случае, когда имеет место равенство

$$f_1(x_0)=f_2(x_0);$$

множества решений для обоих уравнений совпадают, уравнения равносильны. В частности, если не имеет решений одно из них, то не имеет решений и другое.

Из теоремы 1 вытекает правило о возможности переносить члены уравнения из одной части в другую (с надлежащей переменой знака). Так, уравнение (54.3) всегда можно записать в равносильной ему форме:

$$f_1(x)-f_2(x)=0. \tag{54.5}$$

Равносильность уравнений (54.3) и (54.5) следует из теоремы 1 (достаточно к обеим частям уравнения (54.3) прибавить $-f_2(x)$), но можно обосновать ее и прямо, исходя из определения равносильности уравнений. Если x_0 — некоторое значение x, входящее в о. д. з. обоих выражений $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то равенство $f_1(x_0)=$ $=f_2(x_0)$ будет выполняться тогда и только тогда, когда будет выполняться равенство $f_1(x_0)-f_2(x_0)=0$ (два числа равны, если их разность равна нулю, и обратно).

Если обозначить $f_1(x)-f_2(x)$ через $f(x)$, то уравнение (54.5) сведется к виду

$$f(x)=0. \tag{54.6}$$

В дальнейшем, как правило, мы будем уже рассматривать уравнение в этой форме, т. е. с нулевой правой частью.

В порядке предостережения против необдуманного применения теоремы 1 приведем один простой пример. Уравнение

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x} \tag{54.7}$$

может быть (перенос членов из одной части в другую) записано в равносильной

форме:

$$x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

Однако уже «естественное» упрощение, состоящее в приведении подобных членов $1/x$ и $-1/x$, дает уравнение

$$x=0,$$

не равносильное исходному: оно имеет корень $x=0$, который не принадлежит о. д. з. уравнения (54.7) и не является его корнем. Конечно, незаконным здесь был не перенос члена из правой части в левую, а приведение подобных членов, в результате которого изменилась о. д. з. уравнения.

Теорема 2. *От умножения обеих частей уравнения на отличное от нуля число a или на выражение $\varphi(x)$, которое при всех допустимых значениях x имеет смысл и не обращается в нуль, образуются уравнения, равносильные данному уравнению.*

Так, умножив обе части уравнения (54.3) на a или на $\varphi(x)$, получим уравнения

$$a f_1(x)=a f_2(x)$$

и

$$\varphi(x) f_1(x)=\varphi(x) f_2(x),$$

каждое из которых равносильно уравнению (54.3).

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы 1 и предоставляется читателю. Следует также заметить, что при проведении преобразований частей уравнения после умножения на множитель $\varphi(x)$ часто происходит изменение о. д. з. и может нарушиться равносильность уравнений.

Практически в процессе решения уравнений иногда приходится производить и умножение на выражения $\varphi(x)$, могущие обращаться в нуль при некоторых значениях x. Тогда уравнение

$$\varphi(x) f_1(x)=\varphi(x) f_2(x) \tag{54.8}$$

будет иметь нули функции $\varphi(x)$ своими корнями (хотя исходное уравнение (54.3) могло и не иметь таких корней). Корни уравнения (54.8), не являющиеся корнями уравнения (54.3), называют *посторонними* корнями, и при записи ответа они должны быть отброшены.

Появление посторонних корней возможно и при возведении частей уравнения в одну и ту же степень, как это случилось с рассмотренным выше уравнением $x+1=3$: по возведении его в квадрат образовалось уравнение $x^2+2x+1=9$, корень (-4) которого оказался посторонним для исходного уравнения.

Вообще, в процессе решения уравнения часто трудно соблюсти требование равносильности; наиболее важно не терять корней уравнения, т. е. от данного уравнения переходить к таким уравнениям, которые являются его следствиями. Возможные посторонние корни могут быть отброшены после проверки их подстановкой в исходное уравнение.

В связи с этим обратим внимание на прием решения уравнений путем разложения их левой части на множители. Пусть в уравнении $f(x)=0$ левая часть представляется в виде произведения $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и уравнение принимает вид

$$\varphi(x)\psi(x)=0.$$

Множество корней этого уравнения является объединением множеств корней двух отдельных уравнений:

$$\varphi(x)=0 \quad \text{и} \quad \psi(x)=0$$

(действительно, произведение $\varphi(x)\psi(x)$ будет обращаться в нуль при тех и только тех значениях x, при которых обращается в нуль хотя бы один из сомножителей $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Поэтому исключительно грубой (хотя часто допускаемой учащимися) ошибкой является «сокращение» обеих частей уравнения на их общий множитель. В записи

$$\varphi(x)f_1(x)=\varphi(x)f_2(x) \tag{54.8}$$

ни в коем случае нельзя отбрасывать $\varphi(x)$, а следует рассуждать так: переносим члены в левую часть уравнения и выносим $\varphi(x)$ за скобки:

$$\varphi(x)[f_1(x)-f_2(x)]=0.$$

Теперь видно, что решениями нашего уравнения (54.8) будут как корни уравнения $f_1(x)=f_2(x)$, так и корни уравнения $\varphi(x)=0$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3+1=x^2+x$.

Решение. Разложим обе части уравнения на множители:

$$(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)x.$$

Перенесем все члены в левую часть уравнения и вынесем за скобки общий множитель:

$$(x+1)(x^2-2x+1)=0,$$

или

$$(x+1)(x-1)^2=0.$$

Ясно, что корнями служат значения $x_1=-1$ и $x_2=1$.

55. Системы уравнений. Рассмотрим пару равенств

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ \varphi(x, y)=0, \end{cases} \tag{55.1}$$

левые части которых являются алгебраическими выражениями (функциями) относительно двух переменных x, y. Мы скажем, что они составляют *систему двух уравнений с двумя неизвестными* x, y, и будем решать задачу об отыскании всех таких пар значений x, y, которые обращают (одновременно) оба уравнения системы в верные числовые равенства. *Каждая такая пара значений* x, y *называется решением системы.* Решить систему — значит найти все

ее решения. Так как пара чисел (x, y) изображается точкой на координатной плоскости, то точку с координатами (x, y) также называют решением системы (55.1).

Аналогично, можно систему трех уравнений с тремя неизвестными записывать в виде

$$\begin{cases} f(x, y, z)=0, \\ \varphi(x, y, z)=0, \\ \psi(x, y, z)=0 \end{cases}$$

(в большинстве задач число уравнений бывает равно числу входящих в них неизвестных, хотя в принципе это не обязательно). Ее решениями служат уже тройки чисел (x, y, z).

Уравнения, составляющие систему, обычно объединяют фигурной скобкой; этим выражается, что они рассматриваются совместно.

Некоторое уравнение $F(x, y)=0$ называется *следствием системы* (55.1), если оно удовлетворяется всеми решениями системы (55.1). При решении систем из них, как правило, приходится выводить уравнения, являющиеся их следствиями. Например, если даны уравнения (55.1), то и уравнения, полученные их сложением:

$$f(x, y)+\varphi(x, y)=0,$$

или вычитанием:

$$f(x, y)-\varphi(x, y)=0,$$

будут их следствиями. На этом основан, в частности, наиболее распространенный метод решения систем уравнений — *метод исключения неизвестных*. Он состоит в том, чтобы получить уравнение, являющееся следствием системы (55.1), но уже не содержащее одной из неизвестных, т. е. уравнение с одной неизвестной x (или y). Поясним сущность процесса исключения неизвестной примером.

Пусть дана система

$$\begin{cases} x^2+2y-2=0, \\ x-3y+3=0 \end{cases} \qquad (55.2)$$

с двумя неизвестными. Если первое уравнение умножить на 3, а второе на 2 и сложить полученные уравнения, то получим уравнение

$$3x^2+2x=0, \quad \text{или} \quad x(3x+2)=0, \qquad (55.3)$$

не содержащее y. Оно будет следствием системы (55.2); действительно, если точка (x_0, y_0) удовлетворяет обоим уравнениям (55.2), то она удовлетворит и уравнению (55.3). Фактически это означает, что абсцисса этой точки x_0 удовлетворяет уравнению (55.3) (так как ординаты y уравнение не содержит).

В данном простом примере видно, что уравнение (55.3) имеет два решения: $x_1=0$ и $x_2=-{}^2/_3$. При $x=0$ оба уравнения (55.2)

дают $y=1$, а при $x=-2/3$ получаем $y=7/9$. Решения системы (55.2) — точки (0, 1) и $(-2/3, 7/9)$.

56. Графическое решение уравнений. Если уравнение дано в форме

$$f(x)=0, \tag{56.1}$$

где $f(x)$ — функция от x, то корни уравнения $x=x_1$, $x=x_2$, ... будут абсциссами точек пересечения графика функции с осью Ox (нулями функции $f(x)$). Если изображен график функции $f(x)$, то корни уравнения находятся из чертежа (с известной степенью точности). Поэтому в случае, если уравнение (56.1) решить алгебраическими методами трудно, можно приблизительно определить его корни, построив график функции $y=f(x)$. Обычно удобней, однако, представить уравнение (56.1) в виде

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{56.2}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции, графики которых проще графика $f(x)$.

Значения действительных корней уравнения (56.2) приближенно можно получить, взяв абсциссы точек пересечения графиков функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$. В самом деле, если графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ пересекаются в точке с абсциссой x_0, то ординаты $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ точки пересечения будут также равны, т. е. будет иметь место равенство $f_1(x_0)=f_2(x_0)$. Это и означает, что число x_0 удовлетворяет уравнению (56.2).

Если графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ не пересекаются, то это означает, что уравнение (56.2) действительных корней не имеет.

Пример 1. Решить графически уравнение $x^3+x-1=0$.

Решение. Можно было бы строить график функции $f(x)=x^3+x-1$ и искать его точки пересечения с осью абсцисс.

Значительно проще, однако, представить уравнение в виде

$$x^3=-x+1$$

и построить графики двух функций: $y=x^3$ и $y=-x+1$ (рис. 59). Графики пересекаются только в одной точке, данное уравнение имеет единственный действительный корень $\alpha_1\approx 0{,}7$.

Графический метод используется также и при решении систем двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого по каждому из уравнений системы строят соответствующую ему линию и находят по чертежу абсциссы и ординаты точек пересечения этих линий.

Пример 2. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-x-y-2=0, \\ y^2-4x=0. \end{cases}$$

Решение. Уравнения системы перепишем так:

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2, \\ y^2 = 4x. \end{cases}$$

Первое из них является уравнением параболы, ось которой параллельна оси ординат (п. 45). Можно сообразить, что и второе уравнение определяет параболу, но такую, у которой ось

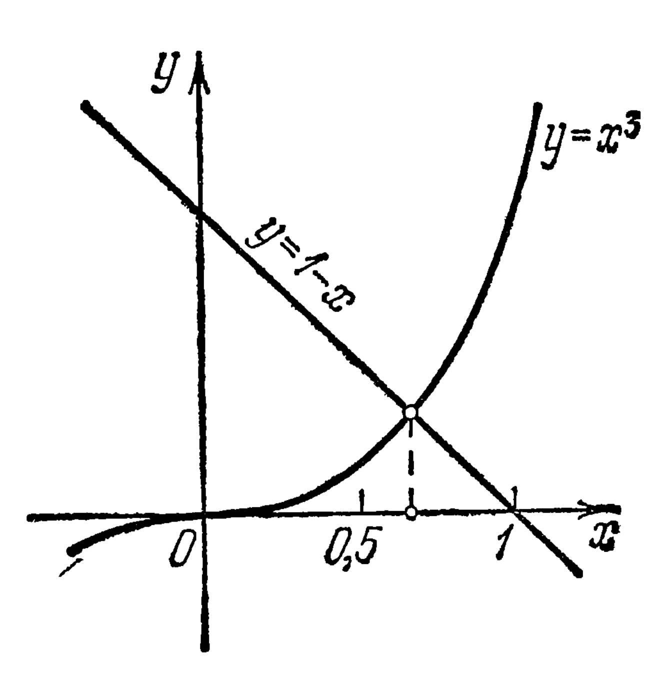


Рис. 59.

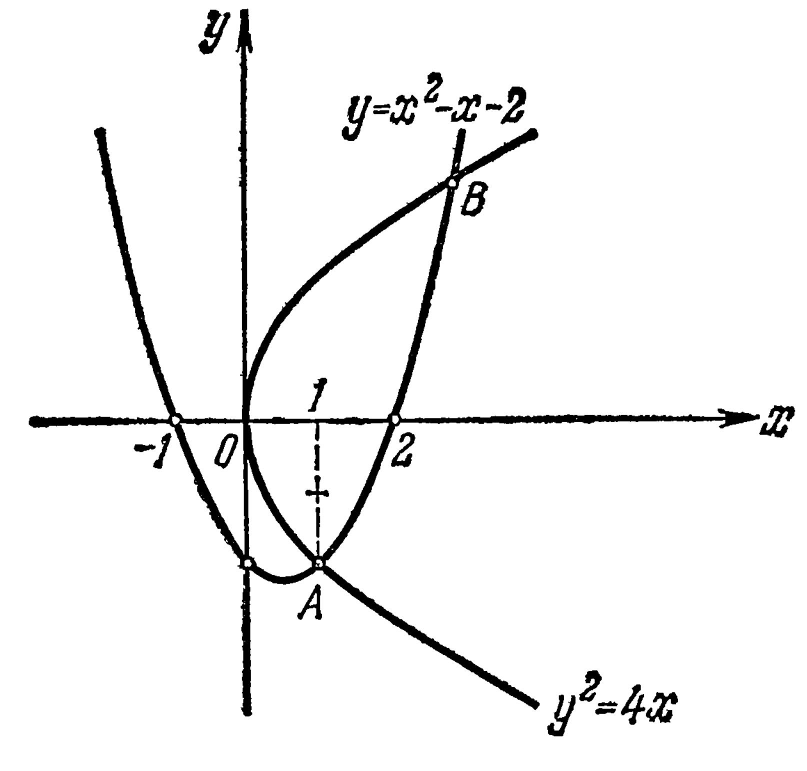


Рис. 60.

параллельна оси абсцисс (рис. 60). Эти параболы пересекаются в двух точках: A и B. Отсюда следует, что данная система имеет два действительных решения. Одно из них можно найти, отыскав координаты x_A и y_A точки A. Из чертежа находим, что $x_A = 1$, $y_A = -2$. Это решение $(1, -2)$ найдено точно. Найдя координаты x_B и y_B точки B, читатель отыщет приближенно еще и решение (x_B, y_B) данной системы.

Упражнения

1. Решить графически уравнения:
а) $2^x = x^2$; б) $x^2 - 1 = |\log_2(x+1)|$.
2. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ xy = 1. \end{cases}$$

§ 2. Алгебраические уравнения с одной неизвестной

57. Число и кратность корней. *Алгебраическим уравнением степени n с одной неизвестной x* называется уравнение вида

$$P_n(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (57.1)$$

(т. е. уравнение $f(x) = 0$, в левой части которого стоит ц. р. ф степени n от x).

Для алгебраических уравнений принято ставить задачу отыскания всех (вообще говоря, комплексных) корней уравнения. Так как корнями уравнения (57.1) являются нули (корни) многочлена в его левой части, то можно использовать сведения о целых рациональных функциях и их корнях (п. 52). Утверждения, приведенные в п. 52, формулируются применительно к уравнению (57.1) следующим образом:

1) Каждое уравнение степени n имеет по меньшей мере один корень в комплексной области. Если каждый корень учитывать с его кратностью, т. е. считать за столько корней, какова его кратность, то число корней уравнения равно его степени n. При этом говорят, что $x=\alpha$ — корень кратности k, если левая часть уравнения делится на $(x-\alpha)^k$ нацело, но не делится нацело на $(x-\alpha)^{k+1}$.

2) Если уравнение (57.1) имеет комплексный (мнимый) корень $x=\sigma+i\tau$, то и комплексно сопряженное число $\bar{x}=\sigma-i\tau$ является корнем уравнения (кратности обоих сопряженных корней одинаковы).

На протяжении столетий главной задачей алгебры было указание правил решения алгебраических уравнений. С древности известны формулы для решения уравнений первой и второй степени. Итальянскими математиками эпохи Возрождения (Кардано, Тарталья, Феррари) были найдены формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени (они громоздки и не имеют большого практического значения). Попытки решения «в радикалах» (т. е. с применением действия извлечения корня) уравнений степени выше четвертой были в общем случае безуспешны. Уже в XIX веке в работах Руффини, Абеля и Галуа было установлено, что не только для корней общего уравнения степени выше четвертой не может быть дано формул, выражающих их в радикалах, но и что корни многих конкретных уравнений с числовыми (например, целыми) коэффициентами не могут быть выражены через радикалы из рациональных чисел.

Мы изучаем ниже уравнения первой и второй степени и некоторые частные виды уравнений степени выше второй.

58. Уравнения первой степени (линейные уравнения). Уравнение первой степени (линейное уравнение) с одной неизвестной x имеет вид

$$ax+b=0 \qquad (a\neq 0). \tag{58.1}$$

Оно получается из общего уравнения (57.1) в случае, когда степень $n=1$; a называют *старшим коэффициентом* уравнения, b — его *свободным членом*.

Для решения уравнения (58.1) перенесем свободный член уравнения в его правую часть с противоположным знаком и получим уравнение

$$ax=-b, \tag{58.2}$$

равносильное исходному. Разделив на коэффициент $a\neq 0$, получим

единственный корень уравнения (58.1):

$$x=-\frac{b}{a}. \qquad (58.3)$$

Корень положителен, если a и b имеют разные знаки, отрицателен, если a и b одного знака, и равен нулю при $b=0$.

В случае, когда коэффициенты уравнения (58.1) не просто заданные числа, а являются алгебраическими выражениями, зависящими от одного или нескольких буквенных параметров, уравнение решается тем же путем, но при этом исключенными оказываются те значения параметров, при которых a обращается в нуль. Если при этом b не обращается в нуль, то уравнение не имеет решения; если же a и b обращаются в нуль одновременно, то уравнение для таких значений параметров превращается в тождество и удовлетворяется при любых значениях x.

Пример 1. Исследовать и решить уравнение

$$(p^2-1)x+1+p^3=0.$$

Решение. Если $p^2\neq 1$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=-\frac{1+p^3}{p^2-1}=\frac{(p+1)(p^2-p+1)}{(1-p)(1+p)}, \quad \text{или} \quad x=\frac{p^2-p+1}{1-p}$$

(это имеет место при $p\neq 1$, $p\neq -1$). Если $p^2=1$, то имеем две возможности: $p=1$ или $p=-1$. Если $p=1$, то уравнение принимает вид $2=0$ и не может удовлетворяться ни при каком x. Наконец, если $p=-1$, то уравнение сводится к равенству $0=0$ и удовлетворяется при любом значении x. Ответ следует дать в такой форме:

1) При $p\neq 1$, $p\neq -1$ $x=\frac{p^2-p+1}{1-p}$.

2) При $p=1$ решений нет.

3) При $p=-1$ решением является любое x.

Приведем еще пример уравнения с комплексными коэффициентами.

Пример 2. Решить уравнение $(2+i)z+1-i=0$.

Решение. $z=\frac{-1+i}{2+i}=\frac{(-1+i)(2-i)}{2^2+1^2}=\frac{-1+3i}{5}$.

59. Уравнения второй степени (квадратные уравнения). Алгебраическое уравнение второй степени записывается в общем виде так:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0), \qquad (59.1)$$

и обычно называется *квадратным уравнением*. Коэффициенты уравнения называют: a — *первым* или *старшим коэффициентом*, b — *вторым* или *средним коэффициентом*, c — *свободным членом* (или *третьим коэффициентом*).

Так как число корней алгебраического уравнения в комплексной области равно степени уравнения, то следует ожидать, что квадратное уравнение (59.1) будет иметь два корня. Поскольку мнимые корни всегда появляются парами (комплексно сопряженные корни), то имеется три возможности:

1) уравнение (59.1) имеет два действительных (различных) корня;

2) уравнение (59.1) имеет кратный (двойной) действительный корень;

3) уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней.

Эти предварительные заключения подтвердятся в процессе отыскания корней уравнения.

Для упрощения вычислений разделим обе части уравнения (59.1) на $a \neq 0$ и получим равносильное уравнение вида

$$x^2+px+q=0 \tag{59.2}$$

(здесь $p=b/a$, $q=c/a$). Уравнение (59.2) со старшим коэффициентом, равным единице, называют *приведенным квадратным уравнением*.

Для того чтобы решить его, прибавим к обеим его частям число $p^2/4$ (с тем, чтобы члены $x^2+px+p^2/4$ образовали точный квадрат двучлена $x+p/2$) и получим равносильное уравнение

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q=\frac{p^2}{4},$$

откуда

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0. \tag{59.3}$$

Имеется существенное различие между случаями, когда число $p^2/4-q$, входящее в левую часть равенства (59.3), положительно, равно нулю или отрицательно. Если $p^2/4-q>0$, то можно написать

$$\frac{p^2}{4}-q=\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2,$$

имея в виду, что $\sqrt{p^2/4-q}$ — арифметическое значение корня квадратного из $p^2/4-q$. Если $p^2/4-q=0$, то также можно написать

$$\frac{p^2}{4}-q=\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2.$$

Если же $p^2/4-q<0$, то можно представить $p^2/4-q$ как $|p^2/4-q|\cdot i^2$. Будем и в этом, принципиально отличном, случае писать $(\sqrt{p^2/4-q})^2$, подразумевая под $\sqrt{p^2/4-q}$ чисто мнимое число $\sqrt{|p^2/4-q|}\,i$. Теперь во всех случаях имеем

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=0. \tag{59.4}$$

Разложим левую часть равенства (59.4) с помощью формулы для разности квадратов:

$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0, \qquad (59.5)$$

откуда

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0 \qquad (59.6)$$

либо

$$x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0. \qquad (59.7)$$

Равенства (59.6), (59.7) и дают нам значения двух корней x_1 и x_2 уравнения (59.4), а следовательно, и приведенного квадратного уравнения (59.2):

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Обычно эти две формулы объединяют в одну:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (59.8)$$

Здесь, как указано в процессе вывода, в случае $p^2/4-q<0$ под $\sqrt{p^2/4-q}$ понимают $\sqrt{|p^2/4-q|}\cdot i$.

Если вернуться к исходному уравнению (59.1) (будем его называть *неприведенным* квадратным уравнением), то в формуле (59.8) придется заменить p через b/a и q через c/a; после несложных преобразований получим формулу для корней неприведенного квадратного уравнения (59.1):

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (59.9)$$

Если коэффициент b в уравнении (59.1) обозначен через $2k$, т. е. уравнение записано в виде

$$ax^2+2kx+c=0, \qquad (59.10)$$

то формула (59.9) принимает более простой вид:

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}. \qquad (59.11)$$

Пример 1. Решить квадратные уравнения: а) $x^2+27x+140=0$; б) $3x^2-10x-25=0$; в) $x^2+12x+9=0$; г) $2x^2-2x+5=0$; д) $x^2-18x+81=0$.

Решение. а) Применим формулу (59.8) для приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=-\frac{27}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}-140}=-\frac{27}{2}\pm\frac{13}{2}.$$

Корни действительные и различные: $x_1=-7$, $x_2=-20$.

б) Применим формулу (59.11) (используя, что $-10=2\cdot(-5)$):

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+3\cdot 25}}{3}=\frac{5\pm 10}{3}.$$

Корни: $x_1=5$, $x_2=-5/3$.

в) Имеем по формуле (59.11)

$$x_{1,2}=-6\pm\sqrt{36-9}=-6\pm\sqrt{27}=-6\pm 3\sqrt{3},$$

откуда $x_1=-6+3\sqrt{3}$, $x_2=-6-3\sqrt{3}$; корни данного уравнения оказались иррациональными числами.

г) С помощью формулы (59.11) найдем

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-10}}{2}=\frac{-1\pm 3i}{2}.$$

Корни уравнения комплексно сопряженные: $x_1=\frac{-1+3i}{2}$, $x_2=\frac{-1-3i}{2}$.

д) По формуле (59.11) имеем

$$x_{1,2}=9\pm\sqrt{81-81}=9\pm 0.$$

Уравнение имеет равные корни: $x_1=x_2=9$ (иначе говорят, что оно имеет корень $x=9$ кратности два). Это можно было бы заметить сразу, записав левую часть уравнения как полный квадрат: $(x-9)^2$.

Формулы (59.8), (59.9) и (59.11) пригодны, разумеется, и для решения квадратных уравнений с буквенными коэффициентами.

Пример 2. Решить следующие уравнения:

а) $x^2+8ax-20a^2=0$; б) $abx^2-(a^2-b^2)x-ab=0$ $(ab\neq 0)$.

Решение. а) По формуле (59.11) имеем

$$x_{1,2}=-4a\pm\sqrt{16a^2+20a^2}=-4a\pm\sqrt{36a^2}=-4a\pm 6a.$$

Отсюда

$$x_1=2a,\qquad x_2=-10a.$$

б) Пользуясь формулой (59.9), найдем

$$x_{1,2}=\frac{a^2-b^2\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}}{2ab}=$$

$$=\frac{a^2-b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2}}{2ab}=\frac{a^2-b^2\pm(a^2+b^2)}{2ab}.$$

Таким образом,

$$x_1=\frac{a^2-b^2+a^2+b^2}{2ab}=\frac{2a^2}{2ab}=\frac{a}{b},$$

$$x_2=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{2ab}=-\frac{2b^2}{2ab}=-\frac{b}{a}.$$

60. Формулы Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители. Найдем сумму и произведение корней квадратного уравнения. Используя формулы (59.8) для корней приведенного уравнения, получим

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q \end{cases} \tag{60.1}$$

(первое равенство очевидно, второе получается после несложного вычисления, которое читатель проведет самостоятельно; удобно использовать формулу для произведения суммы двух чисел на их разность).

Доказана следующая

Теорема Виета. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену.*

В случае неприведенного квадратного уравнения следует в формулы (60.1) подставить выражения $p=b/a$, $q=c/a$; формулы (60.1) примут вид

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{60.2}$$

Пример 1. Составить квадратное уравнение по его корням: а) $x_1=-2$, $x_2=4$; б) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$; в) $x_{1,2}=2\pm i$.

Решение. а) Находим $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=-8$; уравнение имеет вид $x^2-2x-8=0$; б) $x^2-4x+1=0$; в) $x^2-4x+5=0$.

Пример 2. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$, не решая самого уравнения.

Решение. Известны сумма $x_1+x_2=-p$ и произведение $x_1x_2=q$ корней. Представим сумму квадратов корней $x_1^2+x_2^2$ в виде

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

и получим $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

Из формул Виета легко получить формулу

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{60.3}$$

выражающую правило разложения квадратного трехчлена на множители.

В самом деле, напишем формулы (60.2) в виде

$$b=-a(x_1+x_2),$$
$$c=ax_1x_2.$$

Теперь имеем

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=$$
$$=a[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2]=a(x-x_1)(x-x_2),$$

что и требовалось получить.

Вышеуказанный вывод формул Виета знаком читателю из курса алгебры средней школы. Можно дать другой вывод, использующий теорему Безу и разложение многочлена на множители (пп. 51, 52).

Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$; тогда по общему правилу (52.2) трехчлен в левой части уравнения разлагается на множители:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

Раскрывая скобки в правой части этого тождественного равенства, получим

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

и сравнение коэффициентов при одинаковых степенях x даст нам формулы Виета (60.1).

Преимущество этого вывода состоит в том, что его можно применить и к уравнениям высших степеней с тем, чтобы получить выражения коэффициентов уравнения через его корни (не находя самих корней!). Например, если корни приведенного кубического уравнения

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

суть x_1, x_2, x_3, то согласно равенству (52.2) находим

$$x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \tag{60.4}$$

(в нашем случае $a_0=1$ и $n=3$). Раскрыв скобки в правой части равенства и собрав коэффициенты при различных степенях x, получим

$$x^3+px^2+qx+r=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3. \tag{60.5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (60.5), находим

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q, \\ x_1x_2x_3=-r. \end{cases} \tag{60.6}$$

Пример 3. Ребра a, b, c прямоугольного параллелепипеда являются корнями кубического уравнения

$$x^3-10x^2+23x-15=0.$$

Найти объем и полную поверхность параллелепипеда.

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его ребер: $V=abc$, и в силу формул Виета (60.6)

$$V=abc=15.$$

Полная поверхность равна $\sigma=2(ab+ac+bc)$, и по формулам (60.6) имеем $\sigma=2\cdot23=46$.

61. Исследование квадратного уравнения. В зависимости от коэффициентов квадратного уравнения (59.1) его корни представляют собой числа действительные или мнимые, различные или равные, положительные или отрицательные. Исследование уравнения состоит в установлении характера корней уравнения в зависимости от его коэффициентов.

Дискриминант

$$d=b^2-4ac \tag{61.1}$$

квадратного трехчлена, использованный при построении его графика и исследовании свойств трехчлена (п. 45), будем также

называть *дискриминантом квадратного уравнения* (59.1). От его знака существенно зависит характер корней уравнения, так как он стоит под знаком радикала в формуле (59.9).

I. $d>0$; корни уравнения действительные, различные.

В самом деле, под знаком радикала в формуле (59.9) имеем положительное число и находим два различных действительных корня x_1, x_2. Тот же результат следует из рис. 45, *в*, *г*, показывающих, что график квадратного трехчлена при $d>0$ пересекает ось Ox в двух точках.

Полагая $d>0$, исследуем знак корней. Для этого воспользуемся формулами Виета (60.2). Будем для удобства считать, что $a>0$.

Iа. $d>0$, $a>0$, $c>0$. Корни одного знака, так как их произведение положительно. Если $b<0$, то они оба положительны; если $b>0$ то они оба отрицательны.

Iб. $d>0$, $a>0$, $c<0$. Корни разного знака, один из них положителен, другой отрицателен.

Iв. $d>0$, $a>0$, $c=0$ (уравнение «неполное» вида $ax^2+bx=0$). Один из корней равен нулю, знак другого противоположен знаку b.

II. $d=0$. Корни квадратного уравнения действительные и совпадающие (графически эта ситуация выражается в том, что парабола касается оси Ox, рис. 45, *д*, *е*) знак корней при $a>0$ противоположен знаку b.

III. $d<0$. Корни комплексно сопряженные (парабола не пересекает оси Ox, рис. 45, *а*, *б*).

Пример 1. Исследовать уравнения: а) $5x^2-3x-10=0$; б) $2x^2-5x+20=0$; в) $9x^2-6x+1=0$; г) $3x^2+11x+10=0$; д) $16x^2+24x+9=0$; е) $7x^2-12x+4=0$; ж) $2x^2+20x-3=0$.

Решение. а) Вычисляем дискриминант d уравнения по формуле (61.1):

$$d=(-3)^2-4\cdot 5\cdot(-10)=209>0.$$

Дискриминант уравнения положителен. Имеет место случай I: корни данного уравнения — числа действительные и различные. Из того, что $c=-10<0$, следует, что корни имеют разные знаки. Можно исследование провести и дальше: здесь $b=-3<0$, и поэтому положительный корень x_2 больше модуля отрицательного корня x_1, т. е. $x_2>|x_1|$.

б) Корни комплексные сопряженные; в) корни равные положительные; г) корни действительные, различные, отрицательные; д) корни равные отрицательные; е) корни действительные, различные, положительные; ж) корни действительные, различные, разных знаков, причем модуль отрицательного корня больше положительного корня.

Сложней решается задача исследования квадратного уравнения с буквенными коэффициентами. Ограничимся одним примером такого рода (см. также пример 4 п. 80).

Пример 2. Исследовать уравнение $ax^2+2x+a^2=0$ (a—действительное).

1. В случае $a=0$ уравнение превращается в линейное $2x=0$ и имеет корень $x=0$.

2. Пусть $a\neq 0$. Находим дискриминант

$$d=2^2-4aa^2=4(1-a^3).$$

Приходится различать три случая: $a<1$, $a=1$ и $a>1$.

1) $a<1$ ($a\neq 0$). В этом случае уравнение имеет два действительных корня, так как $d>0$; если $0<a<1$, то корни отрицательные: их произведение $x_1x_2=a^2/a=a>0$, сумма $x_1+ +x_2=-2/a<0$. Если $a<0$, то корни разных знаков (их произведение отрицательно).

2) $a=1$, $d=0$. Уравнение имеет двойной корень $x_{1,2}=-1$.

3) $a>1$, $d<0$. Корни уравнения комплексно сопряженные.

62. Уравнения высших степеней. Целые корни. Алгебраические уравнения выше второй степени мы называем уравнениями высших степеней. Изучение их в общем виде выходит за рамки программы средней школы. В нашем курсе рассматриваются лишь некоторые частные вопросы, относящиеся к уравнениям высших степеней. Здесь мы покажем, как можно находить целые корни уравнения с целочисленными коэффициентами (если такие корни имеются).

Пусть старший коэффициент уравнения равен единице (приведенное уравнение), а остальные коэффициенты—целые числа. Пусть такое уравнение

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (62.1)$$

имеет корнем целое число $x=k$; подставляя $x=k$ в уравнение, получим

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0,$$

откуда

$$a_n=-k(k^{n-1}+a_1k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}),$$

где оба сомножителя в правой части равенства—целые; таким образом, свободный член a_n уравнения должен делиться на k. *Все целые корни приведенного алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена.* Отсюда следует, что в качестве целых корней надлежит испытывать не какие-либо произвольные целые числа, а лишь делители свободного члена уравнения, которых имеется лишь конечное множество.

Можно доказать, что приведенное уравнение с целыми коэффициентами не имеет других рациональных корней, кроме

целых; поэтому наш метод дает все рациональные решения уравнения (62.1).

Пример 1. Решить уравнение $x^3-4x^2-27x+90=0$.

Решение. Выписываем (положительные и отрицательные) делители свободного члена 90: ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 9, ...

Подставляя эти числа в уравнение, находим, что корнем данного уравнения служит число $x_1=3$, поскольку $3^3-4\cdot 3^2-27\cdot 3+90=27-36-81+90=0$. Многочлен, расположенный в левой части уравнения, по теореме Безу (п. 51) должен без остатка делиться на двучлен, $x-3$. Проделав деление, найдем в частном квадратный трехчлен x^2-x-30. Его два корня присоединим к ранее найденному корню и, таким образом, найдем все три корня данного уравнения: $x_1=3$, $x_2=-5$, $x_3=6$.

Пример 2. Имеет ли уравнение $x^4-x^3+x+2=0$ целые корни?

Решение. Целыми корнями могут быть лишь делители свободного члена 2, т. е. числа ± 1, ± 2. Непосредственной подстановкой этих чисел в уравнение убеждаемся, что ни одно из них ему не удовлетворяет. Данное уравнение целых и вообще рациональных корней не имеет.

Если старший коэффициент a_0 уравнения с целыми коэффициентами

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{62.2}$$

отличен от единицы, то можно ввести новую неизвестную y с помощью формулы $x=y/a_0$; тогда для y получится уравнение

$$a_0\frac{y^n}{a_0^n}+a_1\frac{y^{n-1}}{a_0^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{y}{a_0}+a_n=0,$$

или

$$y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_{n-1}a_0^{n-2}y+a_na_0^{n-1}=0,$$

которое уже имеет старший коэффициент, равный единице, и к которому применим способ отыскания целых корней, указанный выше. Целые корни для y дадут рациональные, вообще говоря, дробные корни для x.

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^3-5x^2+8x-3=0.$$

Решение. Делаем подстановку $x=y/2$. После очевидных преобразований имеем

$$y^3-5y^2+16y-12=0.$$

Подбираем целый корень для y; находим

$$y=1.$$

Делим левую часть уравнения на $y-1$ и получаем уравнение

$$y^2-4y+12=0$$

с корнями $y=2\pm 2\sqrt{2}i$. Окончательно выписываем решения исходного уравнения:

$$x_1=\frac{y_1}{2}=\frac{1}{2}, \qquad x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}i.$$

63. Двучленные уравнения. Алгебраическое уравнение вида

$$ax^n + b = 0 \qquad (63.1)$$

называется *двучленным* уравнением. Решение такого уравнения просто сводится к извлечению корня степени n из числа $-b/a$:

$$x^n = -\frac{b}{a}$$

(при этом подразумевается, что следует найти все значения корня по правилу извлечения корня из комплексных чисел, п. 18).

Пример 1. Решить уравнение $x^5 + 32 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^5 = -32$; будем рассматривать -32 как комплексное число и приведем его в тригонометрическую форму: $-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$. Теперь по правилу извлечения корня из комплексного числа найдем

$$x_k = \sqrt[5]{32(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right),$$

где k следует придать значения 0, 1, 2, 3, 4. Получим пять корней нашего уравнения:

$$x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right), \quad x_2 = -2;$$

$$x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right), \quad x_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

Уравнение имеет один действительный корень и четыре мнимых.

При некоторых значениях n, например при $n = 3, 4, 6$, вместо указанного общего метода проще использовать разложение левой части на множители (применяя, в частности, формулы сокращенного умножения, п. 20).

Пример 2. Решить уравнение $8x^3 - 27 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(2x)^3 - 3^3 = 0$$

и используем формулу для разности кубов (20.12); получим

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0.$$

Таким образом $x_1 = 3/2$, а x_2, x_3 найдем, решая квадратное уравнение

$$4x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Имеем

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{4},$$

или

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{4}.$$

Пример 3. Решить уравнение $x^4+1=0$.

Решение. Разлагаем левую часть уравнения на множители приемом, с которым мы уже встречались (п. 22):

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Таким образом, задача сводится к решению двух квадратных уравнений:

$$x^2+\sqrt{2}x+1=0,$$
$$x^2-\sqrt{2}x+1=0.$$

Их корни

$$x_{1,2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),$$
$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$$

и являются корнями данного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $x^6-2=0$.

Решение. Для удобства введем новую неизвестную по формуле $x=\sqrt[6]{2}y$; для y получим уравнение

$$y^6-1=0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$y^6-1=(y^3+1)(y^3-1)=(y+1)(y^2-y+1)(y-1)(y^2+y+1),$$

и сведем решение данного уравнения к решению двух линейных и двух квадратных уравнений. Читателю рекомендуется закончить решение примера самостоятельно.

64. Уравнения, сводящиеся к квадратным. Уравнение вида

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{64.1}$$

называется *биквадратным уравнением* и после введения новой неизвестной $x^2=z$ сводится к квадратному уравнению

$$az^2+bz+c=0. \tag{64.2}$$

Аналогично, вообще, уравнение вида

$$ax^{2n}+bx^n+c=0 \tag{64.3}$$

сводится к квадратному уравнению относительно $z=x^n$. Найдя его корни z_1, z_2, мы затем получим корни уравнения (64.3) путем решения двучленных уравнений $x^n-z_1=0$, $x^n-z_2=0$.

Пример 1. Решить уравнение $9x^4-25x^2+16=0$.

Решение. Положим $x^2=z$. Тогда для z получим уравнение

$$9z^2-25z+16=0.$$

Из него найдем $z_1 = 1$, $z_2 = {}^{16}/_9$. Отсюда

$$x^2 - 1 = 0, \qquad x^2 - \frac{16}{9} = 0,$$

и, следовательно, четыре корня данного уравнения таковы:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = {}^4/_3, \qquad x_4 = -{}^4/_3.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$8x^6 + 7x^3 - 1 = 0.$$

Решение. Положим $x^3 = z$; для z получим уравнение

$$8z^2 + 7z - 1 = 0.$$

Из него находим

$$z_1 = -1, \qquad z_2 = {}^1/_8.$$

Это приведет к следующим двум двучленным уравнениям третьей степени:

$$x^3 + 1 = 0, \qquad x^3 - {}^1/_8 = 0.$$

Решив эти двучленные уравнения (см. п. 63), найдем все шесть корней данного уравнения:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}, \qquad x_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \qquad x_6 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Остановимся несколько подробней на случае биквадратного уравнения (64.1). При указанном выше способе его решения в случае, когда соответствующее квадратное уравнение (64.2) имеет мнимые корни, отыскание значений x из равенств $x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$ потребует извлечения корня квадратного из мнимых чисел. Оказывается, что этого можно избежать, решая уравнение другим приемом. Пусть $d = b^2 - 4ac < 0$ (корни уравнения (64.2) мнимые). Тогда преобразуем левую часть уравнения (64.1) следующим способом (считаем $a > 0$; тогда и $c > 0$):

$$ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + 2\sqrt{ac}\,x^2 + c + (b - 2\sqrt{ac})\,x^2.$$

Здесь $b - 2\sqrt{ac} < 0$; обозначив $b - 2\sqrt{ac}$ через $-p^2$; получим

$$ax^4 + bx^2 + c = (\sqrt{a}x^2 + \sqrt{c})^2 - (px)^2 =$$

$$= (\sqrt{a}x^2 + px + \sqrt{c})(\sqrt{a}x^2 - px + \sqrt{c}).$$

Левая часть уравнения разложится на действительные квадратичные множители, и задача сведется к решению двух квадратных уравнений.

Пример 3. Решить уравнение $x^4 + 2x^2 + 9 = 0$.

Решение. Так как здесь $d = b^2 - 4ac = 1 - 36 < 0$, то применяем второй способ решения:

$$x^4 + 2x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2 = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3).$$

Задача свелась к решению пары квадратных уравнений:

$$x^2 + 2x + 3 = 0, \qquad x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Искомые решения:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i, \qquad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}i.$$

65. Возвратные уравнения. Биквадратные уравнения — частный вид уравнений четвертой степени, решение которых сводится к решению квадратных уравнений. Другой случай, когда такое сведение также возможно, дают *возвратные уравнения* четвертой степени:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \qquad a\neq 0. \tag{65.1}$$

Такое уравнение называется *возвратным* потому, что у него коэффициенты при членах, расположенных симметрично относительно среднего члена, одинаковы (строка коэффициентов a, b, c, b, a читается одинаково слева направо и справа налево). Разделим уравнение почленно на x^2 и сгруппируем члены, как указано ниже:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0. \tag{65.2}$$

Введем неизвестную y с помощью равенства

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

Тогда $x^2+1/x^2=y^2-2$. Для y получаем из (65.2) квадратное уравнение

$$a(y^2-2)+by+c=0. \tag{65.3}$$

Пусть его корни y_1, y_2; тогда x находится из уравнений

$$x+\frac{1}{x}=y_1, \qquad x+\frac{1}{x}=y_2,$$

которые также записываются как уравнения второй степени:

$$x^2-y_1x+1=0, \qquad x^2-y_2x+1=0.$$

Пример. Решить уравнение $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.

Решение. Делим уравнение на x^2 и группируем члены:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0.$$

Полагая $y=x+1/x$, получим

$$y^2-2y=0.$$

Корни этого уравнения: $y_1=0$, $y_2=2$. Находим x из уравнений

$$x+\frac{1}{x}=0, \qquad x+\frac{1}{x}=2$$

или $x^2+1=0$, $x^2-2x+1=0$.

Решения уравнения таковы: $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=1$ ($x=1$ — двойной корень).

Упражнения

1. Исследовать линейные уравнения:
а) $(a^2-b^2)x+b^3-a^3=0$; б) $(a^2-a)x+a-1=0$.

2. Решить уравнения:
а) $x^2+36x+68=0$; б) $x^2+22x+121=0$; в) $2x^2+15x+7=0$; г) $x^2+8x+41=0$; д) $4x^2-8x+5=0$.

3. Решить уравнения:
а) $mx^2-(m+n)x+n=0$; б) $4x^2-4ax+(a^2-b^2)=0$; в) $ax^2-(2a+1)x+2=0$; г) $(a+b)x^2+2ax+(a-b)=0$; д) $mnx^2-(an+bm)x+ab=0$.

4. Решить уравнения:
а) $2x^3+5=0$; б) $16x^4-7=0$.

5. Решить уравнения:
а) $x^4-8x^2-9=0$; б) $x^4+49x^2=0$, в) $x^4+13x^2+36=0$;
г) $3x^4-11x^2-14=0$

6. Решить уравнения.
а) $x^6-19x^3-216=0$, б) $x^8-65x^4-1296=0$.

7. Решить уравнения (отыскав целый корень уравнения):
а) $x^3-6x^2+3x+10=0$, б) $x^3-5x^2+28=0$.

8. Решить уравнения:
а) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$; б) $x^4-3x^3+3x+1=0$.

Указание. В последнем примере ввести новую неизвестную $y=x-\frac{1}{x}$.

§ 3. Системы алгебраических уравнений

66. Линейные системы. Система уравнений вида

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ z)=0, \\ \varphi(x,\ y,\ z)=0, \\ \psi(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \qquad (66.1)$$

называется *системой алгебраических уравнений*, если левые части уравнений являются целыми рациональными выражениями относительно неизвестных x, y, z. Если все левые части линейны относительно неизвестных, то система называется *линейной* системой уравнений. Обычно линейную систему уравнений с двумя или тремя неизвестными записывают, соответственно, в виде

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (66.2)$$

и

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases} \qquad (66.3)$$

оставляя в левых частях члены, содержащие неизвестные, а в правых — свободные члены системы.

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными (66.2) и будем решать ее методом исключения; исключить неизвестную y — это значит найти такое следствие нашей системы, которое уже не содержало бы y. Для получения такого уравнения умножим первое уравнение системы (66.2) на b_2, а второе на b_1; получим

$$\begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1, \\ a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2. \end{cases}$$

Вычтем теперь второе уравнение этой системы из первого. При этом члены, содержащие y, уничтожатся, и мы получим

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=b_2c_1-b_1c_2. \qquad (66.4)$$

В этом уравнении исключена неизвестная y.

Обратимся снова к системе (66.2) и умножим ее первое уравнение на a_2, а второе на a_1; получим

$$\begin{cases} a_1a_2x+a_2b_1y=a_2c_1, \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения этой системы первое:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1. \qquad (66.5)$$

Таким образом, мы из системы (66.2) исключили x.

Заметим, что в уравнении (66.4) коэффициент при x такой же, как и коэффициент при y в уравнении (66.5). Для сокращения записей введем следующие обозначения:

$$a_1b_2-a_2b_1=\Delta, \qquad (66.6)$$

$$b_2c_1-b_1c_2=\Delta_x, \qquad (66.7)$$

$$a_1c_2-a_2c_1=\Delta_y, \qquad (66.8)$$

(греческая буква Δ читается «дельта»). Уравнения (66.4) и (66.5) при этом перепишутся так:

$$\Delta\cdot x=\Delta_x, \qquad (66.9)$$

$$\Delta\cdot y=\Delta_y. \qquad (66.10)$$

Предположим теперь, что $\Delta\neq 0$. Тогда из уравнений (66.9) и (66.10) делением на Δ найдем

$$\begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}. \end{cases} \qquad (66.11)$$

Уравнения (66.9) и (66.10) являются следствиями основной системы (66.2). Так как каждое решение системы (66.2) должно удовлетворять и уравнениям (66.9), (66.10), то система не может иметь никаких других решений, кроме решения, определяемого равенствами (66.11). Это рассуждение еще не доказывает, что (66.11) действительно является решением системы. Чтобы в этом убедиться, следует выражения x, y, заданные равенствами (66.11), подставить в уравнения системы (66.2) и проверить, что они обращаются в тождества. Произведем эту проверку, например, для первого уравнения системы (для второго читатель повторит аналогичные вычисления самостоятельно). Подставляем $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ в левую часть первого из уравнений (66.2) и производим тождественные преобразования:

$$a_1\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}+b_1\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+b_1a_1c_2-b_1a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=$$

$$=\frac{c_1(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1b_2-a_2b_1}=c_1.$$

Результат подстановки x и y в уравнение дал нам, как и требовалось, правую часть c_1, уравнение удовлетворено.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-2y=7, \\ 10x+7y=3. \end{cases} \qquad (66.12)$$

Решение. Умножим первое уравнение на 7, а второе на (—2):

$$\begin{cases} 35x-14y=49, \\ -20x-14y=-6. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе; получим

$$55x=55,$$

откуда $x=1$.

Теперь проще всего подставить найденное значение $x=1$ в одно из уравнений системы. Тогда найдем значение второй неизвестной $y=-1$. Система имеет решение $x=1$, $y=-1$, которое коротко записывается так: (1, —1).

Для исключения неизвестной из уравнений системы применяют также прием, называемый *методом подстановки*. Он состоит в том, что с помощью одного из уравнений системы одну неизвестную выражают через другую и найденное выражение подставляют в оставшееся уравнение системы. Так, в примере 1 из второго уравнения находим

$$x=\frac{3-7y}{10}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы, найдем

$$5\,\frac{3-7y}{10}-2y=7,$$

откуда легко получить $y=-1$; далее находим x:

$$x=\left.\frac{3-7y}{10}\right|_{y=-1}=1,$$

и снова получаем решение (1, —1) системы (66.12).

Для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными (66.3) примени́м тот же прием: можно из одного уравнения выразить, например, неизвестную x через две остальные неизвестные и подставить в два других уравнения системы. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Можно поступить и по-другому: из двух уравнений системы выразить две неизвестные через третью и подставить эти выражения в последнее уравнение системы, которое превратится в уравнение с одной неизвестной. Покажем пример решения системы вторым из указанных приемов.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y+6z=17, \\ x+5y-z=-6, \\ 3x+7y+10z=16. \end{cases}$$

Решение. Первые два уравнения перепишем так:

$$\begin{cases} 2x-3y=17-6z, \\ x+5y=-6+z. \end{cases}$$

Исключим из этой системы неизвестную y. Для этого первое уравнение умножим на 5, второе на 3 и сложим полученные равенства:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{rl} 10x-15y= & 85-30z \\ 3x+15y= & -18+3z \end{array} \\ \hline 13x \quad = 67-27z \\ x \quad =\dfrac{67-27z}{13}; \end{array}$$

аналогично исключаем x:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{rl} 2x-3y= & 17-6z \\ 2x+10y= & -12+2z \end{array} \\ \hline -13y= 29-8z \\ y=\dfrac{-29+8z}{13}. \end{array}$$

Подставим найденные выражения x и y через z в третье уравнение данной системы:

$$3\,\frac{67-27z}{13}+7\,\frac{-29+8z}{13}+10z=16.$$

Получилось уравнение первой степени относительно z. Из него находим $z=2$. В таком случае

$$x=\left.\frac{67-27z}{13}\right|_{z=2}=1,$$

$$y=\left.\frac{-29+8z}{13}\right|_{z=2}=-1.$$

Итак, данная система имеет следующее единственное решение:

$$x=1, \quad y=-1, \quad z=2.$$

Короче это решение запишем так: (1, —1, 2).

67. Определители второго порядка. Исследование линейных систем двух уравнений с двумя неизвестными. В теории систем линейных уравнений и в некоторых других вопросах удобно использовать понятие определителя, или детерминанта. Рассмотрим

какую-либо четверку чисел $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, записанных в виде квадратной таблицы (*матрицы*) по два в строках и по два в столбцах. *Определителем* или *детерминантом*, составленным из чисел этой таблицы, называется число $ad-bc$, обозначаемое так:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc. \qquad (67.1)$$

Такой определитель называется *определителем второго порядка*, поскольку для его составления взята таблица из двух строк и двух столбцов. Числа, из которых составлен определитель, называются его *элементами*; при этом говорят, что элементы a и d составляют *главную диагональ* определителя, а элементы b и c — его *побочную диагональ*. Видно, что определитель равен разности произведений пар элементов, стоящих на его главной и побочной диагоналях.

Пример 1. Вычислить следующие определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Решение. а) По определению имеем $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot 3-2\cdot 5 = 21-10=11$;

б) 20; в) —28; г) 0;

д) имеем

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha\sin\alpha - \cos\alpha(-\cos\alpha) = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1.$$

С помощью определителей можно равенства (66.6), (66.7) и (66.8) переписать, поменяв местами их части, так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (67.2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (67.3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (67.4)$$

Заметим, что определители Δ, Δ_x и Δ_y весьма просто составляются по коэффициентам системы (66.2). Действительно,

определитель Δ составляется из коэффициентов при неизвестных в этой системе. Он называется *главным определителем системы* (66.2). Назовем Δ_x и Δ_y определителями для неизвестных x и y соответственно. Можно сформулировать следующее правило их составления: определитель для каждой из неизвестных получается из главного определителя, если в нем столбец коэффициентов при этой неизвестной заменить столбцом свободных членов (взятых из правых частей уравнений системы).

Пример 2. Систему (66.12) решить с помощью определителей.

Решение. Составляем и вычисляем главный определитель данной системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}=35+20=55.$$

Теперь в нем заменим столбец коэффициентов при x (первый столбец) свободными членами. Получим определитель для x:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=49+6=55.$$

Подобным же образом найдем

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}=15-70=-55.$$

Отсюда по формулам (66.11) получаем

$$x=\frac{55}{55}=1, \qquad y=\frac{-55}{55}=-1.$$

Мы пришли к уже известному нам решению $(1, -1)$.

Проведем теперь исследование системы линейных уравнений (66.2). Для этого вернемся к равенствам (66.9) и (66.10) и будем различать два случая: $\Delta\neq 0$ и $\Delta=0$.

1) Пусть $\Delta\neq 0$. Тогда, как уже отмечалось, формулы (66.11) дают единственное решение системы (66.2). Итак, если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое формулами (66.11); такая система называется *определенной*.

2) Пусть теперь $\Delta=0$. В зависимости от значений Δ_x, Δ_y будем различать два случая.

а) Хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля; тогда система (66.2) не имеет решений. Действительно, пусть, например, $\Delta_x\neq 0$. Равенство (66.9) не может удовлетворяться ни при каком значении x; так как это равенство получено как следствие системы (66.2), то система не имеет решений. Такая система называется *несовместной*.

б) Оба определителя Δ_x, Δ_y равны нулю; равенства (66.9) и (66.10) удовлетворяются тождественно и для исследования

системы (66.2) использованы быть не могут. Докажем, что если $\Delta=0$, $\Delta_x=\Delta_y=0$ и хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в системе (66.2) отличен от нуля, то система имеет бесконечное множество решений. Чтобы убедиться в этом, допустим, например, что $a_1\neq 0$. Из соотношений

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0,\ \Delta_x=b_2c_1-b_1c_2=0,\ \Delta_y=a_1c_2-a_2c_1=0 \qquad (67.5)$$

получим

$$b_2=a_2\frac{b_1}{a_1},\qquad c_2=a_2\frac{c_1}{a_1} \qquad (67.6)$$

и из записи второго уравнения системы (66.2), подставляя в него выражения коэффициентов b_2, c_2,

$$a_2x+a_2\frac{b_1}{a_1}y=a_2\frac{b_1}{a_1},$$

или

$$\frac{a_2}{a_1}a_1x+\frac{a_2}{a_1}b_1x=\frac{a_2}{a_1}c_1,$$

найдем, что оно отличается от первого уравнения лишь множителем a_2/a_1, т. е., по существу, совпадает с ним (равносильно ему). Система (66.2) сводится к одному лишь первому уравнению и определяет бесчисленное множество решений (такая система называется *неопределенной*). Возможен, в принципе, и такой крайний случай, как равенство нулю всех коэффициентов при неизвестных (он может встретиться при исследовании систем с буквенными коэффициентами). У такой системы

$$0\cdot x+0\cdot y=c_1,$$
$$0\cdot x+0\cdot y=c_2$$

все определители равны нулю: $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, однако, она является несовместной при c_1 или $c_2\neq 0$.

Подведем итоги исследования системы линейных уравнений (66.2). Имеется три вида таких систем:

1) Если $\Delta\neq 0$, то система определенная, имеет единственное решение (66.11).

2) Если $\Delta=0$, но $\Delta_x\neq 0$ (или $\Delta_y\neq 0$), то система несовместна, решений не имеет.

3) Если $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ (но хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля), то система неопределенная, имеет бесконечное множество решений (сводится к одному уравнению).

Равенство нулю определителя,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=0,$$

означает пропорциональность элементов, стоящих в его строках (и обратно):

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

В силу этого признаки, отличающие линейные системы разных типов (определенные, неопределенные, несовместные), могут быть сформулированы в терминах пропорций между коэффициентами системы (без привлечения определителей).

Условие $\Delta=0\,(\Delta\neq 0)$ заменяется поэтому требованием пропорциональности (непропорциональности) коэффициентов при неизвестных:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},\quad \text{если}\quad \Delta=0;$$

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2},\quad \text{если}\quad \Delta\neq 0.$$

В случае $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ оказываются пропорциональными не только коэффициенты при неизвестных, но и свободные члены:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

(эти пропорции получаются, например, из (67.6)). Если же, например, $\Delta_x\neq 0$, то из (66.6) видим, что $b_1/b_2\neq c_1/c_2$ — свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестных. Итак:

1) Если коэффициенты при неизвестных не пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2},$$

то система определенная.

2) Если коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2},$$

то система несовместная.

3) Если пропорциональны коэффициенты при неизвестных и свободные члены:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

то система неопределенная.

Проведенное исследование систем линейных уравнений с двумя неизвестными допускает простое геометрическое истолкование. Всякое линейное уравнение вида (38.4) определяет на координатной плоскости прямую линию. Уравнения системы (66.2) можно поэтому истолковать как уравнения двух прямых на плоскости,

а задачу решения системы — как задачу об отыскании точки пересечения этих прямых. Ясно, что возможны три случая: 1) данные две прямые пересекаются (рис. 61, *а*); этот случай отвечает определенной системе; 2) данные две прямые параллельны (рис. 61, *б*); этот случай соответствует несовместной системе;

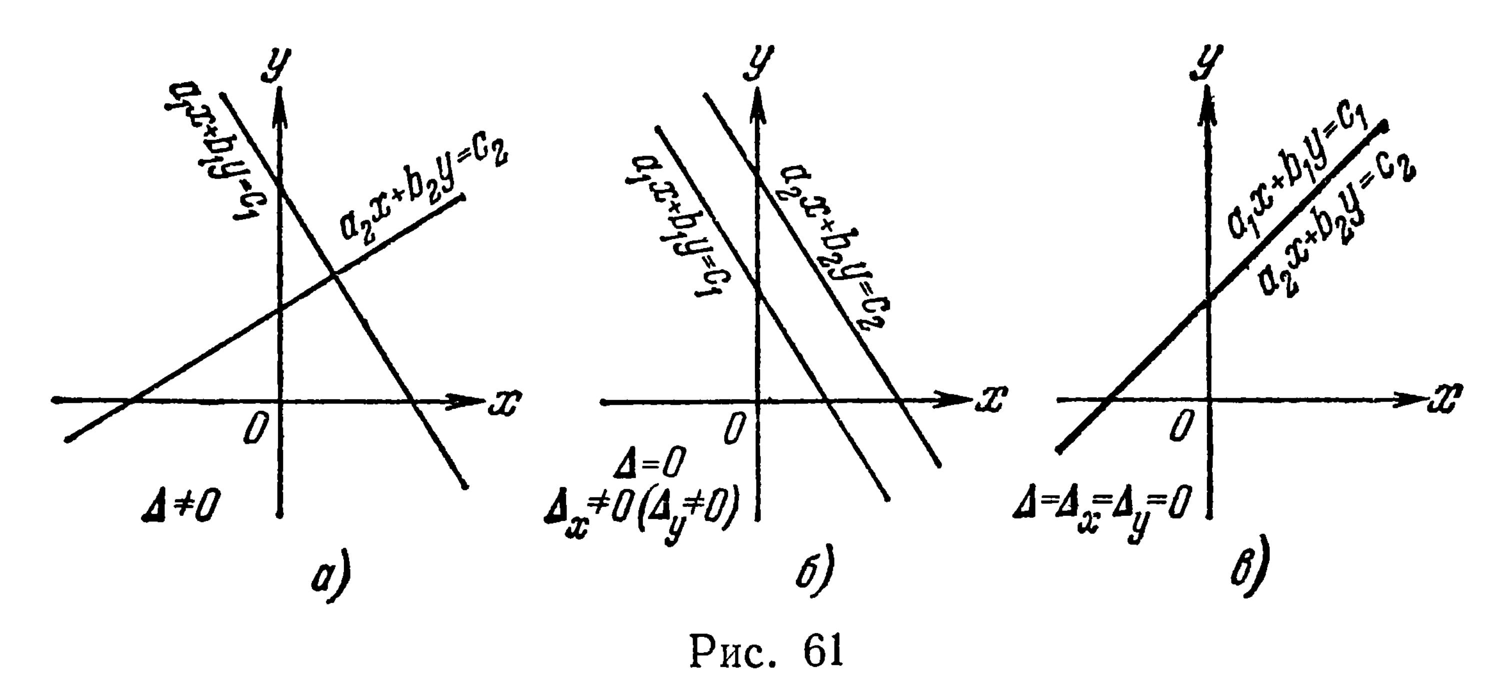


Рис. 61

3) данные прямые совпадают (рис. 61, *в*); этот случай соответствует неопределенной системе: каждая точка «дважды заданной» прямой будет решением системы.

Пример 3. Исследовать линейные системы:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 5x-\ \ 2y=4, \\ 0{,}35x-0{,}14y=2; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 0{,}2x+\ 3{,}1y=-\ 2{,}3, \\ x+15{,}5y=-11{,}5. \end{cases}$$

Решение. а) Составим и вычислим главный определитель данной системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0{,}35 & -0{,}14 \end{vmatrix}=-0{,}7+0{,}7=0.$$

Далее вычисляем Δ_x:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -0{,}14 \end{vmatrix}=-0{,}56+4\neq 0.$$

Система не имеет решений; она несовместна.

Этот же вывод можно сделать не прибегая к определителям. Замечаем, что в данной системе коэффициенты при x и y пропорциональны, а свободные члены не находятся в том же отношении, что и коэффициенты при неизвестных:

$$\frac{5}{0{,}35}=\frac{-2}{-0{,}14}\neq\frac{4}{2}.$$

б) Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0{,}2 & 3{,}1 \\ 1 & 15{,}5 \end{vmatrix}=3{,}1-3{,}1=0.$$

Далее,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2,3 & 3,1 \\ -11,5 & 15,5 \end{vmatrix} = -35,65 + 35,65 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0,2 & -2,3 \\ 1 & -11,5 \end{vmatrix} = -2,3 + 2,3 = 0.$$

Система имеет бесконечно много решений.

Можно прийти к этому выводу и без определителей, если заметить, что все коэффициенты системы пропорциональны; умножением на 5 первое уравнение приводится ко второму — система фактически состоит из одного уравнения.

Пример 4. Исследовать систему

$$\begin{cases} (a-1)x + (2a-3)y = a + 2, \\ (a+1)x + (a+3)y = 3a + 1. \end{cases} \tag{67.7}$$

Решение. Коэффициенты системы зависят от параметра a; исследовать систему — это значит указать, при каких значениях a система будет, соответственно, определенной, неопределенной, несовместной.

Начинаем с вычисления главного определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & 2a-3 \\ a+1 & a+3 \end{vmatrix} = (a-1)(a+3) - (a+1)(2a-3) =$$
$$= (a^2 + 2a - 3) - (2a^2 - a - 3) = -a^2 + 3a.$$

Главный определитель $\Delta = a(3-a)$ отличен от нуля при всех значениях a, не равных 0 и 3. Следовательно, система будет определенной (т. е. иметь единственное решение) при $a \neq 0$ и $a \neq 3$.

Исследуем теперь особые значения a; пусть сначала $a = 0$; система при этом принимает вид (мы подставляем $a = 0$ в уравнения (67.7))

$$\begin{cases} -x - 3y = 2, \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

и оказывается несовместной.

Остается еще рассмотреть случай $a = 3$; при $a = 3$ система (67.7) принимает вид

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

и сводится, по существу, к одному уравнению. Система неопределенная, ей удовлетворяют все точки прямой $2x + 3y = 5$. Выразив отсюда y через x: $y = (5 - 2x)/3$, запишем все множество решений в виде $(x, (5-2x)/3)$, где x может принимать произвольное значение.

Формулируем ответ: при $a = 0$ система несовместная, при $a = 3$ — неопределенная, при всех остальных значениях — определенная.

68. Системы, состоящие из уравнения второй степени и линейного уравнения. В общем случае система двух уравнений с двумя неизвестными при условии, что одно из уравнений — второй степени, а второе — линейное, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases} \qquad (68.1)$$

Для отыскания решений системы (68.1) можно из второго ее уравнения выразить одну неизвестную через другую (например, x через y) и это выражение подставить в первое уравнение, которое после этого сведется к квадратному уравнению (в отмеченном случае относительно y). Решив его, найдем два значения этой неизвестной (y_1 и y_2) и по ним определим два соответствующих значения (x_1 и x_2) второй неизвестной.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2+3x-2y-11=0, \\ 2x+3y+5=0. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения данной системы находим $x=-(3y+5)/2$. Подставим вместо x это выражение в первое уравнение:

$$5\left(-\frac{3y+5}{2}\right)^2+2\left(-\frac{3y+5}{2}\right)y-y^2+3\left(-\frac{3y+5}{2}\right)-2y-11=0.$$

После простых преобразований получится уравнение

$$29y^2+104y+51=0,$$

из которого найдем

$$y_1=-3, \qquad y_2=-17/29.$$

По найденным значениям y определим соответствующие значения x:

$$x_1=-\left.\frac{3y+5}{2}\right|_{y=-3}=2, \qquad x_2=-\left.\frac{3y+5}{2}\right|_{y=-17/29}=-\frac{47}{29}.$$

Решения системы запишем в виде

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\dfrac{47}{29}, \\ y_2=-\dfrac{17}{29} \end{cases}$$

или, короче, в виде $(2, -3)$, $\left(-\frac{47}{29}, -\frac{17}{29}\right)$.

Указанный метод решения является общим. В некоторых частных случаях удобней применять более специальные приемы решения рассматриваемых систем уравнений (хотя общий метод и остается применимым).

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases} \tag{68.2}$$

Здесь требуется найти неизвестные по заданным их сумме и произведению. Станем искать эти неизвестные как корни одного квадратного уравнения. В силу теоремы Виета (п. 60) такое квадратное уравнение составляется в виде

$$z^2-az+b=0 \tag{68.3}$$

(сумма его корней равна a, произведение равно b). Если теперь обозначим корни уравнения (68.3) через z_1, z_2, то решения системы (68.2) получим в виде

$$\begin{cases} x_1=z_1, \\ y_1=z_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=z_2, \\ y_2=z_1. \end{cases}$$

К этому же случаю сводятся и системы вида

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ xy=d. \end{cases} \tag{68.4}$$

Действительно, примем за новые неизвестные $u=ax$ и $v=by$. Ясно, что система (68.4) равносильна системе вида

$$ax+by=c,$$
$$ax \cdot by=abd$$

и сводится к системе типа (68.2)

$$u+v=c,$$
$$uv=abd$$

для $u=ax$, $v=by$.

Пример. 2. Решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=29; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ xy=35. \end{cases}$

Решение. а) Введем вспомогательную неизвестную z и для нее составим квадратное уравнение

$$z^2-10z+29=0.$$

Корни этого уравнения:

$$z_1=5+2i, \qquad z_2=5-2i.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1=5+2i, \\ y_1=5-2i; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=5-2i, \\ y_2=5+2i. \end{cases}$$

б) Записываем нашу систему в виде

$$\begin{cases} x+(-y)=2, \\ x\cdot(-y)=-2. \end{cases}$$

Отсюда

$$z^2-2z-2=0.$$

Корни этого уравнения:

$$z_1=1+\sqrt{3}, \qquad z_2=1-\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1=1+\sqrt{3}, \\ y_1=-1+\sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1-\sqrt{3}, \\ y_2=-1-\sqrt{3}. \end{cases}$$

в) Перепишем данную систему так:

$$\begin{cases} 2x+(-3y)=-1, \\ 2x\cdot(-3y)=-210. \end{cases}$$

Отсюда

$$z^2+z-210=0.$$

Найдя из этого уравнения

$$z_1=14, \qquad z_2=-15,$$

получим

$$\begin{cases} 2x_1=14, \\ -3y_1=-15; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2=-15, \\ -3y_2=14. \end{cases}$$

Решения данной системы:

$$\begin{cases} x_1=7, \\ y_1=5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-{}^{15}/_{2}, \\ y_2=-{}^{14}/_{3}. \end{cases}$$

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+y=5. \end{cases} \qquad (68.5)$$

Решение. Удобно возвести второе уравнение системы в квадрат и вычесть из него почленно первое уравнение:

$$\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2=25 \\ - \quad x^2+y^2=17 \\ \hline 2xy=8. \end{array}$$

Теперь используем второе уравнение системы (68.5) и полученное уравнение, выражающее xy:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4. \end{cases} \qquad (68.6)$$

Эту систему уже решаем, как предыдущие, с помощью теоремы Виета:

$$z^2-5z+4=0;$$

имеем $z_1=1$, $z_2=4$. Решения системы (68.5):

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=1 \end{cases}$$

(оба они удовлетворяют и первоначальной системе (68.5)).

Совсем просто решается система вида

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2-y^2=b. \end{cases} \tag{68.7}$$

Действительно, при $a\neq 0$ разделим второе уравнение на первое почленно:

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{b}{a},$$

и придем к системе уравнений первой степени

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b/a. \end{cases}$$

69. Примеры систем двух уравнений второй степени. Системы уравнений высших степеней. В элементарной математике рассматривают только некоторые простые частные случаи систем уравнений второй или высшей степени. Такова в частности, система вида

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b. \end{cases} \tag{69.1}$$

Система (69.1) решается, например, таким способом: второе уравнение умножаем на 2 и складываем с первым уравнением; получим уравнение

$$(x+y)^2=a+2b$$

и сведем решение системы (69.1) к решению пары систем:

$$1)\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b}, \\ xy=b; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b}, \\ xy=b, \end{cases}$$

решаемых с применением теоремы Виета.

Иначе можно решить систему (69.1), выразив из второго уравнения y через x: $y=b/x$. После подстановки этого выражения в первое уравнение получится биквадратное уравнение для x:

$$x^2+\frac{b^2}{x^2}=a, \quad \text{или} \quad x^4-ax^2+b^2=0.$$

Таким же путем приводится к биквадратному уравнению система вида

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ xy=b \end{cases} \tag{69.2}$$

и некоторые другие системы уравнений второй степени.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=-15. \end{cases}$$

Решение. Находим, складывая удвоенное второе уравнение с первым:

$$(x+y)^2=4.$$

Получаем две системы:

$$1)\ \begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y=-2, \\ xy=-15, \end{cases}$$

решениями которых будут следующие пары значений x и y:

$$(5, -3); \quad (-3, 5); \quad (3, -5); \quad (-5, 3).$$

Покажем теперь, как эту систему можно решить сведением ее к биквадратному уравнению. Для этого из второго уравнения найдем

$$y=-15/x.$$

Тогда первое уравнение системы запишем так:

$$x^2+\frac{225}{x^2}=34.$$

Отсюда

$$x^4-34x^2+225=0.$$

Мы получили биквадратное уравнение относительно x, из которого найдем $x^2=25$ и $x^2=9$, значит, соответственно,

$$x=\pm 5 \quad \text{и} \quad x=\pm 3.$$

Разделив число (-15) на каждое из найденных значений x, получим соответствующие значения y.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ xy=35. \end{cases}$$

Решение. Выражаем y из второго уравнения системы и подставляем в первое:

$$x^2-\frac{1225}{x^2}=24,$$

откуда

$$x^4-24x^2-1225=0.$$

Находим два значения x^2: 49 и -25. Имеем четыре значения: $x=\pm 7$, $x=\pm 5i$. Соответствующие y определяем из равенства $y=35/x$. Окончательно решения системы таковы:

$$(7, 5); \quad (-7, -5); \quad (5i, -7i); \quad (-5i, 7i).$$

К системе типа (69.2) приводит задача извлечения корня квадратного из комплексного числа, если решать ее чисто алгебраическим методом, не прибегая к тригонометрической форме записи комплексных чисел. Пусть требуется извлечь корень квадратный из числа $a+bi$. Обозначим неизвестный корень через $z=x+iy$ и по определению квадратного корня запишем

$$(x+iy)^2=a+bi,$$

или

$$x^2-y^2+2ixy=a+bi.$$

В силу условия равенства двух комплексных чисел приравниваем отдельно действительные и мнимые члены в обеих частях равенства:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ 2xy=b. \end{cases}$$

При решении этой системы следует учитывать, что по смыслу задачи x и y — действительные числа (мнимые решения надо отбросить).

Пример 3. Найти $\sqrt{4+3i}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{4+3i}=z=x+iy$. Тогда

$$(x+iy)^2=4+3i,$$
$$x^2-y^2+2ixy=4+3i,$$

откуда

$$x^2-y^2=4,$$
$$2xy=3.$$

Находим

$$y=3/(2x), \qquad x^2-9/(4x^2)=4$$

и

$$4x^4-16x^2-9=0.$$

Используем только положительный корень для x^2:

$$x^2={}^9/_2; \quad x_1=3/\sqrt{2}, \quad y_1=1/\sqrt{2}; \quad x_2=-3/\sqrt{2}, \quad y_2=-1/\sqrt{2}.$$

Итак, искомый корень имеет значения $\pm(3+i)/\sqrt{2}$.

Приведем еще примеры систем уравнений высших степеней; при этом ограничимся задачей отыскания их действительных решений.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=7(x+y), \\ x^2+y^2=10. \end{cases} \tag{69.3}$$

Решение. Первое уравнение системы (69.3) записывается в виде

$$(x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0,$$

и дальнейшее решение системы распадается на два случая в зависимости от того, будет ли $x+y$ равно нулю или нет.

1) $x+y=0$; $y=-x$. Из второго уравнения системы (69.3) находим $2x^2=10$, $x=\pm\sqrt{5}$. Получили два решения системы:

$$(\sqrt{5}, -\sqrt{5}) \quad \text{и} \quad (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

2) $x+y \neq 0$; тогда

$$x^2+y^2-xy-7=0,$$

или

$$xy=x^2+y^2-7.$$

Заменяя x^2+y^2 через 10 (по второму уравнению системы (69.3)), придем к системе уравнений

$$\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10, \end{cases}$$

которую решаем уже известным способом. Получим еще решения

$$(3,\ 1),\quad (1,3);\quad (-3,-1);\quad (-1,-3).$$

Всего данная система имеет шесть решений, все они действительные.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^3=8, \\ x^3y^2=4. \end{cases}$$

Решение. Перемножив почленно уравнения системы, найдем $(xy)^5=32$, откуда $xy=2$ (мы берем только действительный корень этого уравнения). Разделим поочередно каждое из уравнений данной системы на $x^2y^2=4$:

$$\frac{x^2y^3}{x^2y^2}=y=2, \qquad \frac{x^3y^2}{x^2y^2}=x=1.$$

Итак, данная система имеет следующее действительное решение:

$$x=1, \qquad y=2.$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4=x^2y^2+13, \\ x^2+y^2=xy+3. \end{cases}$$

Решение. Возведем второе уравнение в квадрат:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=x^2y^2+6xy+9.$$

Подставим в это уравнение вместо x^4+y^4 выражение этой суммы, взятое из первого уравнения системы. Получим

$$x^2y^2+13+2x^2y^2=x^2y^2+6xy+9,$$

откуда

$$x^2y^2-3xy+2=0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно xy. Из него имеем $xy=2$ или $xy=1$. Второе уравнение данной системы

соответственно можно переписать так: $x^2+y^2=5$ или $x^2+y^2=4$. Это приводит к двум следующим системам типа (69.1):

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ xy=1. \end{cases}$$

Первая из этих систем дает следующие четыре решения: (2, 1), (1, 2), (—1, —2), (—2, —1). Проверка показывает, что все они удовлетворяют исходной системе.

Вторая система решается аналогично. Ее решения иррациональны, читатель найдет их самостоятельно.

Упражнения

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2{,}1x+4{,}5y=13{,}5, \\ 3{,}7x-0{,}1y=-0{,}3. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z=19, \\ x+4y-2z=0, \\ 4x+5y-3z=-8. \end{cases}$$

3. Исследовать линейные системы:

а) $\begin{cases} 7x-11y=5; \\ 28{,}7x-45{,}1y=20{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12{,}3x-4{,}7y=5{,}0, \\ 36{,}9x-14{,}1y=16{,}1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-7y=2, \\ 4x+8y=-0{,}4. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-xy+y^2+x-y-6=0, \\ 4x-y+6=0. \end{cases}$$

5. Решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=15, \\ xy=-34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=5, \\ xy=14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+5y=30, \\ xy=15. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases}$$

7. Найти действительные решения следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12, \\ x^2y^3-x^3y^2=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x+y=3. \end{cases}$

§ 4. Иррациональные, показательные и логарифмические уравнения

70. Иррациональные уравнения. *Иррациональными* называются уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком корня. Таковы, например, уравнения

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=5,$$
$$7\sqrt[3]{2x^2+6}-3\sqrt[3]{x^2}=11,$$
$$x^2+\sqrt{x-1}=10x+\sqrt[3]{x-2}+1.$$

Во многих случаях, применяя однократно или многократно возведение в степень обеих частей уравнения, удается свести иррациональное уравнение к алгебраическому уравнению той или иной степени (являющемуся следствием исходного уравнения). Так как при возведении уравнения в степень могут появиться посторонние решения, то, решив алгебраическое уравнение, к которому мы привели данное иррациональное уравнение, следует найденные корни проверить подстановкой в исходное уравнение и сохранить лишь те, которые ему удовлетворяют, а остальные — посторонние — отбросить.

При решении иррациональных уравнений мы ограничиваемся только их действительными корнями; все корни четной степени в записи уравнений понимаются в арифметическом смысле.

Рассмотрим некоторые типичные примеры иррациональных уравнений.

А. *Уравнения, содержащие неизвестную под знаком квадратного корня.* Если данное уравнение содержит только один квадратный корень, под знаком которого имеется неизвестная x, то следует этот корень уединить, т. е. поместить в одной части уравнения, а все другие члены перенести в другую часть. После возведения в квадрат обеих частей уравнения мы уже освободимся от иррациональности и получим алгебраическое уравнение для x.

Пример 1. Решить уравнение $x+\sqrt{x+4}=3x-7$.

Решение. Уединяем корень в левой части уравнения:

$$\sqrt{x+4}=2x-7.$$

Возводим полученное равенство в квадрат:

$$x+4=4x^2-28x+49, \quad \text{или} \quad 4x^2-29x+45=0.$$

Находим корни этого уравнения:

$$x_1=5, \quad x_2={}^9/_4.$$

Проверка показывает, что лишь $x_1=5$ удовлетворяет исходному уравнению.

Если в уравнение входит два и более корня, содержащих x, то возведение в квадрат приходится повторять несколько раз.

Пример 2. Решить следующие уравнения:

а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-2}$; б) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4$.

Решение. а) Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x+2+2\sqrt{(x+2)(x-2)}+x-2=3x-2.$$

Уединяем корень:

$$2\sqrt{x^2-4}=x-2.$$

Полученное уравнение снова возводим в квадрат:

$$4(x^2-4)=(x-2)^2.$$

После преобразований получаем для x следующее квадратное уравнение:

$$3x^2+4x-20=0;$$

решаем его:

$$x_1=2, \qquad x_2=-{}^{10}/_3.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся в том, что $x_1=2$ есть его корень, а $x_2=-{}^{10}/_3$ является для него посторонним корнем.

б) Пример $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4$ можно решить тем же методом, каким был решен пример а). Однако, воспользовавшись тем, что правая часть данного уравнения не содержит неизвестной величины, поступим иначе. Умножим уравнение на выражение, сопряженное с его левой частью; получим

$$4(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3})=(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}).$$

Справа стоит произведение суммы на разность, т. е. разность квадратов. Отсюда

$$4(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3})=(2x+1)-(x-3),$$

или

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=\frac{x+4}{4}.$$

В левой части данного уравнения стояла сумма квадратных корней; в левой части полученного теперь уравнения стоит разность тех же корней. Запишем данное и полученное уравнения:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4,$$

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=\frac{x+4}{4}.$$

Взяв сумму этих уравнений, получаем

$$2\sqrt{2x+1}=4+\frac{x+4}{4},$$

или

$$8\sqrt{2x+1}=x+20.$$

Возведем в квадрат последнее уравнение и после упрощений получим

$$x^2-88x+336=0.$$

Отсюда находим $x_1=4$, $x_2=84$. Проверкой убеждаемся в том, что корнем данного уравнения служит только число $x=4$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2.$$

Здесь уже под знаком радикала мы имеем квадратные трехчлены.

Решение. Умножаем уравнение на выражение, сопряженное с его левой частью:

$$2\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=(x^2+3x-3)-(x^2-2x+2);$$

отсюда

$$\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{5x-5}{2}.$$

Вычтем последнее уравнение из данного:

$$2\sqrt{x^2-2x+2}=2-\frac{5x-5}{2}.$$

Отсюда

$$2\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{9-5x}{2},$$

или

$$4\sqrt{x^2-2x+2}=9-5x.$$

Возводим это уравнение в квадрат:

$$16(x^2-2x+2)=81-90x+25x^2.$$

Отсюда

$$9x^2-58x+49=0.$$

Из последнего уравнения находим $x_1=1$, $x_2=49/9$. Проверкой убеждаемся, что корнем данного уравнения служит только число $x=1$.

Б. *Уравнения, содержащие корни третьей степени. Системы иррациональных уравнений.* Ограничимся отдельными примерами таких уравнений и систем.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4. \qquad (70.1)$$

Решение. Покажем два способа решения уравнения (70.1).

Первый способ. Возведем обе части данного уравнения в куб (см. формулу (20.8)):

$$15+2x+13-2x+3\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}\cdot 4=64$$

(здесь мы заменили сумму кубических корней числом 4, пользуясь уравнением (70.1)). Итак, имеем

$$\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}=3,$$

или

$$(15+2x)(13-2x)=27,$$

т. е., после упрощений,

$$x^2+x-42=0,$$

откуда $x_1=6$, $x_2=-7$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Второй способ. Положим

$$u=\sqrt[3]{15+2x}, \qquad v=\sqrt[3]{13-2x}.$$

Уравнение (70.1) запишется в виде $u+v=4$. Кроме того, видно, что $u^3+v^3=28$. От уравнения (70.1) мы перешли к системе

$$\begin{cases} u^3+v^3=28, \\ u+v=4. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы почленно на второе, найдем

$$u^2-uv+v^2=7$$

и уже легко решим систему вида

$$\begin{cases} u^2-uv+v^2=7, \\ u+v=4. \end{cases}$$

Ее решения: $u_1=3$, $v_1=1$; $u_2=1$, $v_2=3$.

Из равенства $\sqrt[3]{15+2x}=u$ находим при $u=3$ и $u=1$:

$$x_1=6, \quad x_2=-7.$$

Рассмотрим теперь примеры решения систем уравнений с двумя неизвестными, из которых по крайней мере одно уравнение иррациональное.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}, \\ xy-x-y=0. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=z$. Это позволит первое уравнение системы записать в виде

$$z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2},$$

откуда $z_1=2$, $z_2={}^1/_2$. Взяв $z=2$, найдем

$$\sqrt{\frac{6x}{x+y}}=2, \quad \frac{6x}{x+y}=4, \quad 6x=4x+4y, \quad x=2y.$$

Теперь из второго уравнения системы находим $2y^2-3y=0$. Из корней этого неполного квадратного уравнения берем только $y_1={}^3/_2$ (корень $y=0$ отбрасываем; почему?). Отсюда $x_1=3$.

Если взять $z={}^1/_2$, то получим $x_2=24/23$, $y_2=24$ (читатель проведет все необходимые для этого выкладки самостоятельно). Итак, данная система имеет следующие решения: $(3, {}^3/_2)$; $(24/23, 24)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{xy}, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Решение. Возведя в квадрат первое уравнение, получим

$$x+y+2\sqrt{xy}=4xy.$$

С помощью второго уравнения системы найдем

$$2+2\sqrt{xy}=4xy, \quad \text{или} \quad 2xy-\sqrt{xy}-1=0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно $\sqrt{xy}$. Из него находим только положительное значение $\sqrt{xy}=1$, откуда $xy=1$, и данную систему тем самым сводим к системе

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что пара чисел (1, 1) служит единственным решением и ее, и исходной системы.

71. Показательные уравнения. *Показательными* называют уравнения в случае, если неизвестная величина находится в показателе степени (основание которой не содержит неизвестной величины); к показательным можно отнести уравнения

$$4^x-2^{x+1}-8=0, \quad 9^{x^2+4x}=3^{3x+7}.$$

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x=b. \tag{71.1}$$

Оно решается с помощью логарифмирования:

$$x=\log_a b.$$

Во многих случаях решение показательного уравнения после надлежащих преобразований сводится к решению уравнений простейшего вида (71.1). Кроме того, при решении показательных уравнений часто используется следующее известное положение.

Если равны степени с одним и тем же основанием, то равны показатели степени (либо основание равно единице): из равенства

$$a^u = a^v$$

вытекает $u = v$ (или $a = 1$).

Разберем примеры решения показательных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $9^{x^2+4x-4,5} = 3$.

Решение. Удобно представить обе части уравнения как степени одного и того же числа, например 9:

$$9^{x^2+4x-4,5} = 9^{0,5}.$$

Теперь приравниваем показатели степени и получаем уравнение

$$x^2 + 4x - 4,5 = 0,5,$$

из которого находим решения данного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Пример 2. Решить уравнение $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$.

Решение. И здесь удобно свести показательные функции к одному основанию 2:

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

Получили крадратное уравнение для неизвестной $u = 2^x$:

$$u^2 - 2u - 8 = 0;$$

его корни $u_1 = 4$, $u_2 = -2$. Так как $u = 2^x$ не может иметь отрицательных значений, то имеет смысл только решение $u_1 = 4$; находим единственный корень $x = 2$ уравнения из равенства $2^x = 4$.

Пример 3. Решить уравнение $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1}$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 7^x + \frac{1}{7} 7^x,$$

$$14 \cdot 2^x = \frac{8}{7} \cdot 7^x, \quad \frac{1}{4} \cdot 2^x = \frac{1}{49} \cdot 7^x$$

или, наконец

$$2^{x-2} = 7^{x-2}.$$

Отсюда $\left(\frac{2}{7}\right)^{x-2} = 1$ и $x - 2 = 0$.

Итак, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 6. \qquad (71.2)$$

Решение. Заметим, что числа $3 - 2\sqrt{2}$ и $3 + 2\sqrt{2}$ обратны по величине:

$$3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Поэтому, обозначив $(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}$ через u, перепишем

уравнение (71.2) в виде

$$u+\frac{1}{u}=6.$$

Имеем для u корни $u_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}$. Равенства

$$(3-2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}=3+2\sqrt{2}, \quad (3-2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}=3-2\sqrt{2}$$

приводят к двум квадратным уравнениям относительно x:

$$x^2-6x+9=-1, \quad x^2-6x+9=1.$$

Первое из них имеет мнимые корни, второе же дает решения уравнения (71.2): $x_1=4$, $x_2=2$.

72. Логарифмические уравнения. *Логарифмическими* называются уравнения, содержащие неизвестную под знаком логарифма или в основании логарифма (или и то и другое одновременно). Например, логарифмическими будут уравнения

$$\log_2 x+\log_4(x+2)=2,$$
$$\log_x 2+\log_x 8=3,$$
$$\log_x(x+6)=2.$$

Следует заметить, что при решении логарифмических уравнений необходимо учитывать о. д. з.: под знаком логарифма могут находиться только положительные величины, в основании логарифмов — только положительные величины, отличные от единицы.

Простейшим логарифмическим уравнением назовем уравнение вида

$$\log_a x=b. \tag{72.1}$$

Оно решается потенцированием:

$$x=a^b.$$

Решение других логарифмических уравнений иногда удается свести к решению уравнений простейшего вида (72.1).

При решении логарифмических уравнений используются свойства логарифмов и действие потенцирования. Приведем примеры решения логарифмических уравнений.

Пример 1. Решить уравнения: а) $\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)=3$; б) $\log_{(x^2-1)}27=3$; в) $\log_x(x+6)=2$.

Решение. а) По определению логарифма имеем $1+\frac{1}{x}=2^3$. Отсюда

$$1+\frac{1}{x}=8, \quad \frac{1}{x}=7, \quad x=\frac{1}{7}.$$

б) $(x^2-1)^3=27$. Отсюда $x^2-1=\sqrt[3]{27}$. Берем только действительное значение $\sqrt[3]{27}$, равное 3. Таким образом,

$$x^2-1=3, \quad x^2=4, \quad x_1=2, \quad x_2=-2.$$

в) $x^2=x+6$. Отсюда $x^2-x-6=0$; из двух корней $x_1=3$ и $x_2=-2$ полученного квадратного уравнения берем только положительный. Итак, единственный корень данного уравнения $x=3$.

Обратим внимание, что, решая уравнения из примера 1, мы не стали заранее определять о. д. з. Вместо этого мы всякий раз проверяем, удовлетворяют ли найденные значения x уравнению (это иногда занимает меньше времени, чем отыскание о. д. з.).

В следующем примере мы встречаемся с логарифмами по различным основаниям.

Пример 2. Решить уравнения: а) $\log_2 x+\log_4(x+2)=2$; б) $\log_2 x+\log_3 x=1$.

Решение. а) В соответствии со следствием из свойства 8 п. 27 имеем

$$\log_2 x=\log_{2^2} x^2=\log_4 x^2.$$

Это дает возможность записать данное уравнение в виде

$$\log_4 x^2+\log_4(x+2)=2.$$

Здесь логарифмы берутся уже по одному и тому же основанию 4 (это же можно было получить и с помощью модуля перехода). Заменяя сумму логарифмов, расположенную в левой части последнего уравнения, логарифмом произведения, получим $\log_4[x^2(x+2)]=2$.

Отсюда находим

$$x^2(x+2)=4^2, \qquad x^3+2x^2-16=0.$$

Для определения x имеем уравнение третьей степени (п. 62). Испытав делители свободного члена (—16), находим, что одним из корней этого кубического уравнения служит $x_1=2$. Делением его левой части на двучлен $x-2$ получаем квадратное уравнение $x^2+4x+8=0$ с корнями $x_{2,3}=-2\pm 2i$, которые для исходного логарифмического уравнения не имеют смысла и по этой причине должны быть отброшены.

Итак, корнем данного уравнения служит число $x=2$.

б) И здесь логарифмы берутся по разным основаниям. В качестве их общего основания выберем, например, число 2. Используя модуль перехода, перепишем данное уравнение так:

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=1.$$

Преобразуя это уравнение, найдем

$$\log_2(x^{\log_2 3}\cdot x)=\log_2 3.$$

Имеем, потенцируя,

$$x^{\log_2 3}\cdot x=3, \qquad x^{\log_2 3+1}=3.$$

В таком случае $x=3^{\frac{1}{\log_2 3+1}}$. Более просто этот ответ можно записать, заметив, что

$$\log_2 3+1=\log_2 3+\log_2 2=\log_2 6.$$

Отсюда

$$x = 3^{\frac{1}{\log_2 6}} = 3^{\log_6 2}.$$

Если требуется записать приближенное значение этого корня в форме десятичной дроби, то это можно сделать с помощью таблиц логарифмов так: сначала найти

$$\lg x = \log_6 2\cdot\lg 3 = \frac{\lg 2}{\lg 6}\lg 3 \approx \frac{0{,}3010\cdot 0{,}4771}{0{,}7781} \approx 0{,}1846,$$

а потом по $\lg x$ найти $x \approx 1{,}53$.

73. Разные уравнения. Системы уравнений. Здесь мы приведем примеры уравнений «смешанного типа», в которых неизвестная может одновременно входить и под знак корня, и под знак логарифма, и в показатель степени, а также примеры систем уравнений рассматриваемых типов.

Пример 1. Решить уравнения: а) $\log_2(5+3^{x^2})=5$; б) $6^{\log_{\sqrt{3}} x} - 7\cdot 6^{\log_3 x}+6=0$; в) $(x^2+6)^{\log_2 x}=(5x)^{\log_2 x}$.

Решение. а) По определению логарифма получаем

$$5+3^{x^2}=2^5, \qquad 5+3^{x^2}=32.$$

Отсюда $3^{x^2}=27$. Но $27=3^3$. Поэтому $3^{x^2}=3^3$, и, следовательно, $x^2=3$, откуда $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$. Оба эти числа служат решениями данного уравнения.

б) По свойству 8 п. 27 имеем

$$\log_{\sqrt{3}} x = \log_3 x^2 = 2\log_3 x.$$

Следовательно, данное уравнение можно переписать так:

$$6^{2\log_3 x} - 7\cdot 6^{\log_3 x}+6=0.$$

Обозначим $6^{\log_3 x}=z$ и получим для z квадратное уравнение $z^2-7z+6=0$ с корнями $z_1=6$ и $z_2=1$. Для определения x получим два уравнения:

$$6^{\log_5 x}=6, \qquad 6^{\log_3 x}=1.$$

Из первого находим $\log_3 x=1$, $x=3$, а из второго $\log_3 x=0$, $x=1$. Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1=3$ и $x_2=1$.

в) Если равны степени с одинаковыми показателями, то отсюда можно заключить, что основания равны друг другу или показатели равны нулю. Из первого предположения находим $x^2+6=5x$, а из второго $\log_2 x=0$. Решая эти два уравнения, определяем следующие три корня данного уравнения:

$$x_1=3, \qquad x_2=2, \qquad x_3=1.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$|x-1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9}=(x-1)^2. \tag{73.1}$$

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$|x-1|^{\log_3 x^2-2\log_x 9}=|x-1|^2.$$

Оно будет удовлетворяться в двух случаях: при равенстве показателей степени:

$$\log_3 x^2-2\log_x 9=2,$$

и при равенстве основания степени единице:

$$|x-1|=1.$$

Первая из этих возможностей приводит к уравнению относительно неизвестной $u=\log_3 x$:

$$2u-\frac{4}{u}=2, \quad \text{или} \quad u^2-u-2=0,$$

имеющему решения $u_1=2$, $u_2=-1$. Для x это дает два корня: $x_1=9$, $x_2={}^1/_3$.

Вторая возможность осуществляется при $x=2$ или $x=0$. Значение $x=0$ не входит в о.д.з. данного уравнения, значение же $x=2$ удовлетворяет уравнению. Итак, уравнение (73.1) имеет три корня: $x_1=9$, $x_2={}^1/_3$, $x_3=2$.

Пример 3. Решить следующие системы уравнений:

$$\text{а)}\ \begin{cases}\log_3 x-\log_9 y=0,\\ x^2-3y^2+44=0;\end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases}x^{x^2-y^2+8x+1}=1,\\ 2^y=8\cdot 2^x;\end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases}\log_y x+\log_x y=2{,}5,\\ xy=8;\end{cases} \qquad \text{г)}\ \begin{cases}5^{\lg x}-3^{\lg y}=0,\\ (3x)^{\lg 3}-(5y)^{\lg 5}=0.\end{cases}$$

Решение. а) Имеем $\log_3 x=\log_9 x^2$. Потенцируя первое уравнение системы, найдем

$$x^2=y.$$

Второе уравнение системы запишется как квадратное уравнение относительно y:

$$y-3y^2+44=0.$$

Его положительный корень $y=4$ (отрицательный корень не входит в о.д.з. данной системы). Для x получаем два значения: $x=\pm 2$, из которых отрицательное отбрасываем. Единственное решение системы: (2, 4).

б) Второе уравнение системы может быть записано в виде

$$2^y=2^{x+3}$$

и дает $y=x+3$.

Рассмотрение первого уравнения системы распадается на два случая:

$$1)\ x=1 \quad \text{и} \quad 2)\ x^2-y^2+8x+1=0.$$

В первом случае приходим к решению системы (1, 4). Во втором

имеем, с учетом равенства $y=x+3$, уравнение для x:

$$x^2-(x+3)^2+8x+1=0, \quad \text{или} \quad 2x-8=0.$$

Второе решение системы есть (4, 7).

в) Заметим, что $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$. Поэтому, положив $\log_y x = z$, приведем первое уравнение системы к уравнению $z+\frac{1}{z}=2{,}5$, которое сводится к квадратному относительно z. Из него получим $z_1=2$ и $z_2={}^1/_2$. Значит, $\log_y x=2$ или $\log_y x={}^1/_2$, откуда $x=y^2$ или $x=y^{1/2}$. Второе уравнение данной системы теперь можно записать так: $y^3=8$ или $y\sqrt{y}=8$. Первое уравнение имеет единственный действительный корень $y_1=2$; по нему находим $x_1=4$. Второе уравнение возведем в квадрат и получим уравнение $y^3=64$ с единственным действительным корнем $y_2=4$, откуда $x_2=2$. Итак, данная система имеет два решения: (4, 2) и (2, 4).

г) Перепишем уравнения системы в виде

$$\left\{\begin{aligned} 5^{\lg x} &= 3^{\lg y} \\ (3x)^{\lg 3} &= (5y)^{\lg 5} \end{aligned}\right.$$

и прологарифмируем каждое из них по основанию 10:

$$\left\{\begin{aligned} \lg x \lg 5 &= \lg y \lg 3, \\ (\lg x+\lg 3)\lg 3 &= (\lg y+\lg 5)\lg 5. \end{aligned}\right. \tag{73.2}$$

Из первого уравнения выразим $\lg y$:

$$\lg y = \lg x \cdot \frac{\lg 5}{\lg 3}.$$

Подставим это выражение в правую часть второго из уравнений (73.2) и после несложных преобразований получим

$$(\lg x+\lg 3)\lg 3 = (\lg x+\lg 3)\frac{\lg^2 5}{\lg 3}.$$

Отсюда

$$(\lg x+\lg 3)\left[\lg 3-\frac{\lg^2 5}{\lg 3}\right]=0,$$

и так как второй сомножитель левой части, очевидно, отличен от нуля, то $\lg x+\lg 3=0$, откуда $x={}^1/_3$; для y имеем $\lg y = -\lg 3\cdot\frac{\lg 5}{\lg 3}=-\lg 5$; $y={}^1/_5$. Единственное решение системы — точка $({}^1/_3, {}^1/_5)$.

Упражнения

1. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-11}$; б) $\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+2}=2$;
в) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}=\sqrt{2}$; г) $\sqrt{x^2+2x+13}-\sqrt{x^2+2x+6}=1$;
д) $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$.

2. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{3x-2}$; б) $\sqrt[3]{8-7x}+x=2$.

3. Решить уравнения:

а) $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$; б) $9^x-2^{x+1/2}=2^{x+7/2}-3^{2x-1}$;
в) $2^{2x+2}\cdot 10^{x+1}-10\cdot 2^{3x}\cdot 5^x=1200$.

4. Решить уравнения:

а) $\log_{16}x+\frac{1}{2}\log_4(x+4)=\frac{5}{4}$; б) $\log_x(x+2)+\log_{x+2}x=\frac{5}{2}$;
в) $\log_7\log_5(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})=0$; г) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

5. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2,\\ x^2-4xy+6x=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7,\\ 3x+2y=23;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=0,\\ 2\log_2 x+\log_2 y=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^{y-2}+x^{2-y}=\dfrac{5}{2},\\ x^y+x^{-y}=\dfrac{65}{8};\end{cases}$

д) $\begin{cases}x^y=2,\\ (2x)^{y^2}=64;\end{cases}$ е) $\begin{cases}3^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt[4]{y}}=36,\\ 9^{\sqrt[3]{x}}+4^{\sqrt[4]{y}}=97.\end{cases}$

Глава VI

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Числовые и алгебраические неравенства

74. Свойства неравенств. Действия над неравенствами. Поле действительных чисел обладает свойством упорядоченности (п. 6, стр. 35): для любых чисел a, b имеет место одно и только одно из трех соотношений: $a > b$, $a = b$, или $a < b$. При этом запись $a > b$ означает, что разность $a - b$ положительна, а запись $a < b$ — что разность $a - b$ отрицательна. В отличие от поля действительных чисел, поле комплексных чисел не упорядочивается: для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не определяются; поэтому в данной главе рассматриваются только действительные числа.

Соотношения $a > b$ и $a < b$ назовем *неравенствами*, числа a и b — *членами* (или частями) *неравенства*, знаки $>$ (больше) и $<$ (меньше) — *знаками неравенства*.

Неравенства $a > b$ и $c > d$ называются *неравенствами одинакового* (или одного и того же) *смысла*; неравенства $a > b$ и $c < d$ называются *неравенствами противоположного* (или разного) *смысла*.

Из определения неравенства сразу следует, что

1) любое положительное число больше нуля;

2) любое отрицательное число меньше нуля;

3) любое положительное число больше любого отрицательного числа;

4) из двух отрицательных чисел больше то, абсолютная величина которого меньше.

Все эти утверждения допускают простое геометрическое истолкование. Пусть положительное направление числовой оси идет вправо от начальной точки; тогда, каковы бы ни были знаки чисел, большее из них изображается точкой, лежащей правее точки, изображающей меньшее число.

Неравенства обладают следующими основными свойствами.

1. *Несимметричность* (*необратимость*): *если* $a > b$, *то* $b < a$, *и обратно.*

Действительно, если разность $a-b$ положительна, то разность $b-a$ отрицательна. Говорят, что *при перестановке членов неравенства надо смысл неравенства изменить на противоположный.*

2. *Транзитивность: если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.*

Действительно, из положительности разностей $a-b$ и $b-c$ следует и положительность $a-c=(a-b)+(b-c)$.

Кроме знаков неравенства $>$ и $<$ применяют также знаки неравенства $\geqslant$ и $\leqslant$. Они определяются следующим образом: запись $a \geqslant b$ означает, что либо $a>b$, либо $a=b$. Поэтому, например, можно писать $5 \geqslant 3$, а также $3 \geqslant 3$. Обычно неравенства, записанные с помощью знаков $>$, $<$, называют *строгими неравенствами*, а записанные с помощью знаков $\leqslant$, $\geqslant$ — *нестрогими неравенствами*. Соответственно и сами знаки называют знаками строгого или нестрогого неравенства. Свойства 1 и 2, рассмотренные выше, верны и для нестрогих неравенств.

Рассмотрим теперь действия, которые можно производить над одним или несколькими неравенствами.

3. *От прибавления к членам неравенства одного и того же числа смысл неравенства не изменяется.*

Доказательство. Пусть даны неравенство $a>b$ и произвольное число m. По определению разность $a-b$ положительна. Прибавим к этому числу два противоположных числа m и $(-m)$, от чего оно не изменится, т. е.

$$a-b+m-m=a-b.$$

Это равенство можно переписать так:

$$(a+m)-(b+m)=a-b.$$

Из этого следует, что разность $(a+m)-(b+m)$ положительна, т. е. что

$$a+m>b+m,$$

а это и надо было доказать.

На этом основана возможность переноса любого члена неравенства из одной его части в другую с противоположным знаком. Например, из неравенства

$$a+b>c$$

следует, что

$$a>c-b,$$
$$b>c-a,$$
$$a+b-c>0$$

и т. п.

4. *При умножении членов неравенства на одно и то же положительное число смысл неравенства не изменяется; при умножении членов неравенства на одно и то же отрицательное число смысл неравенства изменяется на противоположный.*

Доказательство. Пусть $a>b$; тогда $a-b>0$. Если $m>0$, то $m(a-b)>0$, так как произведение положительных чисел положительно. Раскрыв скобки в левой части последнего неравенства, получим $am-bm>0$, т. е. $am>bm$. Аналогичным образом рассматривается случай $m<0$.

Точно такой же вывод можно сделать и относительно деления частей неравенства на какое-либо отличное от нуля число, так как деление на число $n \neq 0$ равносильно умножению на число $1/n$, а числа n и $1/n$ имеют одинаковые знаки.

5. *Пусть члены неравенства положительны. Тогда при возведении его членов в одну и ту же положительную степень смысл неравенства не изменяется.*

Доказательство. Пусть $a>b$, $b>0$ (в этом случае по свойству транзитивности и $a>0$). Тогда в силу монотонного возрастания степенной функции x^m при $x>0$ и положительном m будем иметь $a^m>b^m$.

В частности, если $m=1/k$, где k — натуральное число, то получим

$$\sqrt[k]{a}>\sqrt[k]{b},$$

т. е. *при извлечении корня из обеих частей неравенства с положительными членами смысл неравенства не изменяется.*

Пусть члены неравенства отрицательны. Тогда нетрудно доказать, что при возведении его членов в нечетную натуральную степень смысл неравенства не изменится, а при возведении в четную натуральную степень изменится на противоположный. Из неравенств с отрицательными членами можно также извлекать корень нечетной степени.

Пусть, далее, члены неравенства имеют разные знаки. Тогда при возведении его в нечетную степень смысл неравенства не изменится, а при возведении в четную степень о смысле получающегося неравенства ничего определенного в общем случае сказать нельзя. В самом деле, при возведении числа в нечетную степень знак числа сохраняется и поэтому смысл неравенства не изменяется. При возведении же неравенства в четную степень образуется неравенство с положительными членами, и его смысл будет зависеть от абсолютных величин членов исходного неравенства — может получиться неравенство того же смысла, что и исходное, неравенство противоположного смысла и даже равенство!

Все сказанное о возведении неравенств в степень полезно проверить на следующем примере.

Пример 1. Возвести в указанную степень следующие неравенства, изменив в случае необходимости знак неравенства на противоположный или на знак равенства.

а) $3>2$ в степень 4; б) $3<4$ в степень 3;

в) $-3<-2$ в степень 3; г) $-4>-10$ в степень 2;
д) $2>-1$ в степень 5; е) $2>-1$ в степень 4;
ж) $2>-3$ в степень 2; з) $2>-2$ в степень 2.

6. От неравенства $a>b$ можно перейти к неравенству между $1/a$ и $1/b$: *если члены неравенства оба положительны или оба отрицательны, то между их обратными величинами имеется неравенство противоположного смысла*: $1/a<1/b$.

Доказательство. Если a и b — одного знака, то их произведение ab положительно. Разделим на ab неравенство $a>b$:

$$\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{b}>\frac{1}{a},$$

т. е. $1/a<1/b$, что и требовалось получить.

Если члены неравенства имеют противоположные знаки, то неравенство между их обратными величинами имеет тот же смысл, так как знаки обратных величин те же, что и знаки самих величин.

Пример 2. Проверить последнее свойство 6 на следующих неравенствах: а) $20>10$; б) $5<7$; в) $-2<3$; г) $2>-3$; д) $-^1/_2<-^1/_4$; е) $^1/_5>^1/_{10}$.

7. *Логарифмирование неравенств можно производить лишь в случае, когда члены неравенств положительны* (отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют).

Пусть $b>c$, $c>0$. Тогда при $a>1$ будет

$$\log_a b>\log_a c,$$

а при $0<a<1$ будет

$$\log_a b<\log_a c.$$

Правильность этих утверждений основана на монотонности логарифмической функции, которая возрастает, если основание $a>1$, и убывает при $a<1$ (п. 43).

Итак, *при логарифмировании неравенства, состоящего из положительных членов, по основанию, большему единицы, образуется неравенство того же смысла, что и данное, а при логарифмировании его по положительному основанию, меньшему единицы,— неравенство противоположного смысла.*

8. *Если $b>c$ и $a>1$, то $a^b>a^c$; если $b>c$, но $0<a<1$, то $a^b<a^c$.*

Это сразу следует из свойств монотонности показательной функции a^x (п. 42), которая возрастает в случае $a>1$ и убывает, если $0<a<1$.

9. *При почленном сложении неравенств одного и того же смысла образуется неравенство того же смысла, что и данные.*

Доказательство. Докажем это утверждение для двух неравенств, хотя оно верно для любого количества складываемых неравенств. Пусть даны неравенства $a>b$ и $c>d$. По определе-

нию числа $a-b$ и $c-d$ будут положительными; тогда положительной оказывается и их сумма, т. е.

$$(a-b)+(c-d)>0.$$

Группируя иначе слагаемые, получим

$$(a+c)-(b+d)>0$$

и, следовательно,

$$a+c>b+d,$$

а это и надо было доказать.

Нельзя сказать ничего определенного в общем случае о смысле неравенства, получающегося при сложении двух или нескольких неравенств разного смысла.

10. *Если из одного неравенства почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, то образуется неравенство того же смысла, что и первое.*

Доказательство. Пусть даны два неравенства $a>b$ и $c<d$ разного смысла. Второе из них по свойству необратимости можно переписать так: $d>c$. Сложим теперь два неравенства $a>b$ и $d>c$ одинакового смысла и получим неравенство

$$a+d>b+c$$

того же смысла. Из последнего находим

$$a-c>b-d,$$

а это и надо было доказать.

Нельзя сказать ничего определенного в общем случае о смысле неравенства, получающегося при вычитании из одного неравенства другого неравенства того же смысла.

11. *Если почленно перемножить два неравенства одинакового смысла с положительными членами, то образуется неравенство того же смысла.*

Доказательство. Пусть $a>b$, $c>d$, причем $b>0$, $d>0$. Находим, умножая первое неравенство на c, а второе на b:

$$ac>bc, \quad bc>bd,$$

откуда в силу транзитивности

$$ac>bd.$$

Отсюда снова вытекает правило о возведении неравенства с положительными членами в натуральную степень.

12. *Для любого числа a имеет место неравенство $|a|\geqslant a$.*

Доказательство. Если $a\geqslant 0$, то справедливо равенство $|a|=a$. Если $a<0$, то $|a|>0$ и имеется строгое неравенство $|a|>a$. В обоих случаях можно писать $|a|\geqslant a$, что и требовалось получить.

13. *Модуль суммы не превосходит суммы модулей:*

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \qquad (74.1)$$

Доказательство. Модуль суммы $|a+b|$ равен либо $a+b$, либо $-(a+b)$. По свойству 12 имеем

$$a \leqslant |a|, \quad b \leqslant |b|$$

и, складывая эти неравенства почленно (по свойству 9), найдем

$$a+b \leqslant |a|+|b|. \tag{74.2}$$

Точно так же $-a \leqslant |a|$, $-b \leqslant |b|$ и

$$-(a+b) \leqslant |a|+|b|. \tag{74.3}$$

Из неравенств (74.2) и (74.3) видно, что $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

В действительности нетрудно выяснить, когда имеет место знак равенства и когда знак строгого неравенства: $|a+b| = |a|+|b|$, если a и b одного знака, $|a+b| < |a|+|b|$, если a и b противоположных знаков.

Например, $|5+3| = |5|+|3|$; в то же время $|5-3| < |5|+|-3|$.

Свойство 13 верно и для любого числа слагаемых. Более того, оно обобщается и на комплексные числа (речь идет, конечно, о неравенствах между модулями комплексных чисел, которые являются действительными числами). Именно, если $z_1 = a_1+b_1 i$, $z_2 = a_2+b_2 i$, то $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ (рекомендуем возвратиться к рис. 9, где сумма комплексных чисел изображена геометрически, и истолковать написанное выше неравенство геометрически).

14. *Разность модулей не больше модуля разности*:

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|. \tag{74.4}$$

Доказательство. Запишем очевидное равенство

$$|a| = |b+(a-b)|$$

и применим свойство 13:

$$|a| = |b+(a-b)| \leqslant |b|+|a-b|.$$

Получим $|a| \leqslant |b|+|a-b|$, или $|a|-|b| \leqslant |a-b|$.

Неравенство (74.4) допускает следующее усиление:

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|,$$

и остается верным и в применении к комплексным числам (доказать самостоятельно).

75. Алгебраические неравенства. Неравенства между двумя алгебраическими выражениями, такие, например, как

$$a^2+b^2 > a+b, \quad x^2-6x+4 \geqslant 2x-5, \quad \log_a(2x+1) < \log_a x^2, \ \ldots,$$

могут при подстановке вместо буквенных параметров, входящих в левую и правую части неравенств, переходить либо в верные, либо в неверные числовые неравенства. Так, неравенство

$$abc < a+b+c$$

удовлетворяется при $a=1$, $b=1$ и $c=2$ и не удовлетворяется при $a=2$, $b=2$ и $c=3$.

Имеются, однако, такие неравенства, которые оказываются справедливыми для всех допустимых значений входящих в них буквенных параметров. Таковы, например, неравенства (везде мы имеем в виду только действительные значения параметров)

$$a^2+b^2\geqslant 0, \quad |a+b|\leqslant|a|+|b|, \quad x^2+2x+2>0.$$

Иногда приходится проводить доказательство неравенств; при этом «доказать неравенство» — значит установить, что оно справедливо для любых допустимых значений параметров.

Пример 1. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Решение. Под средним арифметическим двух чисел $a>0$ и $b>0$ понимают число $(a+b)/2$, а под их средним геометрическим — число $\sqrt{ab}$.

Требуется доказать справедливость неравенства

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab} \tag{75.1}$$

для всех положительных чисел a и b. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0; \tag{75.2}$$

преобразуем левую часть неравенства (75.2):

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Теперь видно, что неравенство (75.2), а следовательно и неравенство (75.1), выполняется при любых положительных a и b; если $a\neq b$, то неравенство строгое; если же $a=b$, то среднее арифметическое равно среднему геометрическому.

Дадим неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим также геометрическое истолкование (см. рис. 295, п. 216). Среднее геометрическое двух отрезков a и b, сумма которых принята за диаметр окружности, изображается полухордой MD, а среднее арифметическое — радиусом OM, который не меньше этой полухорды.

Неравенство (75.1) также обобщается на случай n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и записывается в форме

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \tag{75.3}$$

(доказательство мы не приводим).

Пример 2. Доказать, что при любом положительном a справедливо неравенство

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+2}<2\sqrt{a+1}. \tag{75.4}$$

Решение. Данное неравенство можно записать в равносильной форме:

$$\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}<\sqrt{a+1}-\sqrt{a}. \qquad (75.5)$$

Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель:

$$\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}<\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \qquad (75.6)$$

(обе части неравенства преобразуются тождественно). Полученное неравенство верно: числители дробей равны 1, а знаменатель в правой части меньше. Из неравенства (75.6) следует неравенство (75.5), а из него — неравенство (75.4), которое требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что во всей области допустимых значений a, b, c имеет место неравенство

$$\sqrt{a+2b}+\sqrt{a+2c}\leqslant 2\sqrt{a+b+c}. \qquad (75.7)$$

Решение. Обе части неравенства (75.7) неотрицательны; поэтому мы можем возвести неравенство в квадрат:

$$a+2b+a+2c+2\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\leqslant 4(a+b+c), \qquad (75.8)$$

откуда получаем

$$\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\leqslant a+b+c. \qquad (75.9)$$

Всякий раз, когда a, b, c лежат в о.д.з. неравенства (75.7) и выполнено неравенство (75.9), будет выполнено и неравенство (75.7). Поэтому доказательство неравенства (75.7) сводится к доказательству неравенства (75.9). Обе его части также неотрицательны. Возводим его в квадрат. Получаем

$$a^2+2ba+2ca+4bc\leqslant a^2+2ab+2ac+b^2+c^2+2bc \qquad (75.10)$$

или

$$0\leqslant b^2+c^2-2bc=(b-c)^2 \qquad (75.11)$$

— неравенство, верное при всех значениях a, b, c. В силу неравенства (75.11) устанавливаем последовательно справедливость предшествующих неравенств (75.10), (75.9), (75.8), вплоть до неравенства (75.7), которое требовалось доказать.

Упражнения

1. Доказать, что при $p\geqslant 1$ выполняется неравенство $5p^2-1\geqslant 4p$.
2. Доказать, что если $a+b>-b+c$ и $a-b>b+c$, то $a>c$.
3. Доказать, что для любых действительных чисел x, y и z выполняется неравенство $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$.
4. Доказать, что если $a^2+b^2+c^2=1$, то $a+b+c\leqslant\sqrt{3}$ (a, b, c — неотрицательные числа).

§ 2. Решение неравенств

76. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства. Будем рассматривать строгие или нестрогие неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x) \tag{76.1}$$

или

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \tag{76.2}$$

соответственно. Всякое числовое значение $x = x_0$ из области допустимых значений называется *решением неравенства* (76.1) или (76.2), если при подстановке этого значения x_0 в обе части неравенства получается верное числовое неравенство. Вообще говоря, неравенство может иметь различные решения (часто их бывает бесконечно много). Все решения неравенства образуют *множество* его *решений* (иногда называемое также *областью* его *решений*). Так, неравенство $x^2 < 1$ имеет в качестве своего множества решений открытый интервал $(-1, 1)$, $-1 < x < 1$, а неравенство $x^2 \leqslant 1$ — отрезок $[-1, 1]$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Иногда, краткости ради, мы допускаем вольность речи и говорим, что решением неравенства $x^2 < 1$ служит интервал $(-1, 1)$; в этом случае слово «решение» имеет смысл «множество решений».

В зависимости от своего конкретного вида неравенство может вообще не иметь решений (его множество решений пусто) или иметь множество решений самого различного вида (открытый интервал, отрезок, бесконечный интервал и т. д.). В любом случае решить неравенство — значит указать все множество его решений. В частности, неравенство может выполняться для всех (допустимых) значений x.

Из двух неравенств

$$f_1(x) > f_2(x)$$

и

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$$

второе называется *следствием* первого, если множество решений второго неравенства содержит в себе множество решений первого неравенства. Два неравенства называются *равносильными*, если каждое из них является следствием другого. Иначе это можно сформулировать так: два неравенства считаются *равносильными*, если их множества решений совпадают. Эти определения аналогичны соответствующим определениям для уравнений (п. 54). Как и для уравнений, можно было бы сформулировать утверждения о действиях, преобразующих данное неравенство в равносильное ему. Такими действиями могут быть прибавление к обеим частям неравенства одинакового слагаемого (и, как следствие, перенос слагаемого с противоположным знаком из одной части неравенства в другую) и умножение обеих частей

неравенства на положительное число или положительную функцию. Возможно также деление членов неравенства на положительную функцию и т. д. Следует, однако, производя эти действия, следить, чтобы не изменилась область допустимых значений, так как иначе равносильность неравенств может быть нарушена.

Пример. Из двух неравенств

$$x > 1, \quad x^2 > 1$$

второе является следствием первого, но они не равносильны. Неравенства же $x > 1$ и $x^3 > 1$ равносильны.

Соблюдение требования равносильности преобразований неравенства, выполняемых в процессе его решения, важней соблюдения соответствующего требования для уравнений. Действительно, можно не опасаться появления посторонних корней при решении уравнений, так как последующая проверка подстановкой в исходное уравнение позволяет их отбросить. Для неравенства характерно наличие бесконечного множества решений, и поэтому проверка их подстановкой в неравенство практически невозможна. По этой же причине и отыскание о.д.з. для решаемого неравенства является необходимой составной частью процесса решения.

77. Графическое решение неравенств. Если неравенство записано в виде $f(x) > 0$, то, построив график функции $y = f(x)$, можно непосредственно по чертежу видеть, для каких значений x неравенство удовлетворяется (график лежит выше оси Ox). Решение будет точным или приближенным в зависимости от того, точно или приближенно найдены точки, где график переходит из нижней полуплоскости $y < 0$ в верхнюю полуплоскость $y > 0$.

Если неравенство задано в виде $f_1(x) > f_2(x)$, то можно построить графики двух функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и по чертежу определять, для каких значений x первый график располагается выше второго. Множество таких x и даст множество решений неравенства.

Основная ценность графического подхода к решению неравенств состоит в том, что уже схематическое изображение графиков функций часто показывает, что неравенство выполняется в интервалах, ограниченных такими характерными точками, как точки пересечения графиков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ между собой (или точки пересечения графика $y = f(x)$ с осью Ox). Отыскание этих точек является уже несколько более легкой задачей: оно сводится к решению уравнений, а не неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} < x.$$

Решение. Строим графики функций $y=x$ и $y=\sqrt{2-x}$ (рис. 62). Первый из них нам известен, второй представляет собой часть параболы $x=2-y^2$, лежащую в верхней полуплоскости. Из чертежа видно, что неравенство удовлетворяется в интервале $(a, 2)$, левый конец которого — корень уравнения $\sqrt{2-x}=x$. Решаем это уравнение: $2-x=x^2$, $x_1=1$, $x_2=-2$.

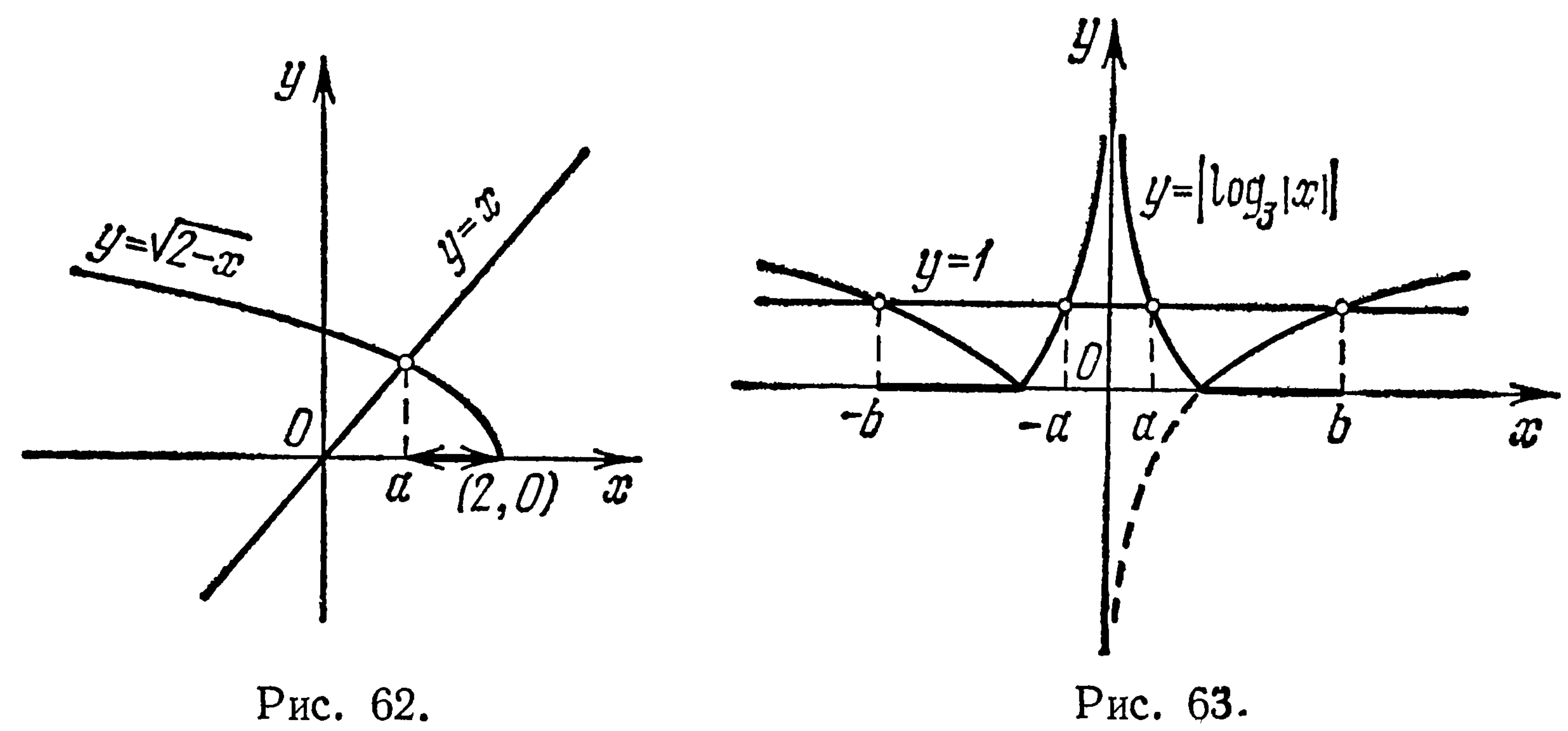


Рис. 62. Рис. 63.

Корень $x_2=-2$ — посторонний, нужное нам значение: $a=x_1=1$. Итак, неравенство удовлетворяется в интервале $(1, 2)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$|\log_3|x||\leqslant 1. \qquad (77.1)$$

Решение. Строим график функции $y=|\log_3|x||$; на рис. 63 пунктиром показан график функции $y=\log_3 x$, после чего график $y=|\log_3|x||$ получен по способу п. 48 (он показан сплошной линией). Далее проведена прямая $y=1$. Сразу видно, что неравенству (77.1) будут удовлетворять значения x из двух симметричных интервалов: $(-b, -a)$ и (a, b). Здесь через $\pm a$, $\pm b$ обозначены абсциссы точек пересечения прямой $y=1$ с графиком функции, т. е. решения уравнения

$$|\log_3|x||=1. \qquad (77.2)$$

В силу симметрии достаточно найти решения уравнения (77.2) при $x>0$. Поэтому уравнение (77.2) сводится к

$$|\log_3 x|=1.$$

При $x>1$ имеем $|\log_3 x|=\log_3 x$ и из $\log_3 x=1$ находим $x=3$. При $x<1$ имеем $|\log_3 x|=-\log_3 x$ и из $\log_3 x=-1$ находим $x=1/3$. Ясно, что $a=1/3$, $b=3$ и множеством решений данного неравенства служит пара симметричных интервалов $(-3, -1/3)$ и $(1/3, 3)$.

78. Линейные неравенства. Системы линейных неравенств. Неравенства вида

$$ax+b>0 \qquad (a\neq 0) \qquad (78.1)$$

(а также $ax+b<0$, $ax+b\geqslant 0$, $ax+b\leqslant 0$) называются *линейными неравенствами* или *неравенствами первой степени*.

Для решения неравенства (78.1) перенесем свободный член в правую часть неравенства с противоположным знаком:

$$ax>-b. \tag{78.2}$$

Приходится различать два случая: $a>0$ и $a<0$. Если $a>0$, то разделим обе части неравенства (78.2) на a и получим равносильное неравенство $x>-b/a$, которое показывает, что множество решений неравенства (78.1) в данном случае — бесконечный интервал $(-b/a, \infty)$. Если $a<0$, то при делении обеих частей неравенства (78.2) на a придется изменить смысл неравенства, $x<-b/a$, и решением неравенства (78.1) в этом случае будет бесконечный интервал $(-\infty, -b/a)$.

Замечание. Если бы $a=0$, то неравенство (78.1) не содержало бы x и было бы либо верным, либо неверным числовым неравенством.

Пример 1. Решить неравенства: а) $3x+4>x+10$; б) $6x+1\geqslant 10x+3$.

Решение. а) Перенесем члены, содержащие x, в левую часть неравенства, а свободные члены — в правую часть:

$$2x>6, \quad x>3.$$

Решением неравенства является интервал $(3, \infty)$.

б) Перенесем неизвестные члены в левую часть, а известные — в правую часть неравенства:

$$6x-10x\geqslant 3-1, \quad -4x\geqslant 2.$$

При делении неравенства на отрицательное число (-4) изменим смысл неравенства на противоположный, получим $x\leqslant -{}^1/_2$.

Множеством решений данного неравенства служит бесконечный интервал $(-\infty, -{}^1/_2]$.

Пример 2. Решить (и исследовать) неравенство

$$(a-1)x>a^2-1.$$

Решение. Различаем случаи:

$$1)\ a>1; \quad 2)\ a<1; \quad 3)\ a=1.$$

При $a>1$ делим обе части на $a-1$ и сохраняем смысл неравенства: $x>a+1$. При $a<1$ одновременно с делением на $a-1$ изменяем смысл неравенства: $x<a+1$. При $a=1$ неравенство не выполняется ни при каком x.

Ответ. Если $a>1$, то множеством решений служит интервал $(a+1, \infty)$; если $a<1$, то множество решений — интервал $(-\infty, a+1)$; при $a=1$ решений не имеется.

В случае, если задана система линейных неравенств с одной неизвестной x, например система двух неравенств вида

$$\begin{cases} ax+b \geqslant 0, \\ cx+d \leqslant 0, \end{cases}$$

то ее решение проводится так: решают каждое неравенство в отдельности, а затем находят те значения x, которые входят во множества решений каждого из неравенств. В случае двух неравенств решением каждого из них служит бесконечный интервал вида $[\alpha, \infty)$ или $(-\infty, \alpha]$. Можно представить себе четыре основные возможности, поясняемые рис. 64, где I и II обозначают области решений первого и второго неравенств.

1) Решениями обоих неравенств служат бесконечные интервалы вида $[\alpha, \infty)$, $[\beta, \infty)$ соответственно, т. е. лучи положительного направления с начальными точками α, β. Если, например, $\alpha \leqslant \beta$, то решением системы неравенств будет общая часть этих лучей — луч $[\beta, \infty)$. Этот случай показан на рис. 64, *а*.

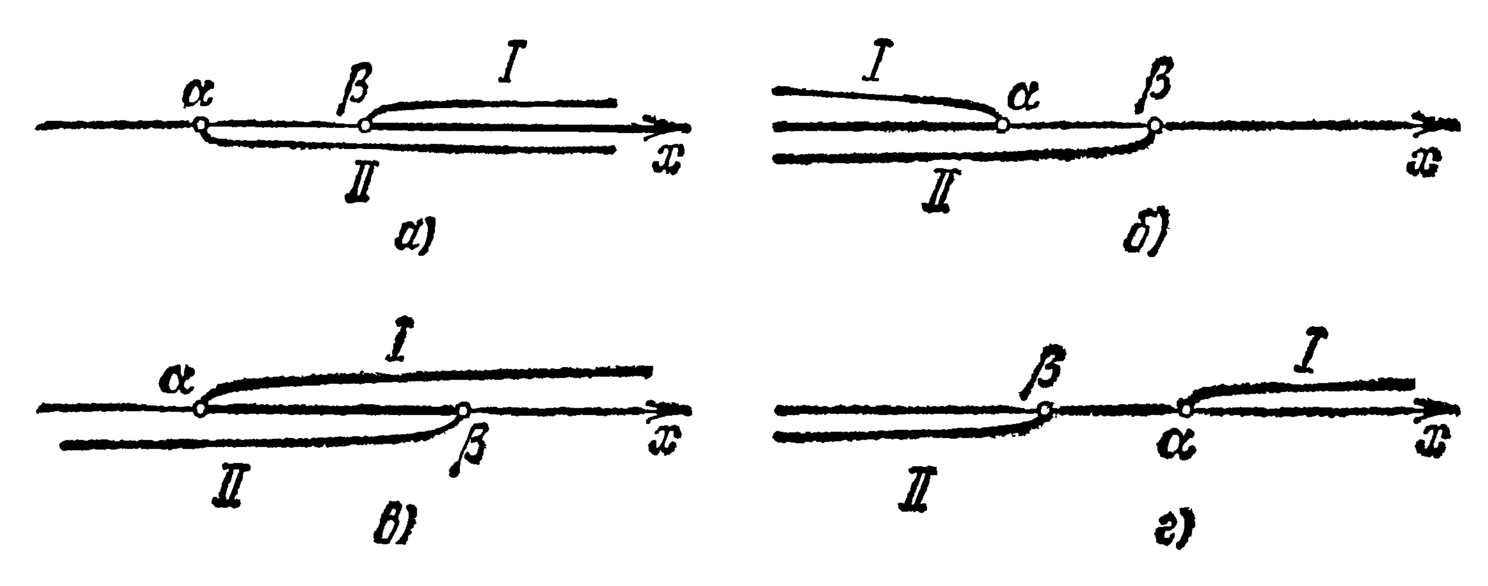


Рис. 64.

2) Решения неравенств — бесконечные интервалы (лучи) вида $(-\infty, \alpha]$, $(-\infty, \beta]$. Решением системы служит тот из этих интервалов, который содержится в другом; при $\alpha \leqslant \beta$ таким является интервал $(-\infty, \alpha]$ (рис. 64, *б*).

3) Решение одного из неравенств — луч $[\alpha, \infty)$, другого — луч $(-\infty, \beta]$, причем $\alpha \leqslant \beta$ (рис. 64, *в*). Общей частью бесконечных интервалов, представляющих решения неравенств системы при $\alpha < \beta$, является сегмент $[\alpha, \beta]$, который и служит множеством решений системы. При $\alpha = \beta$ множество решений сведется к одной точке β.

4) Решения неравенств — лучи $[\alpha, \infty)$ и $(-\infty, \beta]$, причем $\beta < \alpha$ (рис. 64, *г*). В этом случае ни одна точка числовой оси не удовлетворяет обоим неравенствам одновременно. Система неравенств не имеет решений (множество ее решений пусто).

Пример 3. Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x+1 \geqslant x-1, \\ 3x+1 \geqslant 5x-7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1-2x \leqslant x+10, \\ 6x+1 > x+11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10x-2 < 4x+10, \\ 2x+4 \leqslant 3x+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x-4 < x, \\ x+5 > 2x+4. \end{cases}$

Решение. а) Решим последовательно первое и второе неравенства системы:

$$2x-x \geqslant -1-1, \quad x \geqslant -2;$$
$$3x-5x \geqslant -7-1, \quad -2x \geqslant -8, \quad x \leqslant 4.$$

Обоим неравенствам одновременно удовлетворяют все числа, большие или равные (-2), но меньшие или равные 4. Записать решение данной системы поэтому можно так: $-2 \leqslant x \leqslant 4$. Ее множество решений — сегмент $[-2, 4]$.

При отыскании множества решений системы полезно пользоваться наглядным приемом, который в данном случае проводится так: интервал, содержащий решения одного неравенства, покрывается штриховкой в одном направлении (на рис. 65, *а*

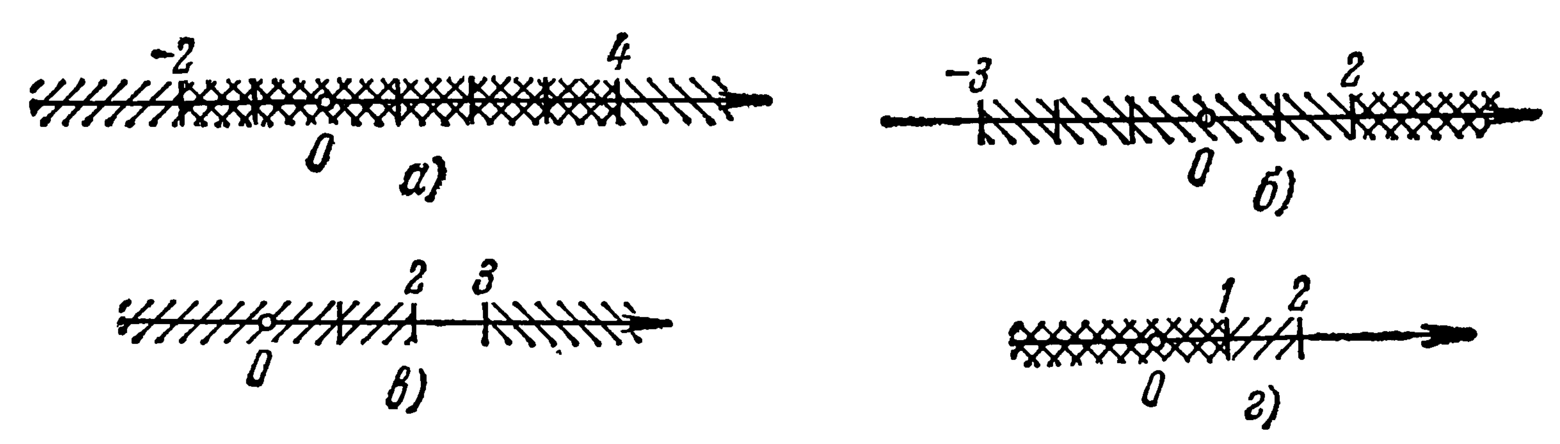


Рис. 65.

в направлении слева вниз направо), а интервал, содержащий решения другого неравенства, — в другом направлении (на рис. 65, *а* слева вверх направо). Множеством решений системы будет служить дважды заштрихованный интервал числовой оси.

б) Множеством решений первого неравенства служит интервал $[-3, +\infty)$, а второго — интервал $(2, +\infty)$. Следовательно, множества решений системы — бесконечный интервал $(2, +\infty)$; на рис. 65, *б* это отчетливо видно.

в) Первому неравенству удовлетворяют все числа, меньшие 2, а второму — все числа, большие или равные 3. Множества решений неравенств, составляющих систему, общих точек не имеют (рис. 65, *в*). Неравенства несовместны, система противоречива.

г) Множеством решений первого неравенства служит интервал $(-\infty, 2)$, а второго — интервал $(-\infty, 1)$. Поэтому множеством решений системы является бесконечный интервал $(-\infty, 1)$; это видно из рис. 65, *г*.

К системам неравенств приводят неравенства, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины. Ограничимся решением типичного примера.

Пример 4. Решить неравенство

$$x+2|x-2|<5. \qquad (78.3)$$

Решение. Для того чтобы записать неравенство без знака модуля, придется рассмотреть две возможности: 1) $x \geqslant 2$ и 2) $x<2$.

1) $x \geqslant 2$; тогда неравенство (78.3) принимает вид $3x-4<5$ и мы приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ 3x-4<5. \end{cases} \qquad (78.4)$$

2) $x<2$; в этом случае неравенство (78.3) сводится к виду $-x+4<5$ и получается система

$$\begin{cases} x<2, \\ -x+4<5. \end{cases} \qquad (78.5)$$

Множество решений неравенства (78.3) будет объединением множеств решений систем (78.4) и (78.5). Первая система имеет своим решением интервал $[2, 3)$, вторая — интервал $(-1, 2)$. Итак, решение неравенства (78.3) — интервал $(-1, 3)$.

79. Квадратные неравенства. *Квадратным неравенством* или *неравенством второй степени* называется неравенство вида

$$ax^2+bx+c>0. \qquad (79.1)$$

Так как исследование знака квадратного трехчлена по существу полностью проведено в п. 45 в связи с построением графика этой функции и наглядно представлено на рис. 45, то можно здесь воспользоваться этими результатами. В зависимости от знаков дискриминанта $d=b^2-4ac$ и старшего коэффициента a представляются следующие возможности:

1) $d<0$, $a>0$. Неравенство (79.1) выполнено при всех значениях a (трехчлен положителен для всех значений аргумента). Этот случай представлен рис. 45, *а* (см. стр. 132).

2) $d<0$, $a<0$. Неравенство не выполняется ни для одного значения x, множество его решений пусто (рис. 45, *б*).

3) $d=0$, $a>0$. Такой трехчлен изображен на рис. 45, *д*; неравенство (79.1) выполняется для всех x, кроме $x=-b/(2a)$ (двойной корень трехчлена).

4) $d=0$, $a<0$. Неравенство не может выполняться ни при одном значении x (трехчлен отрицателен всюду, кроме единственной точки $x=-b/(2a)$, где он обращается в нуль; рис. 45, *е*).

5) $d>0$, $a>0$. График трехчлена изображен на рис. 45, *в*. Неравенство (79.1) выполняется всюду вне интервала между

корнями. Если x_1, x_2 — корни трехчлена, причем $x_1 < x_2$, то неравенство (79.1) выполняется в бесконечных интервалах $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞).

б) $d > 0$, $a < 0$. График показан на рис. 45, *г*; неравенство удовлетворено в интервале между корнями трехчлена (x_1, x_2).

В сжатой форме эти положения о знаке квадратного трехчлена формулируют так: *квадратный трехчлен с мнимыми корнями имеет постоянный знак, совпадающий со знаком его старшего коэффициента; квадратный трехчлен с различными действительными корнями имеет в интервале между корнями знак, противоположный знаку его старшего коэффициента, а вне интервала между корнями — знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента.*

Эти результаты для трехчлена с действительными корнями x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ можно подкрепить следующими типичными рассуждениями, которые окажутся далее (в п. 80) полезными при решении неравенств высших степеней и неравенств, содержащих дробные рациональные функции. Запишем разложение квадратного трехчлена на множители (п. 60):

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (79.2)$$

Очевидно, что в областях $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_2$ трехчлен имеет определенный знак, одинаковый для каждой точки данной области. При переходе же из области в область, т. е. при переходе x через одно из значений x_1, x_2, знак его изменяется. Теперь достаточно установить знак трехчлена для каждой из трех указанных областей.

1. $x < x_1$. Имеем $x - x_1 < 0$, $x - x_2 < 0$; знак трехчлена совпадает со знаком a.

2. $x_1 < x < x_2$; в этом случае $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$; знак трехчлена противоположен знаку a.

3. $x > x_2$. Теперь уже $x - x_1 > 0$, $x - x_2 > 0$, и знак трехчлена снова совпадает со знаком a.

Выводы графического и алгебраического исследования полностью совпали.

Пример 1. Решить следующие неравенства:

а) $x(2x-1) > (x-2)^2$; б) $2x(x+2) \geqslant x(7x+10)+1$.

Решение. а) Преобразуем данное неравенство:

$$2x^2 - x > x^2 - 4x + 4,$$

или

$$x^2 + 3x - 4 > 0.$$

Получилось квадратное неравенство, равносильное данному. Замечаем, что дискриминант трехчлена $x^2 + 3x - 4$ больше нуля и что его корнями служат числа (-4) и 1. Таким образом, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Множество решений данного неравенства состоит

из двух бесконечных интервалов: $(-\infty, -4)$, $(1, +\infty)$. Этот ответ рекомендуется проверить, построив график трехчлена $y=x^2+3x-4$.

б) После простых преобразований получаем квадратное неравенство

$$5x^2+6x+1\leqslant 0,$$

равносильное данному. Дискриминант трехчлена $5x^2+6x+1$ положителен, корнями трехчлена являются числа $x_1=-1/5$, $x_2=-1$.

Множество решений задается неравенствами $-1\leqslant x\leqslant -1/5$; они представляют собой сегмент $[-1, -1/5]$.

Пример 2. Решить неравенство

$$|x^2-2x|<3/4. \qquad (79.3)$$

Решение. Числа, модуль которых меньше a, заполняют интервал от $-a$ до a. Поэтому неравенство (79.3) равносильно следующим неравенствам:

$$-3/4<x^2-2x<3/4,$$

которые составят систему неравенств второй степени для x:

$$\begin{cases} -3/4<x^2-2x, \\ x^2-2x<3/4. \end{cases}$$

Перепишем их в стандартной форме:

$$\begin{cases} x^2-2x+3/4>0, \\ x^2-2x-3/4<0. \end{cases}$$

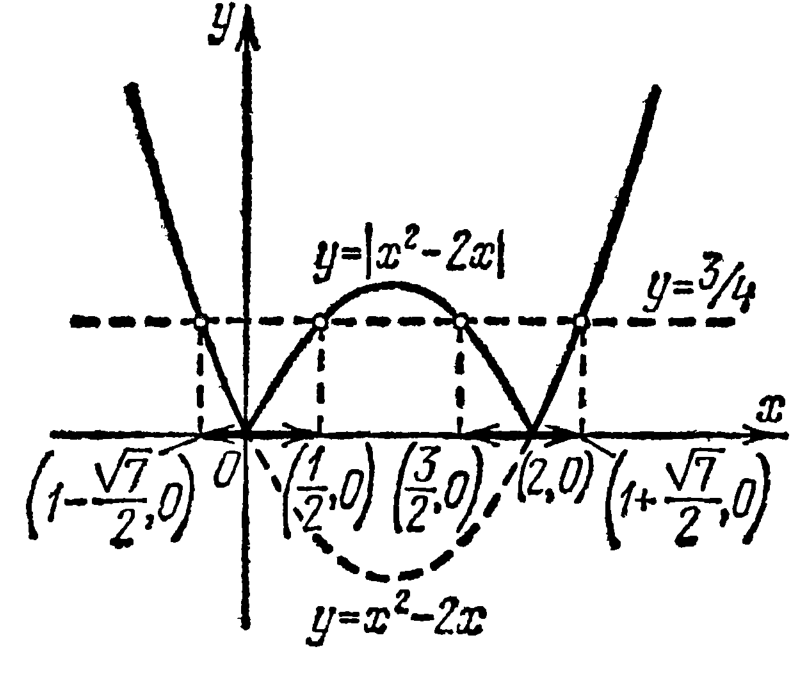


Рис. 66.

Первое неравенство (решение читатель проведет самостоятельно) имеет множество решений $(1-\sqrt{7}/2,\ 1+\sqrt{7}/2)$. Решения второго неравенства заполняют два бесконечных интервала: $(-\infty, 1/2)$ и $(3/2, +\infty)$. Методом штриховки нетрудно убедиться, что множество решений данного неравенства состоит из двух интервалов: $(1-\sqrt{7}/2, 1/2)$ и $(3/2, 1+\sqrt{7}/2)$. На рис. 66 показана графическая иллюстрация к данному неравенству.

80. Неравенства высших степеней. Неравенства, содержащие дробные рациональные функции от *x*. Рассмотрим теперь неравенства вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n>0 \qquad (80.1)$$

или вида

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m} \qquad (80.2)$$

(в левой части этих неравенств помещается, соответственно, целая или дробная рациональная функция от x (п. 50)). Такие

неравенства решают путем разложения входящих в них многочленов на множители, после чего оказывается достаточным установить знак левой части неравенства в каждом из интервалов, на которые числовая ось разбивается действительными корнями функции $P_n(x)$ (корнями числителя и знаменателя дробной функции $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$).

Пример 1. Решить неравенства: а) $x^3-6x^2+11x-6>0$; б) $x^4+9x^2-10\leqslant 0$; в) $x^6+25x^4>0$.

Решение. а) Для разложения кубического многочлена на множители найдем его корни. Легко заметить, что делитель 1 свободного члена является одним из корней многочлена (см. п. 62); другие корни равны 2 и 3, так что неравенство запишется в виде

$$(x-1)(x-2)(x-3)>0.$$

Теперь видно, что для $x<1$ все три множителя отрицательны, произведение отрицательно. При $1<x<2$ первый множитель положителен, два других отрицательны. Продолжая такие же рассуждения, найдем, что многочлен положителен в интервалах $(1,\ 2)$, $(3,\ \infty)$ и отрицателен в интервалах $(-\infty,\ 1)$, $(2,\ 3)$. Множество решений неравенства состоит из интервалов $(1,\ 2)$, $(3,\ \infty)$.

б) Для разложения левой части неравенства на множители находим ее корни; имеем биквадратное уравнение (п. 64)

$$x^4+9x^2-10=0.$$

Находим $x^2=1$ и $x^2=-10$. Запишем разложение левой части неравенства на множители:

$$(x^2-1)(x^2+10)\leqslant 0,$$

или

$$(x-1)(x+1)(x^2+10)\leqslant 0.$$

Так как $x^2+10>0$ при любых x, то неравенство заменяется равносильным:

$$(x-1)(x+1)\leqslant 0.$$

Множеством его решений служит сегмент $[-1,\ 1]$.

в) Неравенство удовлетворяется при всех значениях $x\neq 0$; множество его решений состоит из интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ \infty)$.

Сходным образом решаются и дробные неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{2x+3}{x-4}>3$.

Решение. Начнем с предостережения: не следует делать «очевидного» упрощения, состоящего в том, чтобы умножить неравенство на знаменатель $x-4$ дроби; знаменатель может быть как положительным, так и отрицательным, и в зависимости от его знака при умножении придется рассматривать два случая.

Вместо этого перенесем все члены неравенства в одну часть. Получаем

$$\frac{2x+3}{x-4}-3>0, \quad \text{или} \quad \frac{-x+15}{x-4}>0.$$

Удобно изменить знак в числителе, одновременно изменив и знак неравенства:

$$\frac{x-15}{x-4}<0.$$

В интервале $x<4$ левая часть положительна, в интервале $4<x<15$ — отрицательна, в интервале $x>15$ — вновь положительна. Область решений — интервал $(4, 15)$.

Пример 3. Найти все значения x, для которых

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x+3}\right|=\frac{x^2+x-2}{x+3}. \tag{80.3}$$

Решение. Из определения модуля (п. 6) следует, что равенство (80.3) равносильно неравенству

$$\frac{x^2+x-2}{x+3}\geqslant 0.$$

Запишем его в виде

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x+3}\geqslant 0.$$

Неотрицательные значения левая часть неравенства принимает в интервалах $(-3, -2]$ и $[1, +\infty)$. Точки $x=-2$ и $x=1$ входят в области решений. В них левая часть неравенства обращается в нуль, а это допускается знаком нестрогого неравенства.

Пример 4. При каких значениях a корни квадратного уравнения

$$x^2-\frac{8a}{a+1}x+a^2=0 \tag{80.4}$$

действительные положительные?

Решение. Корни трехчлена будут действительными при условии, что его дискриминант неотрицателен:

$$\frac{16a^2}{(a+1)^2}-a^2\geqslant 0.$$

Так как произведение корней по теореме Виета равно a^2, то при положительных корнях должно быть $a\neq 0$. В то же время из равенства $x_1+x_2=\frac{8a}{a+1}$ ясно, что корни будут положительными при выполнении условия

$$\frac{a}{a+1}>0$$

(так как $x_1x_2=a^2>0$, то знаки корней одинаковы и совпадают со знаком $\frac{a}{a+1}$).

Итак, решение примера 4 свелось к решению системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{16a^2}{(a+1)^2}-a^2\geqslant 0. \\ \frac{a}{a+1}>0. \end{cases}$$

Второе неравенство имеет множество решений, состоящее из интервалов $(-\infty, -1)$ и $(0, \infty)$. Первое неравенство перепишем в виде

$$\frac{a^2}{(a+1)^2}[16-(a+1)^2]\geqslant 0,$$

и так как у нас $a^2>0$, $(a+1)^2>0$ (точки $a=0$ и $a=-1$ не входят уже во множество решений второго неравенства системы), то останется решить неравенство

$$16-(a+1)^2\geqslant 0.$$

Множеством его решений служит замкнутый интервал $[-5, 3]$.

Точки, одновременно удовлетворяющие обоим неравенствам системы, заполняют интервалы $[-5, -1)$ и $(0, 3]$. Корни данного уравнения (80.4) действительны и положительны, если

$$-5\leqslant a<-1 \quad \text{или} \quad 0<a\leqslant 3.$$

81. Иррациональные, показательные и логарифмические неравенства. Неравенства, в левые и правые части которых входят алгебраические иррациональности, показательные или логарифмические выражения, содержащие неизвестную, называют, соответственно, *иррациональными*, *показательными* и *логарифмическими неравенствами*. Решение таких неравенств может требовать выполнения действий возведения в степень, потенцирования, логарифмирования. При проведении преобразований, связанных с этими действиями, необходимо учитывать соответствующие правила, относящиеся к неравенствам (п. 74). Приведем типичные примеры на решение неравенств названных типов.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+5}>7-x. \qquad (81.1)$$

Решение. Сначала отметим, что о.д.з. задается условием $x\geqslant -5$. Далее рассматриваем два возможных случая: 1) правая часть неравенства отрицательна, 2) правая часть неравенства неотрицательна. Если $7-x<0$, $x>7$, то неравенство заведомо удовлетворяется: его левая часть не меньше нуля, как арифметическое значение квадратного корня. Остается рассмотреть случай $x\leqslant 7$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны и

неравенство можно, не изменяя его смысла, возвести в квадрат. Получаем

$$x+5>49-14x+x^2.$$

Это приводит к квадратному неравенству

$$x^2-15x+44<0,$$

которое удовлетворяется при $4<x<11$. Но по предположению $x\leqslant 7$; поэтому имеем $4<x\leqslant 7$.

Итак, неравенство (81.1) удовлетворяется при $x>7$ и при $4<x\leqslant 7$, т. е., вообще, при $x>4$. Множество решений неравенства — луч $(4, \infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}\leqslant 5. \qquad (81.2)$$

Решение. В данном случае о.д.з. определяется условием $x\geqslant -1$. Так как при любых допустимых значениях x обе части неравенства положительны, то возводим неравенство в квадрат:

$$x+1+x+6+2\sqrt{(x+1)(x+6)}\leqslant 25,$$

или

$$\sqrt{x^2+7x+6}\leqslant 9-x. \qquad (81.3)$$

Так как слева имеем неотрицательное выражение, то должно выполняться условие $x\leqslant 9$; в этом случае можно еще раз возвести в квадрат обе части нового неравенства (81.3) и получить

$$x^2+7x+6\leqslant 81-18x+x^2,$$

откуда

$$25x\leqslant 75, \qquad x\leqslant 3.$$

Учитывая все найденные ограничения на x:

$$x\geqslant -1, \qquad x\leqslant 9, \qquad x\leqslant 3,$$

приходим к следующему решению: неравенство (81.2) удовлетворяется для x, лежащих в сегменте $[-1, 3]$.

Пример 3. Решить неравенство

$$(0{,}25)^x>2^{\frac{2x}{x+1}}.$$

Решение. Естественно отнести это неравенство к показательным неравенствам. После небольших преобразований запишем неравенство в форме

$$4^{-x}>4^{\frac{x}{x+1}}. \qquad (81.4)$$

Теперь основания равны $4>1$ и неравенство между степенями влечет за собой неравенство того же смысла между показателями степени:

$$\frac{x}{x+1}<-x, \qquad \frac{x}{x+1}+x<0.$$

Решаем полученное алгебраическое неравенство обычным способом (метод интервалов):

$$\frac{x(x+2)}{x+1}<0.$$

Имеем интервалы

$$(-\infty,\ -2);\ (-2,\ -1);\ (-1,\ 0);\ (0,\ \infty).$$

Неравенству (81.4) удовлетворяют точки интервалов $(-\infty, -2)$ и $(-1, 0)$.

Пример 4. Решить логарифмические неравенства: а) $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$; б) $\log_{0,5}(x^2+1)>-1$.

Решение. а) Приведем логарифмы, входящие в данное неравенство, к общему основанию, например к основанию 4. Имеем

$$\log_2(x+1)=\log_4(x+1)^2.$$

Теперь можно данное неравенство переписать так:

$$\log_4(x+7)>\log_4(x+1)^2.$$

Основание больше единицы. По этой причине логарифмируемые выражения должны быть связаны неравенством того же смысла, что сами логарифмы. Таким образом,

$$x+7>(x+1)^2, \quad \text{или} \quad x^2+x-6<0.$$

Решим это квадратное неравенство и учтем условие $x>-1$, определяющее о.д.з. Получим $-1<x<2$.

Множество решений данного неравенства представляет собой интервал $(-1, 2)$.

б) Заметим, что $-1=\log_{0,5}2$, после чего перепишем данное неравенство так: $\log_{0,5}(x^2+1)>\log_{0,5}2$.

Отсюда $x^2+1<2$. Это неравенство и данное — разного смысла, поскольку основание 0,5 логарифмов меньше единицы. Решив последнее неравенство, находим, что его решения заполняют конечный интервал $(-1, 1)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_{1+x}(2-x)<1. \tag{81.5}$$

Решение. В данном примере неизвестная входит как в основание, так и под знак логарифма; заранее неизвестно, будет ли основание логарифма $1+x$ больше или меньше единицы, при решении придется учитывать обе эти возможности. Начнем решение примера с указания о.д.з. Ясно, что должно быть $-1<x<2$ и, кроме того, $x\neq0$ (так как основание логарифма не может быть равно 1). Таким образом о.д.з. состоит из интервалов $(-1, 0)$ и $(0, 2)$. Теперь перепишем неравенство в виде

$$\log_{1+x}(2-x)<\log_{1+x}(1+x)$$

и рассмотрим два случая.

1) $-1 < x < 0$. В этом случае основание логарифмов меньше единицы, и, потенцируя, мы изменим смысл неравенства на противоположный:

$$2-x > 1+x; \qquad x < {}^1/_2.$$

Учитывая все ограничения на x, получаем $-1 < x < 0$.

2) $0 < x < 2$. Теперь основание логарифмов больше единицы, при потенцировании смысл неравенства сохраняется:

$$2-x < 1+x; \qquad x > {}^1/_2,$$

и с учетом о.д.з. имеем ${}^1/_2 < x < 2$.

Итак, множество решений неравенства (81.5) состоит из интервалов $(-1, 0)$ и $({}^1/_2, 2)$.

82. Неравенства с двумя неизвестными. Неравенство с двумя неизвестными

$$F(x, y) > 0 \tag{82.1}$$

имеет своими решениями пары чисел (x, y), которые изображаются точками плоскости. Найти множество всех решений данного неравенства (или, в других случаях, системы неравенств) — это значит указать на плоскости множество точек, в которых это неравенство (система неравенств) удовлетворяется. Такая необходимость возникает, например, при отыскании о.д.з. алгебраического выражения, зависящего от двух буквенных величин.

Пример 1. Указать на плоскссти множество решений неравенства: а) $x(x-y) > 0$; б) $|x|+|y| \leqslant 1$.

Решение. а) Неравенство удовлетворяется в двух случаях: 1) при $x > 0$, $x > y$; 2) при $x < 0$, $x < y$.

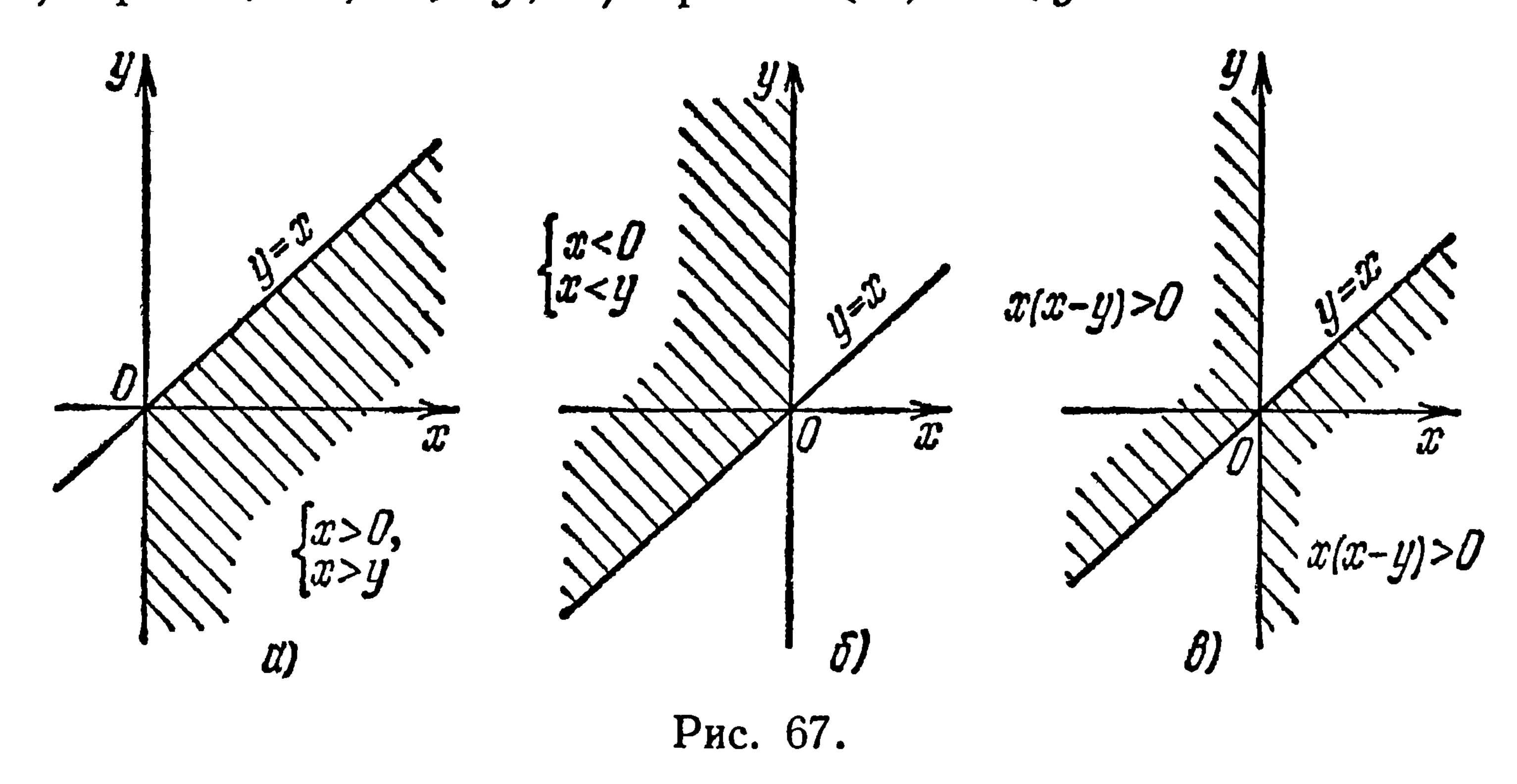


Рис. 67.

В случае 1) получается часть правой полуплоскости $x > 0$, лежащая ниже прямой $y = x$ (рис. 67, *а*). Случаю 2) отвечает часть левой полуплоскости, лежащая выше прямой $y = x$ (рис. 67, *б*). Все множество решений неравенства показано на рис. 67, *в*.

Линии $x=0$ и $y=x$, ограничивающие заштрихованную область, в нее не входят (так как решалось строгое неравенство).

б) Пусть сначала $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда получается система неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x+y \leqslant 1. \end{cases}$$

Так как $x+y=1$ — уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки, равные единице, то неравенствам будут

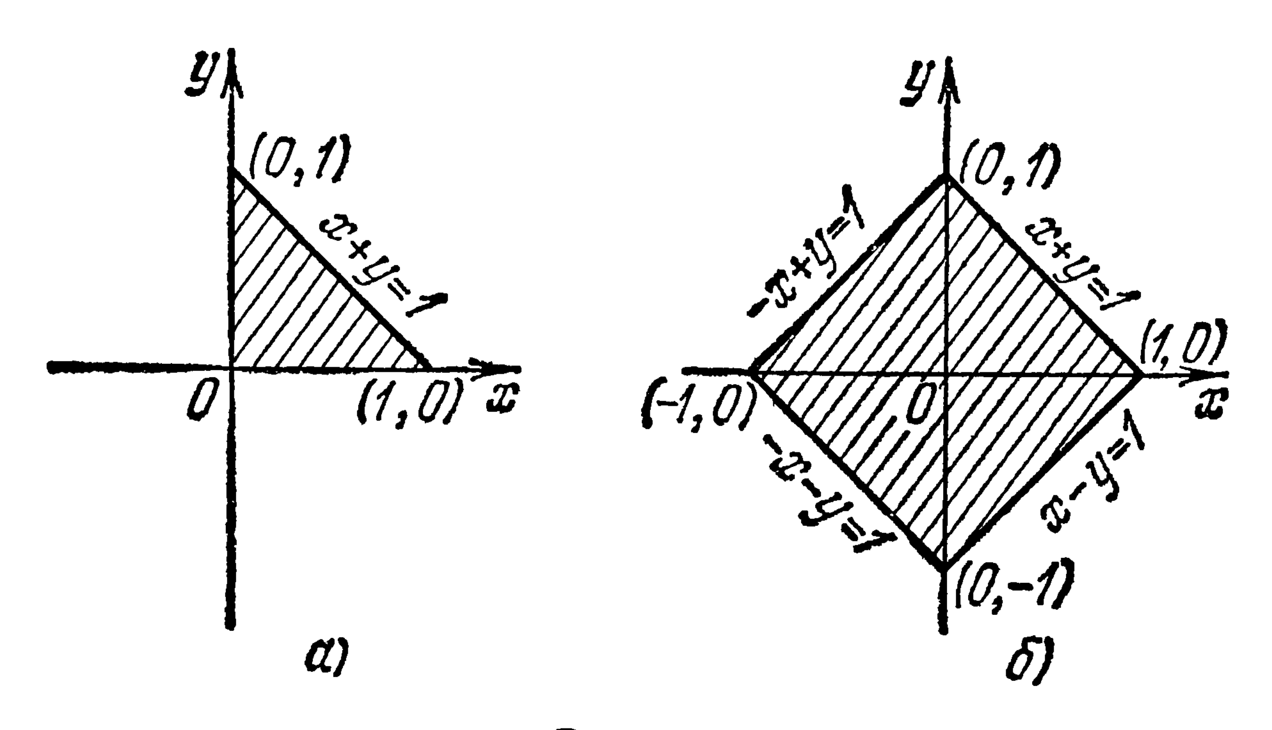


Рис. 68.

удовлетворять точки треугольника, ограниченного отрезками осей координат и прямой $x+y=1$ (в первой четверти; рис. 68, *а*). Части области, расположенные в других четвертях, будут симметричны указанному треугольнику (рис. 68, *б*). В этом легко убедиться, если заметить, что вместе с точкой (x, y) неравенству будут удовлетворять и симметрично расположенные точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Линии, ограничивающие область, в данном случае ей принадлежат (вследствие того, что неравенство нестрогое).

Пример 2. На плоскости Oxy показать области, в которых функция

$$z=(y-x^2)(x-y^2)$$

положительна или отрицательна.

Решение. На плоскости Oxy изобразим параболы $y=x^2$ и $x=y^2$, отделяющие друг от друга области $y>x^2$ и $y<x^2$ (рис. 69, *а*), а также области $x>y^2$ и $x<y^2$ (рис. 69, *б*). Области, где указанные выражения положительны, заштрихованы (разной штриховкой на рис. 69, *а* и 69, *б*). Оба чертежа совмещены на рис. 69, *в* и теперь видно, что области, покрытые двойной

штриховкой и совсем незаштрихованные, являются областями положительности функции, а однократно заштрихованные

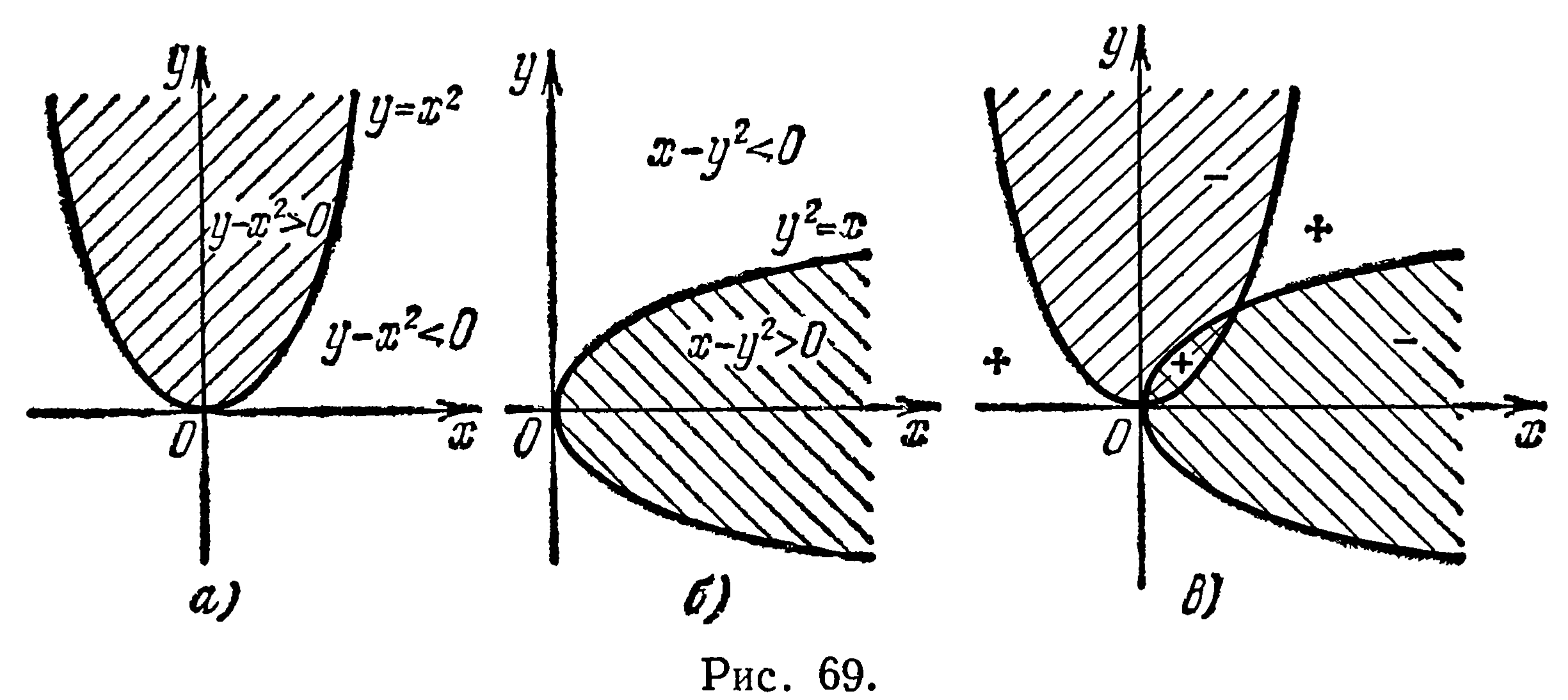


Рис. 69.

области — областями ее отрицательности. Всего получается пять областей, в двух из которых функция отрицательна и в трех положительна.

Упражнения

1. Решить неравенства:
а) $2x - {}^1/_2 > 5x + {}^7/_2$; б) $x(x-1)+2 < (x+2)(x-3)+4$.

2. Решить системы неравенств:
а) $\begin{cases} 4x-1 > 3x+5, \\ x+2 > -5x+14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2 < 2x-1, \\ 2-x \geqslant 1+x. \end{cases}$

3. Решить неравенства;
а) $3x^2+5x+2 < 0$; б) $x(x+1)+6 \leqslant 12-2x(x-2)$; в) $x^4-4x^2+5 < 0$;
г) $x^3+6x^2+11x+6 < 0$; д) $x^3-2x^2+4x-8 \leqslant 0$.

4. Решить неравенства:
а) $\dfrac{x+7}{3-9x} < 0$; б) $\dfrac{4x-1}{x-2} > -5$; в) $\dfrac{x-2}{x^2-9} < 0$; г) $\dfrac{x^2-x}{x^2+9x+8} \geqslant 0$.

5. Решить неравенства:
а) $\sqrt{x+5} \geqslant 7-x$; б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6} < 5$.

6. Решить неравенства:
а) $3^{x^2+3} < 81^x$; б) $2^{|x|-1} \leqslant |2^x-1|$.

7. Решить неравенства:
а) $\log_{0,3}(x-1) < \log_{0,09}(x-1)$; б) $\log_x(x+6) > 2$.

8. Показать на координатной плоскости множества решений неравенств:
а) $x^2-3xy+2y^2 < 0$; б) $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$;
в) $\begin{cases} (x-y^2)(x-4y^2) > 0, \\ y \geqslant x^2. \end{cases}$

Глава VII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Предел последовательности

83. Числовая последовательность. Рассмотрим некоторую занумерованную совокупность, состоящую из m чисел:

$$u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_m, \tag{83.1}$$

расположенных в порядке их нумерации. Будем говорить, что они образуют конечную последовательность, состоящую из m членов (или последовательность длины m). При этом членами последовательности называются числа u_1, u_2, ..., u_m, из которых составлена эта последовательность.

Так же можно рассмотреть и бесконечную последовательность чисел

$$u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_m, \ \ldots \tag{83.2}$$

В этой записи многоточие в конце строки указывает на то, что за последним из выписанных членов следует еще бесконечное множество дальнейших членов последовательности.

Таким образом, *конечной* или *бесконечной последовательностью* называется, соответственно, конечное или бесконечное занумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров.

Член последовательности u_n с номером, пробегающим в случае конечной последовательности значения $n=1, 2, \ldots, m$, а в случае бесконечной — весь натуральный ряд чисел $n=1, 2, \ldots$, называется *общим членом последовательности*. Если u_n — общий член последовательности, то конечная последовательность длины m записывается также в виде

$$\{u_n\}, \quad n=1, \ 2, \ \ldots, \ m, \tag{83.3}$$

а бесконечная — в виде

$$\{u_n\}, \quad n=1, \ 2, \ \ldots \tag{83.4}$$

Последовательность (83.1) или (83.2) считается заданной, если известно правило, по которому можно определить любой

ее член u_n (для конечной последовательности также задается и число членов).

Поскольку общий член последовательности определяется своим номером, то можно рассматривать его как функцию этого номера; говорят, что он является *функцией натурального аргумента*: $u_n = f(n)$. Часто эта функция задается формулой, определяющей общий член u_n через его номер n, например: $u_n = n^2$, $u_n = 1/n^2$, или $u_n = (-1)^n n$. Тогда последовательность записывается в виде

$$\{n^2\} \quad \text{или} \quad 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots; \tag{83.5}$$

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\} \quad \text{или} \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots; \tag{83.6}$$

$$\{(-1)^n n\} \quad \text{или} \; -1, 2, -3, \ldots, (-1)^n n, \ldots \tag{83.7}$$

соответственно.

Последовательность может также задаваться правилом, по которому находят каждый ее член, если известны предыдущие. Пример: указано, что первые два члена последовательности равны единице, а каждый следующий равен сумме двух непосредственно предшествующих ему. Находим: по условию $u_1 = 1$, $u_2 = 1$. Теперь $u_3 = 1 + 1 = 2$, $u_4 = 1 + 2 = 3$, $u_5 = 2 + 3 = 5$ и т. д. Получаем последовательность чисел

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

(называемых *числами Фибоначчи*).

Еще один пример задания последовательности, при котором не удается записать формулы, выражающей ее общий член: последовательность десятичных знаков(цифр) в записи числа π:

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, \ldots$$

Последовательность называется *монотонно возрастающей* (*неубывающей*), если каждый ее член, начиная со второго, больше (не меньше) предыдущего. Аналогично определяется *монотонно убывающая* (*невозрастающая*) последовательность. Такие последовательности называются просто *монотонными* (если не существенно, убывает или возрастает член последовательности). Ясно, что понятие монотонной последовательности есть то же понятие монотонной функции для случая аргумента, принимающего натуральные значения. Из трех последовательностей (83.5)—(83.7) первая является монотонно возрастающей, вторая — монотонно убывающей, а третья — немонотонной. Проверить эти утверждения можно, рассматривая знак разности $u_n - u_{n-1}$ между последующим и предыдущим членами последовательности.

Если можно указать такое число M, что все члены бесконечной последовательности $\{u_n\}$ оказываются не больше M, т. е. если для всех n выполнится неравенство

$$u_n \leqslant M,$$

то последовательность $\{u_n\}$ называется *ограниченной сверху* числом M. Если можно указать такое число m, что для всех n

выполнится неравенство

$$m \leqslant u_n,$$

то последовательность $\{u_n\}$ называется *ограниченной снизу* числом m. Последовательность $\{u_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и снизу и сверху, т. е. если существуют такие числа m и M, что для всех n выполняется неравенство

$$m \leqslant u_n \leqslant M.$$

Так, например, последовательность (83.5) ограничена снизу числом $m=1$, но не ограничена сверху. Последовательность (83.6) ограничена: сверху числом $M=1$, снизу — числом $m=0$. Последовательность

$$1,\ -4,\ 9,\ -16,\ \ldots,\ (-1)^{n+1}n^2,\ \ldots$$

не ограничена ни снизу, ни сверху. Последовательность

$$1+\sin\alpha,\ 1+\sin 2\alpha,\ \ldots,\ 1+\sin n\alpha,\ \ldots$$

ограничена снизу и сверху. За ее границы можно принять, например, числа $m=0$ и $M=2$.

Ясно, что всякая конечная последовательность ограничена. Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу c, называется *постоянной* последовательностью; в этом случае $u_n=c$. Любая постоянная последовательность ограничена.

Можно определить арифметические действия над двумя или несколькими последовательностями. Так, например, под суммой двух последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ понимают третью последовательность $\{w_n\}$, общий член которой определен равенством

$$w_n = u_n + v_n,$$

т. е. представляет собой сумму общих членов последовательностей-слагаемых. Аналогичным образом определяются и другие арифметические действия над последовательностями.

84. Предел числовой последовательности.

Пример 1. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots \tag{84.1}$$

Ее общий член

$$u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

отличается от единицы на $1/(n+1)$; по мере увеличения номера n разность между единицей и общим членом последовательности, равная $1/(n+1)$, будет все более приближаться к нулю. При $n > 99$ эта разность будет меньше 0,01, при $n > 999$ — меньше 0,001 и т. д.

Пример 2. Последовательность

$$\frac{5}{1}, \frac{7}{2}, \frac{9}{3}, \ldots, \frac{2n+3}{n}, \ldots \tag{84.2}$$

обладает тем свойством, что ее члены по мере возрастания n приближаются к числу 2. Действительно, если мы составим разность между общим членом последовательности и числом 2:

$$u_n - 2 = \frac{2n+3}{n} - 2 = \frac{3}{n},$$

то увидим, что с увеличением n она будет приближаться к нулю; так, она будет меньше 0,01 при $n > 300$, меньше 0,001 при $n > 3000$ и т. д.

Приближение членов последовательности (84.1) к 1 идет в процессе монотонного возрастания этих членов. Напротив, в примере 2 последовательность (84.2) убывает, ее члены, приближаясь к 2, остаются все же больше 2.

Пример 3. У последовательности

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots \tag{84.3}$$

члены попеременно отрицательные и положительные, они все более приближаются к нулю при возрастании n, но их величины поочередно то больше, то меньше нуля.

Пример 4. Члены последовательности

$$\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\right\}, \tag{84.4}$$

которая в подробной записи имеет вид

$$1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, \ldots,$$

попеременно больше нуля, равны нулю, меньше нуля. При этом также происходит неограниченное сближение члена последовательности $\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\right\}$ с нулем по мере возрастания n.

Общим для всех рассмотренных примеров является неограниченное приближение величины члена последовательности к некоторому постоянному числу (1, 2, 0 и 0 соответственно). В таких случаях говорят, что это постоянное число является пределом данной последовательности при n, стремящемся к бесконечности ($n \to \infty$).

Приведенные примеры 1—4 подводят нас к понятию предела; необходимо дать ему четкое определение.

Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{u_n\}$ *при* n, *стремящемся к бесконечности*, если для любого положительного числа ε существует такое число N, что для

всех n, удовлетворяющих неравенству $n > N$, выполняется неравенство

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Если a является пределом последовательности $\{u_n\}$, то пишут:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a,$$

где lim (читается как «предел») — первые буквы латинского слова «limes» (предел).

В примерах 1—4 соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = 2; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = 0.$$

Приведем некоторые пояснения к сформулированному определению предела последовательности.

1. Разность между членом последовательности и ее пределом $|u_n - a|$ рассматривается по модулю, так как несущественно, приближается ли u_n к a, оставаясь меньше a (как говорят «снизу»), больше a («сверху») или становясь попеременно то больше, то меньше, чем a, и даже принимая значения, равные a. В разобранных примерах мы видели эти случаи: $n/(n+1)$ стремится к 1 снизу, $(2n+3)/n$ стремится к 2 сверху, $(-1)^{n+1}/n$ колеблется, становясь то меньше, то больше своего предела, равного нулю. Наконец, члены последовательности $\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\right\}$ имеют значения то большие, то меньшие, то равные своему пределу. Во всех случаях важно лишь, чтобы разность между u_n и a становилась меньше любого положительного числа ε по абсолютной величине. В частности, *предел постоянной последовательности равен ее членам.*

2. В формулировке понятия предела, говоря о числе $\varepsilon > 0$, иногда пишут: «сколь угодно малое $\varepsilon > 0$». В этом нет необходимости, так как *любое число* означает: в том числе и *сколь угодно малое.*

3. Возвращаясь к примеру 1, заметим, что, например, при $\varepsilon = 0{,}01$ неравенство

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

выполняется, как уже отмечалось, при $n > 99$, а при $\varepsilon = 0{,}001$ — лишь при условии $n > 999$. Таким образом, когда мы задаем разные значения ε:

$$\varepsilon = 0{,}01, \quad \varepsilon = 0{,}001, \quad \ldots,$$

то им соответствуют, вообще говоря, разные N ($N = 99$, $N = 999$ и т. д.). Таким образом, N в определении предела, как число, находимое при заданном ε, может зависеть от ε. Поэтому обычно пишут $N = N(\varepsilon)$.

4. Пусть последовательность $\{u_n\}$ сходится к пределу a: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Будем изображать члены последовательности точками числовой оси; пусть на числовой оси также отмечена точка с абсциссой a (рис. 70). Если задано некоторое $\varepsilon > 0$, то неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ (выполняющееся при $n > N$, т. е. для всех членов последовательности, начиная с некоторого) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < u_n - a < \varepsilon \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$$

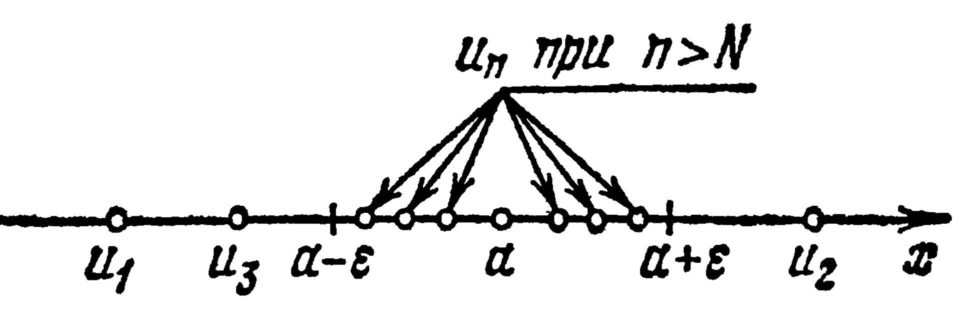


Рис. 70.

и означает, что точки u_n (при $n > N$) отстоят от точки a меньше чем на ε. Иными словами, они лежат в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, который называется *$\varepsilon$-окрестностью* точки a (п. 30). Эти соображения позволяют дать равносильную формулировку понятия предела с помощью термина «окрестность»: число a называется ***пределом последовательности*** $\{u_n\}$, если, какова бы ни была заданная окрестность точки a, все члены последовательности, начиная с некоторого, лежат в этой окрестности. «Начиная с некоторого» здесь то же самое, что «при $n > N$».

Далеко не всякая последовательность имеет предел. Так, последовательности

$$1, \quad 4, \ 9, \ \ldots, \ n^2, \ \ldots,$$
$$1, \ -1, \ 1, \ -1, \ \ldots, \ (-1)^{n+1}, \ \ldots$$

не имеют предела.

Первая из этих последовательностей неограниченная; можно доказать, что неограниченная последовательность не имеет предела: ее члены не могут все, начиная с некоторого, помещаться в окрестности одной точки. Вторая последовательность ограниченная, но тоже не имеет предела. Все ее члены имеют либо значение $+1$, либо значение -1, причем тех и других бесконечно много. Они также не могут помещаться в окрестности, длина которой $2\varepsilon < 2$.

Если последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, то ее называют *сходящейся*. Говорят, что *последовательность сходится к a*. Если последовательность не имеет предела, то ее называют *расходящейся*. В частности, все неограниченные последовательности суть расходящиеся.

Если последовательность сходящаяся, т. е. имеет предел a, то этот предел единственный: последовательность не может сходиться к двум различным пределам a и a'. Поясним этот факт, обращаясь к рис. 71. Если бы и a и a' были пределами после-

довательности $\{u_n\}$, то все ее члены, начиная с некоторого, попадали бы в обе окрестности, показанные на рис. 71. Если мы взяли окрестности точек a и a' достаточно малыми, так что они не перекрываются, то члены последовательности не могут одновременно помещаться в обеих окрестностях, т. е. точки a и a' не могут обе быть пределами последовательности $\{u_n\}$.

Итак, последовательность может иметь или не иметь предела; если она имеет предел, то вполне определенный, единственный. Встают вопросы: как узнать, имеет ли данная последовательность предел, и, если имеет, как его найти? На эти вопросы мы дадим лишь частичный ответ.

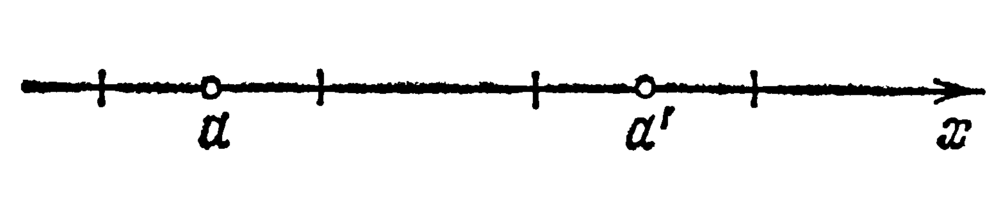


Рис. 71.

Достаточное условие существования предела (теорема Вейерштрасса). *Если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то она сходится. Если последовательность монотонно убывает и ограничена снизу, то она сходится.*

Доказательства этого признака существования предела мы не даем. Заметим, что пример 1 ($u_n = n/(n+1)$) как раз дает образец последовательности, монотонно возрастающей и ограниченной сверху (все ее члены меньше единицы). Она имеет предел. Последовательность $u_n = (2n+3)/n$ монотонно убывает и ограничена снизу (все ее члены больше нуля). Она также имеет предел. Заметим, что существование предела обеспечивается сочетанием свойств монотонности и ограниченности.

Рассмотрим последовательность

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots;$$

эта последовательность не ограничена сверху. Более того, она обладает особым свойством: каково бы ни было данное число $M > 0$, можно указать такое число N, что при $n > N$ будет иметь место неравенство

$$u_n > M.$$

Действительно, достаточно лишь взять $N = \sqrt{M}$, как будем иметь при $n > N$

$$u_n = n^2 > M.$$

В связи с этим дадим определение положительной бесконечно большой последовательности: последовательность $\{u_n\}$ называется *положительной бесконечно большой при* $n \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ можно указать такое число N, что при всех n, удовлетворяющих неравенству $n > N$, будет выполняться неравенство

$$u_n > M.$$

Иначе это можно сформулировать так: последовательность $\{u_n\}$ называется *положительной бесконечно большой*, если, каково бы ни было данное число M, все члены последовательности, начиная с некоторого, превосходят M.

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, но здесь знак lim употребляется условно, так как символ бесконечности (∞) не является числом, бесконечно большая последовательность должна рассматриваться как расходящаяся.

Так можно определить и отрицательные бесконечно большие последовательности. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

85. Бесконечно малые. Правила предельного перехода. Если последовательность $\{u_n\}$ сходится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

то она называется *бесконечно малой последовательностью*. Говорят также, что ее общий член u_n является при $n \to \infty$ бесконечно малой величиной. Бесконечно малыми являются последовательности (84.3) и (84.4).

Если мы применим формулировку понятия предела к случаю бесконечно малой последовательности, т. е. к случаю, когда предел равен нулю, то придем к такому определению бесконечно малой последовательности (равносильному данному выше): последовательность $\{u_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ будет иметь место неравенство $|u_n| < \varepsilon$.

Сформулируем некоторые полезные теоремы о бесконечно малых последовательностях (и для примера докажем первую из них).

Теорема 1. *Сумма двух или нескольких бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство проведем для случая суммирования двух последовательностей. Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые. Если $\{\alpha_n+\beta_n\}$ — последовательность, полученная их сложением, то она также будет бесконечно малой. Действительно, пусть задано произвольное положительное число ε. В силу того, что $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, найдется число N' такое, что $|\alpha_n|$ будет меньше числа $\varepsilon/2$ при $n > N'$. Аналогично и для второй последовательности $\{\beta_n\}$ можно указать (вообще говоря, другое) число N'' такое, что при $n > N''$ будем иметь $|\beta_n| < \varepsilon/2$. Теперь, если n больше большего из чисел N', N'', то одновременно

$$|\alpha_n| < \varepsilon/2, \qquad |\beta_n| < \varepsilon/2.$$

Но тогда, по свойству «модуль суммы не превосходит суммы модулей» (п.74, свойство 13), найдем

$$|\alpha_n+\beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{при} \quad n > \max(N', N''),$$

что и докажет требуемое утверждение: последовательность $\{\alpha_n+\beta_n\}$ бесконечно малая ($\max(N', N'')$ читается как «большее из двух чисел N' и N''»).

Теорема 2. *Произведение ограниченной последовательности на последовательность, сходящуюся к нулю, есть последовательность, сходящаяся к нулю.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что произведение постоянной величины на бесконечно малую, так же как произведение нескольких бесконечно малых друг на друга, является бесконечно малой величиной. Действительно, постоянная величина всегда есть величина ограниченная. То же относится и к бесконечно малой. Поэтому, например, произведение двух бесконечно малых можно истолковать как произведение бесконечно малой на ограниченную.

Теорема 3. *Частное от деления последовательности, сходящейся к нулю, на последовательность, имеющую предел, отличный от нуля, есть последовательность, сходящаяся к нулю.*

Следующая теорема позволяет использовать бесконечно малые при доказательствах теорем о пределах (теоремы 6—8).

Теорема 4. *Общий член последовательности, имеющей предел, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины.*

Доказательство. Пусть дана последовательность $\{u_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a.$$

Из определения предела следует:

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

для всех n, удовлетворяющих неравенству $n > N(\varepsilon)$. Обозначим $u_n - a = \alpha_n$ и тогда получим, что для указанных значений n будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

т. е. что α_n есть бесконечно малая величина. Но

$$u_n = a + \alpha_n,$$

а это и доказывает нашу теорему.

Верна и обратная

Теорема 5. *Если общий член последовательности отличается от какой-либо постоянной величины на бесконечно малую величину, то эта постоянная является пределом данной последовательности.*

Рекомендуем читателю доказать эту теорему самостоятельно.

Теперь мы рассмотрим *правила предельного перехода*, сформулированные в следующих трех теоремах.

Теорема 6. *Предел суммы двух или нескольких последовательностей, имеющих предел, равен сумме этих пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Доказательство. Пусть даны последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = b.$$

Тогда на основании теоремы 4 мы можем записать:

$$u_n = a + \alpha_n, \qquad v_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n — некоторые бесконечно малые последовательности. Сложим два последних равенства:

$$u_n + v_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Величина $(a+b)$, как сумма двух постоянных a и b, постоянна, а $(\alpha_n + \beta_n)$, как сумма двух бесконечно малых последовательностей, по теореме 1 есть бесконечно малая последовательность. Отсюда и из теоремы 5 заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n,$$

а это и нужно было доказать.

Доказательство, которое мы сейчас провели, можно без труда обобщить на случай алгебраической суммы любого числа заданных последовательностей.

Теорема 7. *Предел произведения двух или нескольких последовательностей, имеющих предел, равен произведению пределов этих последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$. Тогда имеем

$$u_n = a + \alpha_n, \qquad v_n = b + \beta_n,$$

где α_n, β_n — бесконечно малые последовательности. Находим $u_n v_n = (a + \alpha_n) \times \times (b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$, где скобками объединена сумма трех бесконечно малых последовательностей, которая и сама является бесконечно малой последовательностью. Произведение $u_n v_n$ отличается от ab на бесконечно малую последовательность, и потому

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = ab,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство в случае большего числа сомножителей проводится аналогично.

Из теоремы 7 вытекает

Следствие. *Постоянный множитель выносится за знак предела:*

$$\lim_{n\to\infty} c u_n = c \lim_{n\to\infty} u_n \qquad (c = \text{const})$$

(можно рассматривать постоянный множитель как член постоянной последовательности и применить теорему 7 и положение о том, что предел постоянной последовательности равен ее членам).

Теорема 8. *Предел частного двух последовательностей, имеющих предел, равен частному от деления этих пределов при условии, что предел делителя отличен от нуля.*

Записать утверждение этой теоремы можно так: *если*

$$\lim_{n \to \infty} v_n \neq 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} u_n}{\lim\limits_{n \to \infty} v_n}.$$

§ 2. Арифметическая прогрессия

86. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена. *Арифметической прогрессией* называется такая последовательность, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же (определенным для данной последовательности) числом d, называемым *разностью прогрессии.*

Натуральный ряд чисел дает пример бесконечной арифметической прогрессии с разностью $d = 1$, а последовательность нечетных и четных чисел — примеры бесконечных арифметических прогрессий, у каждой из которых разность $d = 2$.

Арифметическая прогрессия при $d \neq 0$ есть монотонная последовательность: если $d > 0$, то прогрессия возрастает, если $d < 0$, то прогрессия убывает; при $d = 0$ она постоянна. Бесконечные арифметические прогрессии, у которых $d \neq 0$, как последовательности неограниченные, предела не имеют. Они дают пример расходящихся последовательностей.

Пусть последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$$

представляет собой арифметическую прогрессию с разностью d. Выведем формулу, выражающую общий член a_n прогрессии через ее первый член a_1, разность d и номер n. С этой целью заметим, что по определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d$$

и также

$$a_3 = a_2 + d.$$

Подставим в правую часть последнего равенства вместо a_2 его выражение через a_1 и d, взятое из предыдущего равенства, получим

$$a_3 = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d.$$

Точно так же с помощью равенства

$$a_4 = a_3 + d,$$

непосредственно следующего из определения прогрессии, получим

$$a_4 = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Видна закономерность, по которой общий член прогрессии выражается через a_1, d и n:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d. \qquad (86.1)$$

Доказательство формулы общего члена (86.1) проведем методом индукции. Мы уже видели, что формула (86.1) верна для $n = 2$, 3, 4 (впрочем, достаточно проверить ее справедливость хотя бы для $n = 1$). Предположим, что она верна для некоторого n, и докажем, что в этом случае она верна и для следующего номера $n + 1$. Запишем выражение a_{n+1}, вытекающее из определения арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Подставим сюда выражение (86.1) для a_n (для a_n формула (86.1) считается верной):

$$a_{n+1} = a_1 + (n - 1)\,d + d = a_1 + nd,$$

или

$$a_{n+1} = a_1 + [(n + 1) - 1]\,d,$$

но это и есть формула (86.1), записанная уже для номера $(n + 1)$, которую и требовалось доказать.

Пример 1. Найти члены a_8, a_{51}, a_{1000} арифметической прогрессии, у которой $a_1 = -2$ и $d = 5$.

Решение. По формуле (86.1) находим

$$a_8 = a_1 + 7d \quad = -2 + 7 \cdot 5 = 33,$$
$$a_{51} = a_1 + 50d \quad = -2 + 50 \cdot 5 = 248,$$
$$a_{1000} = a_1 + 999d = -2 + 999 \cdot 5 = 4993.$$

Пример 2. Найти член a_{16} арифметической прогрессии, если у нее $a_8 = 40$, а $a_{20} = -20$.

Решение. С помощью формулы (86.1) запишем:

$$\begin{cases} a_8 = a_1 + 7d = 40. \\ a_{20} = a_1 + 19d = -20. \end{cases}$$

Из полученной линейной системы (п.66) найдем $a_1 = 75$ и $d = -5$. Отсюда

$$a_{16} = 75 + 15 \cdot (-5) = 0.$$

87. Свойства арифметической прогрессии. Рассмотрим некоторые свойства арифметической прогрессии.

1. *Каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому его соседних членов* (исключение представляет первый член, а у конечной прогрессии также последний член, так как они имеют только по одному соседнему члену).

Доказательство. Для члена a_k члены a_{k-1} и a_{k+1} будут соседними. По определению прогрессии мы можем написать

$$a_k = a_{k-1} + d, \qquad a_{k+1} = a_k + d,$$

откуда

$$a_k = a_{k-1} + d, \qquad a_k = a_{k+1} - d.$$

Взяв полусумму полученных равенств, найдем

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},$$

а это и надо было доказать.

2. *У конечной арифметической прогрессии*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов.

Доказательство. Выпишем несколько пар членов, равноотстоящих от концов прогрессии:

$$\begin{gathered} a_1,\ a_n, \\ a_2,\ a_{n-1}, \\ a_3,\ a_{n-2}, \\ \ldots \end{gathered}$$

Замечаем, что у каждой такой пары членов сумма их номеров на единицу больше числа членов прогрессии. Таким образом, если на k-м месте от начала прогрессии находится член a_k, то на k-м месте от ее конца находится член a_{n-k+1}. Найдем сумму этих членов, воспользовавшись формулой (86.1):

$$a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)d] + [a_1 + (n-k)d] = a_1 + [a_1 + (n-1)d].$$

Но $a_1 + (n-1)d = a_n$, и поэтому

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n,$$

что и требовалось доказать.

88. Формула для суммы n членов арифметической прогрессии. Выведем теперь формулу для суммы членов конечной арифметической прогрессии. Для прогрессии, имеющей n членов, обозначим эту сумму через S_n. Запишем выражение суммы S_n дважды, один раз расположив члены прогрессии по возрастанию их номеров, а другой раз — по убыванию:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Сложим эти два равенства:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \\ + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Всего в правой части имеется n скобок. По свойству 2 (п. 87) суммы, заключенные в этих скобках, все равны между собой и равны сумме, заключенной в первой скобке. Поэтому

$$2S_n = (a_1 + a_n)\,n,$$

откуда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n. \tag{88.1}$$

Если теперь мы вместо a_n подставим в формулу (88.1) его выражение через a_1 и d по формуле (86.1), то после простых преобразований получим следующую вторую формулу для суммы членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n. \tag{88.2}$$

Пример. Определить сумму k первых нечетных чисел, начиная с единицы.

Решение. На k-м месте в последовательности нечетных чисел находится число $a_k = 2k - 1$. Последовательность нечетных чисел есть арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$. По формуле (88.1) находим

$$S_k = \frac{1 + (2k-1)}{2}\,k,$$

откуда

$$S_k = k^2.$$

Так, например,

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Упражнения

1. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найти сумму шести членов прогрессии.

2. Дана некоторая последовательность, у которой при любом m сумма первых m членов выражается формулой $S_m = m^2 - 5m$. Показать, что эта последовательность есть арифметическая прогрессия, и найти ее пятый член.

3. Для того чтобы три числа $\frac{1}{q+r}$, $\frac{1}{r+p}$, $\frac{1}{p+q}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа p^2, q^2 и r^2 также составляли арифметическую прогрессию. Доказать.

4. Доказать, что каждый член арифметической прогрессии представляет собой среднее арифметическое членов, равноудаленных от него.

§ 3. Геометрическая прогрессия

89. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена. *Геометрической прогрессией* называется такая последовательность, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же (определенное для данной последовательности) число q, называемое *знаменателем прогрессии*. Предполагается, что $q \neq 0$.

Если число членов прогрессии конечно, то она называется *конечной геометрической прогрессией*; в противном случае она называется *бесконечной геометрической прогрессией*.

Приведем примеры бесконечных геометрических прогрессий:

а) $a_1 = 3$, $q = 4$:

$$3, \quad 12, \quad 48, \quad 192, \ \ldots$$

Эта прогрессия знакоположительная, монотонно возрастающая;

б) $a_1 = 48$, $q = -{}^1/_2$:

$$48, \quad -24, \quad 12, \quad -6, \quad 3, \quad -{}^3/_2, \ \ldots$$

По причине отрицательности q эта прогрессия знакопеременная.

Абсолютная величина членов этой прогрессии убывает в силу того, что $|q| < 1$. В связи с этим примером введем определение: геометрическая прогрессия называется *убывающей*, если $|q| < 1$ (т. е. если ее члены убывают по модулю; заметим, что при $q < 0$, как в разобранном примере, сами члены прогрессии попеременно меняют знак и убывающей последовательности не образуют, хотя мы и называем прогрессию убывающей).

Пусть последовательность

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ \ldots, \ a_n, \ a_{n+1}, \ \ldots$$

представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем q. Выведем формулу, выражающую общий член a_n прогрессии через ее первый член a_1, знаменатель q и номер n. С этой целью заметим, что по определению геометрической прогрессии

$$a_2 = a_1 q,$$

а также

$$a_3 = a_2 q.$$

Подставим в правую часть последнего равенства вместо a_2 его выражение через a_1 и q, взятое из предыдущего равенства:

$$a_3 = (a_1 q) q = a_1 q^2.$$

Точно так же с помощью равенства

$$a_4 = a_3 q,$$

прямо следующего из определения прогрессии, получим

$$a_4 = (a_1 q^2) q = a_1 q^3.$$

Видна закономерность, по которой общий член геометрической прогрессии выражается через a_1, q и n:

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{89.1}$$

Строгое доказательство формулы (89.1) общего члена геометрической прогрессии проводится методом индукции; оно предоставляется читателю.

Пример 1. Найти a_4, a_6 и a_{11} геометрической прогрессии, у которой $a_1 = 3$ и $q = 2$.

Решение. По формуле (89.1) имеем

$$a_4 = a_1 q^3 = 3\cdot 2^3 = 24,$$
$$a_6 = a_1 q^5 = 3\cdot 2^5 = 96,$$
$$a_{11} = a_1 q^{10} = 3\cdot 2^{10} = 3072.$$

Пример 2. Найти a_3 геометрической прогрессии, состоящей из действительных чисел, если у нее $a_5 = 162$, $a_8 = 4374$.

Решение. С помощью формулы (89.1) запишем:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 q^4 = 162, \\ a_8 = a_1 q^7 = 4374. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений (делением) найдем

$$\frac{a_1 q^7}{a_1 q^4} = \frac{4374}{162} = 27, \qquad q^3 = 27.$$

Последнее уравнение имеет три корня: один действительный, равный 3, и два комплексных сопряженных (см. п. 18 или п. 63). Ограничимся лишь первым из них, так как требуется найти прогрессию, состоящую из действительных чисел. Итак, $q = 3$, а значит, $a_1 = 162/3^4 = 2$, и, следовательно,

$$a_3 = a_1 q^2 = 2\cdot 3^2 = 18.$$

Из формулы (89.1), выражающей общий член геометрической прогрессии, можно сделать выводы о его поведении при $n \to \infty$. Именно, в случае $q > 1$ общий член является бесконечно большой величиной, а в случае $0 < q < 1$ — бесконечно малой:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad q > 1 \quad (a_1 > 0), \\ 0 & \text{при} \quad 0 < q < 1. \end{cases}$$

Если знаменатель прогрессии $q < 0$, то члены прогрессии попеременно меняют знак; все же и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ при $|q| < 1$. Особенно важным является следующее утверждение.

Теорема. *Общий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии стремится к нулю*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \textit{при} \qquad |q| < 1.$$

Доказательство. Чтобы не рассматривать отдельно случаи $q>0$ и $q<0$, будем проводить рассуждения для $|a_n|$. Так как $|q|<1$, то

$$|a_{n+1}|=|a_n||q|<|a_n|$$

— абсолютные величины членов прогрессии монотонно убывают. Так как, кроме того, $|a_n|>0$, то последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно убывает и ограничена снизу (нулем). По теореме Вейерштрасса она имеет предел; обозначим этот предел через l:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=l;$$

требуется доказать, что $l=0$. Для этого запишем:

$$|a_{n+1}|=|a_n||q|. \qquad (89.2)$$

Перейдем в равенстве (89.2) к пределу при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}|=\lim_{n\to\infty}|a_n||q|=|q|\lim_{n\to\infty}|a_n|=|q|l.$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|$ также равен l. Поэтому

$$l=|q|l,$$

или $l[1-|q|]=0$, откуда $l=0$ (так как $1-|q|\neq 0$).

90. Свойства геометрической прогрессии. Напомним, что *среднее геометрическое n положительных чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется формулой

$$x=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

В частности, среднее геометрическое двух положительных чисел равно арифметическому значению квадратного корня из их произведения.

Рассмотрим теперь некоторые свойства геометрической прогрессии.

1. *Каждый член знакоположительной геометрической прогрессии представляет собой среднее геометрическое его соседних членов* (исключение представляет первый член, а у конечной прогрессии также последний член, так как они имеют только по одному соседнему члену).

Доказательство. Для члена a_k члены a_{k-1} и a_{k+1} будут соседними. По определению прогрессии имеем

$$a_k=a_{k-1}q,$$
$$a_{k+1}=a_kq,$$

откуда

$$a_k=a_{k-1}q,$$
$$a_k=a_{k+1}\frac{1}{q}.$$

Перемножим эти равенства, извлечем корень из результата (возьмем его арифметическое значение) и получим

$$a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}},$$

а это и надо было доказать.

2. *У конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов.*

Доказательство. Так же как и у арифметической прогрессии, на k-м месте от начала и от конца геометрической прогрессии, имеющей n членов, находятся члены a_k и a_{n-k+1} соответственно. Найдем произведение этих членов, воспользовавшись формулой (89.1):

$$a_k a_{n-k+1} = (a_1 q^{k-1})(a_1 q^{n-k}) = a_1 a_1 q^{n-1}.$$

Но $a_1 q^{n-1} = a_n$, поэтому

$$a_k a_{n-k+1} = a_1 a_n,$$

что и требовалось доказать.

91. Формулы для суммы n членов геометрической прогрессии. Выведем теперь формулу для суммы членов произвольной конечной геометрической прогрессии, содержащей n членов. Обозначим эту сумму через S_n. Имеем

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q.$$

Но $a_1 q = a_2$, $a_2 q = a_3$, $a_3 q = a_4, \ldots, a_{n-1} q = a_n$, поэтому

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q.$$

Вычтем теперь из полученного равенства исходное:

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1, \qquad S_n (q-1) = a_n q - a_1.$$

Отсюда находим

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}. \qquad (91.1)$$

Здесь, конечно, предполагается, что $q \neq 1$.

Найдена первая формула для суммы членов геометрической прогрессии. Вторую формулу для суммы мы получим, если используем формулу (89.1) для общего члена прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q-1},$$

или

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}. \qquad (91.2)$$

Пример 1. Найти сумму семи членов геометрической прогрессии, у которой $a_1 = -2$, $q = -3$.

Решение. По формуле (91.2) имеем

$$S_7 = a_1 \frac{q^7-1}{q-1} = (-2)\frac{(-3)^7-1}{(-3)-1} = -2\,\frac{-2187-1}{-3-1} = -1094.$$

Пример 2. Для геометрической прогрессии, состоящей из действительных членов, найти S_{10}, если известно, что $S_3 = 9$, $S_6 = -63$.

Решение. Дважды используем формулу (91.2):

$$S_3 = a_1 \frac{q^3-1}{q-1} = 9,$$

$$S_6 = a_1 \frac{q^6-1}{q-1} = -63.$$

Разделим второе равенство на первое; получим

$$\frac{q^6-1}{q^3-1} = -7.$$

Заметим, что по формуле разности квадратов $q^6-1=(q^3-1)\times\times(q^3+1)$. Поэтому после сокращения можно найти

$$q^3+1=-7,$$

откуда $q^3=-8$. По условию прогрессия состоит из действительных членов. Поэтому берем только $q=-2$. Из первого исходного уравнения теперь найдем $a_1=3$. Снова использовав формулу (91.2), получим

$$S_{10} = 3\,\frac{(-2)^{10}-1}{(-2)-1} = 3\,\frac{1024-1}{-3} = -1023.$$

92. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Рассмотрим теперь вопрос о суммировании бесконечной геометрической прогрессии. Назовем n-й *частичной суммой* данной бесконечной прогрессии сумму n ее первых членов. Обозначим n-ю частичную сумму символом S_n.

Так,

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Для каждой бесконечной прогрессии

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

можно составить (также бесконечную) последовательность ее частичных сумм $\{S_n\}$:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

Пусть последовательность $\{S_n\}$ при неограниченном возрастании n имеет предел S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \qquad (92.1)$$

В этом случае число S, т. е. предел частичных сумм прогрессии, называют *суммой бесконечной прогрессии*. Мы докажем, что бесконечная убывающая геометрическая прогрессия всегда имеет сумму, и выведем формулу для этой суммы (можно также показать, что при $|q| \geqslant 1$ бесконечная прогрессия не имеет суммы, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует).

Запишем выражение частичной суммы как суммы n членов прогрессии по формуле (91.1) и будем рассматривать предел частичной суммы при $n \to \infty$:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n q - a_1}{q - 1}.$$

Из теоремы п. 89 известно, что для убывающей прогрессии $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$; поэтому, применяя теорему о пределе разности, найдем

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n q}{q - 1} - \lim_{n \to \infty} \frac{a_1}{q - 1} = \frac{q}{q - 1} \lim_{n \to \infty} a_n - \frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

(здесь также использовано правило: постоянный множитель выносится за знак предела). Существование $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ доказано, и одновременно получена формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}. \qquad (92.2)$$

Равенство (92.1) можно также писать в виде

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1 - q} \qquad (|q| < 1). \qquad (92.3)$$

Здесь может казаться парадоксальным, что сумме бесконечного множества слагаемых приписывается вполне определенное

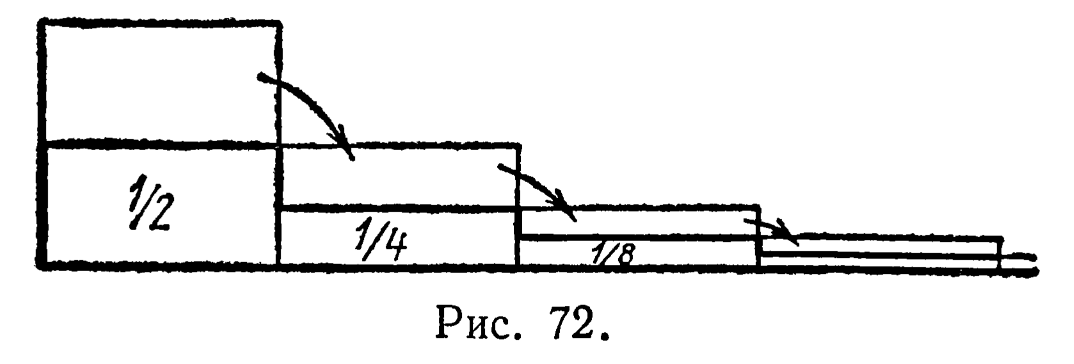


Рис. 72.

конечное значение. Можно привести наглядную иллюстрацию в пояснение такого положения. Рассмотрим квадрат со стороной, равной единице (рис. 72). Разделим этот квадрат горизонтальной линией на две равные части и верхнюю часть приложим к нижней так, чтобы образовался прямоугольник со сторонами 2 и $^1/_2$. После этого правую половину этого прямоугольника снова разделим горизонтальной линией пополам и верхнюю часть приложим к нижней (как показано на рис. 72). Продолжая этот процесс, мы все время преобразуем исходный квадрат с площадью,

равной 1, в равновеликие фигуры (принимающие вид лестницы с утоньшающимися ступеньками). При бесконечном продолжении этого процесса вся площадь квадрата разлагается в бесконечное число слагаемых — площадей прямоугольников с основаниями, равными 1, и высотами $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... Площади прямоугольников как раз образуют при этом бесконечную убывающую прогрессию ($a_1 = {}^1/_2$, $q = {}^1/_2$); ее сумма

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{^1/_2}{1 - {}^1/_2} = 1,$$

т. е., как и следовало ожидать, равна площади квадрата.

Пример. Найти суммы следующих бесконечных прогрессий:

а) 2, $^3/_2$, $^9/_8$, $^{27}/_{32}$, ...;

б) 3, -1, $^1/_3$, $-{}^1/_9$, ...;

в) 1, $^{11}/_{10}$, 121/100, 1331/1000.

Решение. а) Замечаем, что у этой прогрессии $a_1 = 2$, $q = {}^3/_4$. Поэтому по формуле (92.2) находим

$$S = \frac{2}{1 - {}^3/_4} = 8.$$

б) Здесь $a_1 = 3$, $q = -{}^1/_3$; значит, по той же формуле (92.2) имеем

$$S = \frac{3}{1 - (-{}^1/_3)} = \frac{9}{4}.$$

в) Находим, что у этой прогрессии $q = {}^{11}/_{10} > 1$. Поэтому данная прогрессия не имеет суммы.

В п. 5 было показано применение формулы суммы членов бесконечно убывающей прогрессии к обращению периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.

Упражнения

1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $^3/_5$, а сумма ее первых четырех членов равна $^{13}/_{27}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

2. Найти четыре числа, образующие знакочередующуюся геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

3. Показать, что если последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, то и последовательность

$$a_1^\alpha, a_2^\alpha, a_3^\alpha, \ldots, a_n^\alpha, \ldots$$

при любом $\alpha > 0$ образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Сохранится ли это утверждение при $\alpha \leqslant 0$?

4. Вывести формулу для произведения n членов геометрической прогрессии.

Глава VIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА (ДУГИ)

§ 1. Векторы. Обобщение понятий угла и дуги

93. Вектор, проекция вектора. *Вектором* называется направленный отрезок в плоскости (в пространстве). При изучении тригонометрических функций мы будем рассматривать векторы в плоскости. С каждым вектором связывают понятия *направления* и *длины* (абсолютной величины, модуля).

Для вектора (рис. 73) применяются следующие обозначения:

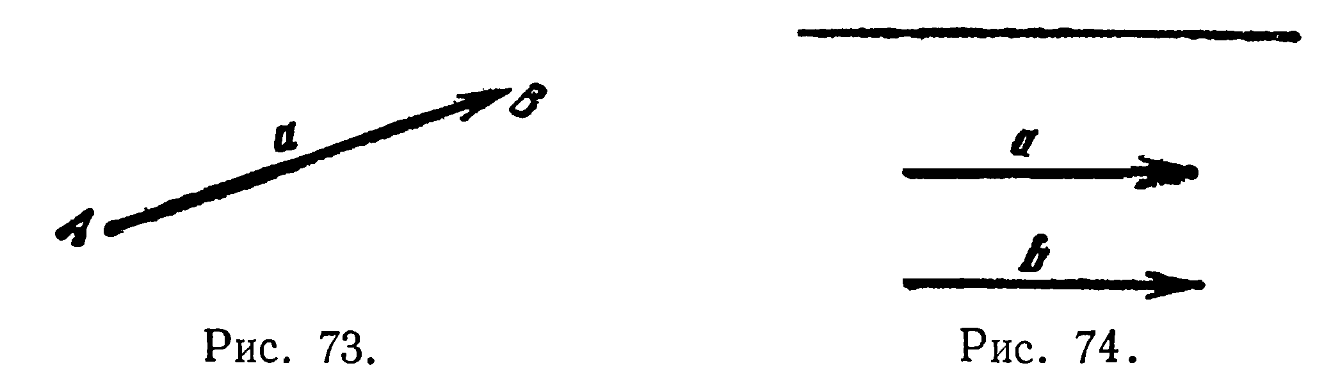


Рис. 73. Рис. 74.

$\overline{AB} \equiv \overrightarrow{AB} \equiv \boldsymbol{a}$, где A — начало вектора, а B — его конец. Длина отрезка AB называется *длиной вектора* $\overline{AB}$ (его абсолютной величиной, модулем) и обозначается так: $|\overline{AB}|$, $|\boldsymbol{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$. Для общности рассматривается и случай *нулевого отрезка* $\overrightarrow{AA}$, начало которого совпадает с его концом. Такой отрезок называется *нулевым вектором* и обозначается через $\mathbf{0}$. Нулевой вектор имеет длину, равную нулю; ему не приписывается никакого направления.

Следует заметить, что всегда $|\overline{AB}| \geqslant 0$, причем $|\overline{AB}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{AB}$ — нулевой вектор.

Для векторов не имеют смысла понятия «больше» или «меньше». Можно только говорить, что длина вектора $\overline{AB}$ больше длины вектора $\overline{CD}$, и писать: $|\overline{AB}| > |\overline{CD}|$.

Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *равными*, если они:

1) параллельны одной и той же прямой,
2) одинаково направлены,
3) имеют равные длины, т. е. $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ (рис. 74).

Совокупность векторов с указанным выше определением равенства обычно называют *системой свободных векторов*. Термин «свободный вектор» связан с тем, что теперь один и тот же вектор может быть изображен направленным отрезком с началом в любой точке: его можно свободно переносить из точки в точку.

Каждому вектору $\overline{AB}$ можно поставить в соответствие лежащий на заданной оси OL вектор $\overline{A_1B_1}$, где точки A_1 и B_1 соответственно — проекции на ось OL точек A и B (рис. 75). *Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось OL* называется длина вектора $\overline{A_1B_1}$,

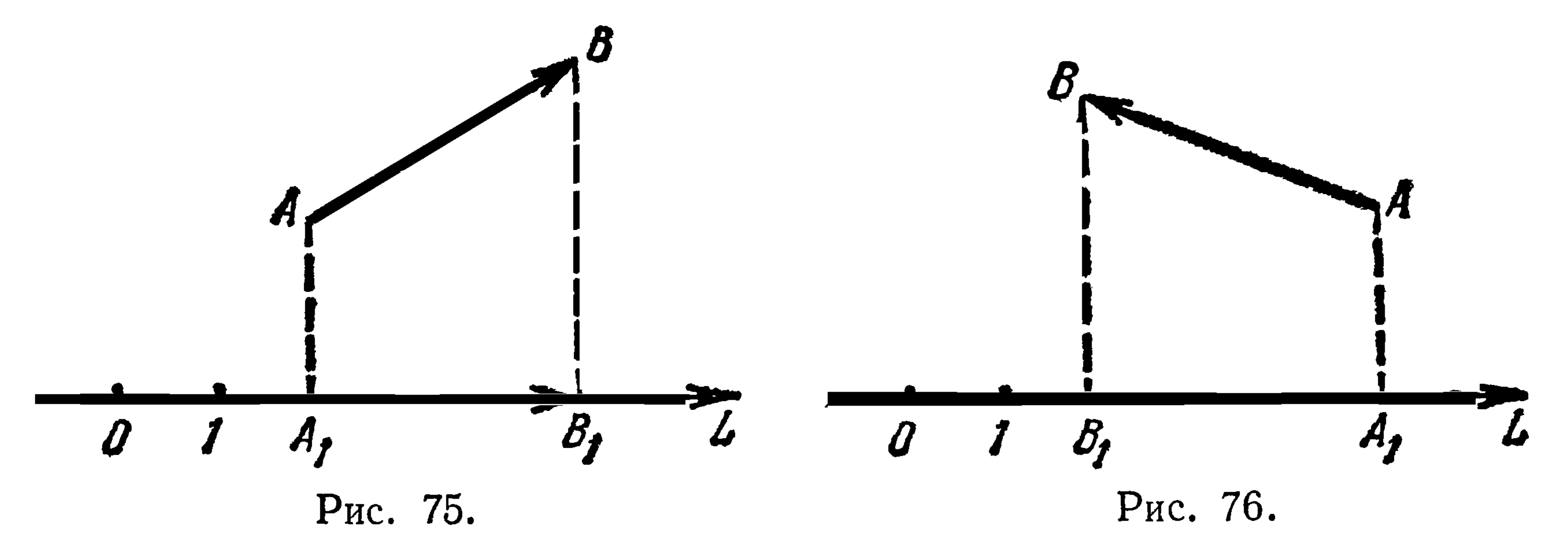


Рис. 75. Рис. 76.

взятая со знаком плюс, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус в противном случае. Итак, проекция вектора $\overline{AB}$ на ось есть по определению число (не вектор!). Условимся проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось OL обозначать так: $\text{пр}_{OL}\overline{AB}$. Возможны следующие

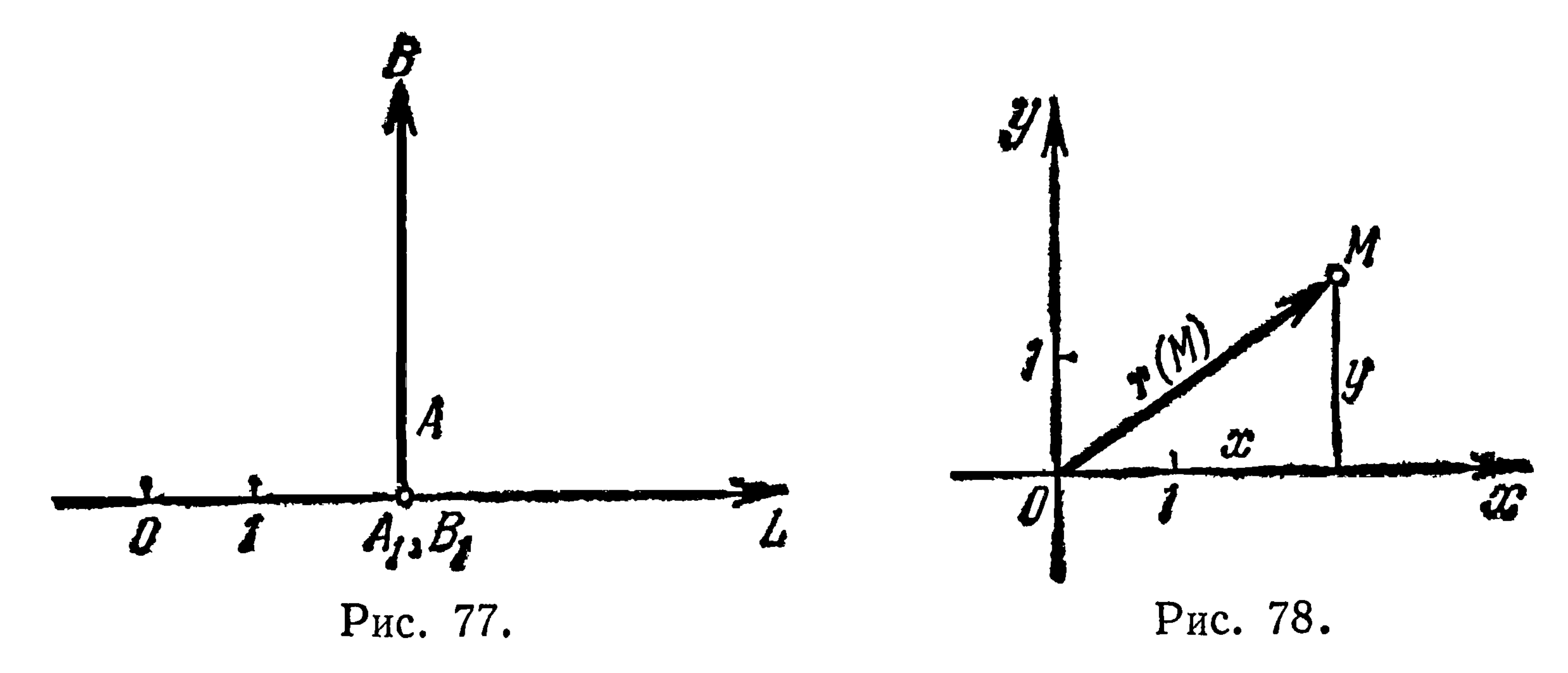


Рис. 77. Рис. 78.

случаи: а) $\text{пр}_{OL}\overline{AB} = +|\overline{A_1B_1}| > 0$ (рис. 75), б) $\text{пр}_{OL}\overline{AB} = -|\overline{A_1B_1}| < 0$ (рис. 76), в) $\text{пр}_{OL}\overline{AB} = 0$ (рис. 77).

Рассмотрим теперь совокупность векторов, исходящих из одной точки (начала). Такая совокупность векторов называется *центрированной*. Примем эту общую точку за начало O декартовой прямоугольной системы координат Oxy (см. п. 8).

Определение. Вектор $\overline{OM}$, имеющий своим началом точку O (начало координат) и своим концом произвольную точку M плоскости, называется *радиусом-вектором* точки M или *подвижным радиусом* (рис. 78). Радиус-вектор обозначается и так: $\boldsymbol{r}(M)$, т. е. $\overline{OM}=\boldsymbol{r}(M)$. Через x и y обозначим соответственно абсциссу и ординату точки M, а через r — длину (модуль) вектора $\overline{OM}$. Следовательно, $r=|\overline{OM}|=|\boldsymbol{r}(M)|$. Заметим, что координаты x и y точки M являются вместе с тем проекциями ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(M)$ на оси координат.

94. Положительные углы и дуги, меньшие 360°. На координатной плоскости Oxy рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат (рис. 79).

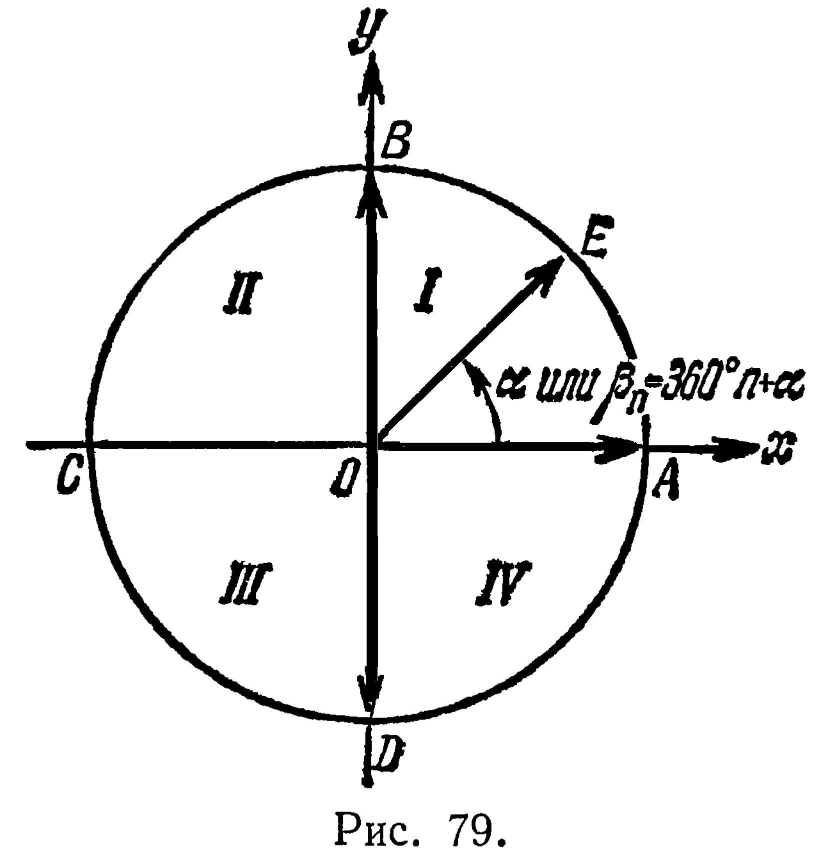


Рис. 79.

Будем считать, что угол $\alpha=\angle AOE$ образован вращением некоторого подвижного радиуса-вектора, абсолютная величина которого равна R, в направлении, противоположном движению часовой стрелки, от начального положения $\overline{OA}$, совпадающего с положительным направлением оси Ox, до конечного положения $\overline{OE}$. Такой угол α считается положительным. При вращении (в направлении против движения часовой стрелки) подвижный радиус-вектор описывает углы от 0° до 360° (определение градуса см. в п. 165). Осями координат круг на рис. 79 делится на четыре четверти: первая четверть AOB, вторая BOC, третья COD и четвертая DOA. Если сторона OE угла AOE расположена в первой, второй, третьей или четвертой четверти, то угол AOE будем называть соответственно углом первой, второй, третьей или четвертой четверти. В первой четверти угол α изменяется в пределах от 0° до 90° ($0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$), во второй — от 90° до 180° ($90°\leqslant\alpha\leqslant 180°$), в третьей — от 180° до 270° ($180°\leqslant\alpha\leqslant 270°$), в четвертой — от 270° до 360° ($270°\leqslant\alpha\leqslant 360°$).

Если подвижный радиус-вектор описал угол AOE, равный α угловым градусам, то его конец описал дугу окружности $\smile{AE}$, равную α дуговым градусам. Начало этой дуги находится в точке A, а конец — в точке E. Все сказанное выше об углах относится и к дугам.

95. Углы и дуги, бо́льшие 360°. В п. 94 мы ограничивались углами от 0° до 360°. Между тем в различных задачах прихо-

дится иметь дело с вращениями, при которых совершается больше полного оборота, например с вращением маховика, с полетом спутника вокруг Земли и т. д. Эти задачи приводят к необходимости обобщения понятия угла (дуги), к необходимости введения углов (дуг), бо́льших 360°. Рассмотрим угол $AOE=\alpha$, где $0° \leqslant \alpha < 360°$ (рис. 79). Этот угол может быть образован следующим образом: подвижный радиус-вектор из своего первоначального положения $\overline{OA}$ сделал сначала n полных оборотов в направлении против движения часовой стрелки, а потом еще повернулся на угол α в том же направлении, и мы получили некоторый положительный угол β_n, который связан с прежним углом α следующей формулой:

$$\beta_n = 360° n + \alpha, \qquad (95.1)$$

где $0° \leqslant \alpha < 360°$ и n — любое целое неотрицательное число. Угол β_n (при $n \geqslant 1$ и $\alpha \geqslant 0°$) будем называть положительным углом, большим 360° (при $n=1$ и $\alpha=0$ получаем угол, равный 360°). Существует бесконечное множество углов β_n с начальной стороной $\overline{OA}$ и конечной стороной $\overline{OE}$, которые записываются при помощи формулы (95.1). Например:

$$\beta_0 = \alpha, \quad \beta_1 = 360° + \alpha, \quad \beta_2 = 720° + \alpha \quad \text{и т. д.}$$

Если подвижный радиус-вектор описал угол $\beta_n = 360° n + \alpha$, то его конец описал дугу, равную сумме целого числа n полных окружностей и дуги $\smile AE$. Существует бесконечное множество дуг, имеющих данное начало A и данный конец E. Все эти дуги также выражаются формулой (95.1), но градусы, входящие в эту формулу, следует понимать как дуговые.

96. Отрицательные углы. Сложение и вычитание углов. Назовем вращение подвижного радиуса-вектора в направлении против движения часовой стрелки *положительным*, а в противоположном направлении (в направлении по движению часовой стрелки) — *отрицательным*. Угол, описанный при отрицательном вращении подвижного радиуса-вектора, назовем *отрицательным углом*.

Правило. Угол измеряется положительным числом, если он положительный, и отрицательным числом, если он отрицательный.

Пример 1. На рис. 80 изображены два угла с общей начальной стороной $\overline{OA}$ и общей конечной стороной $\overline{OD}$: один равен $+270°$, другой $-90°$.

Сумма двух углов. На координатной плоскости Oxy рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 81). Пусть произвольный угол α (на чертеже положительный) получен в результате вращения некоторого

подвижного радиуса-вектора от его начального положения $\overline{OA}$, совпадающего с положительным направлением оси Ox, до его конечного положения $\overline{OE}$. Примем теперь положение радиуса-вектора $\overline{OE}$ за начальное и отложим от него произвольный угол β

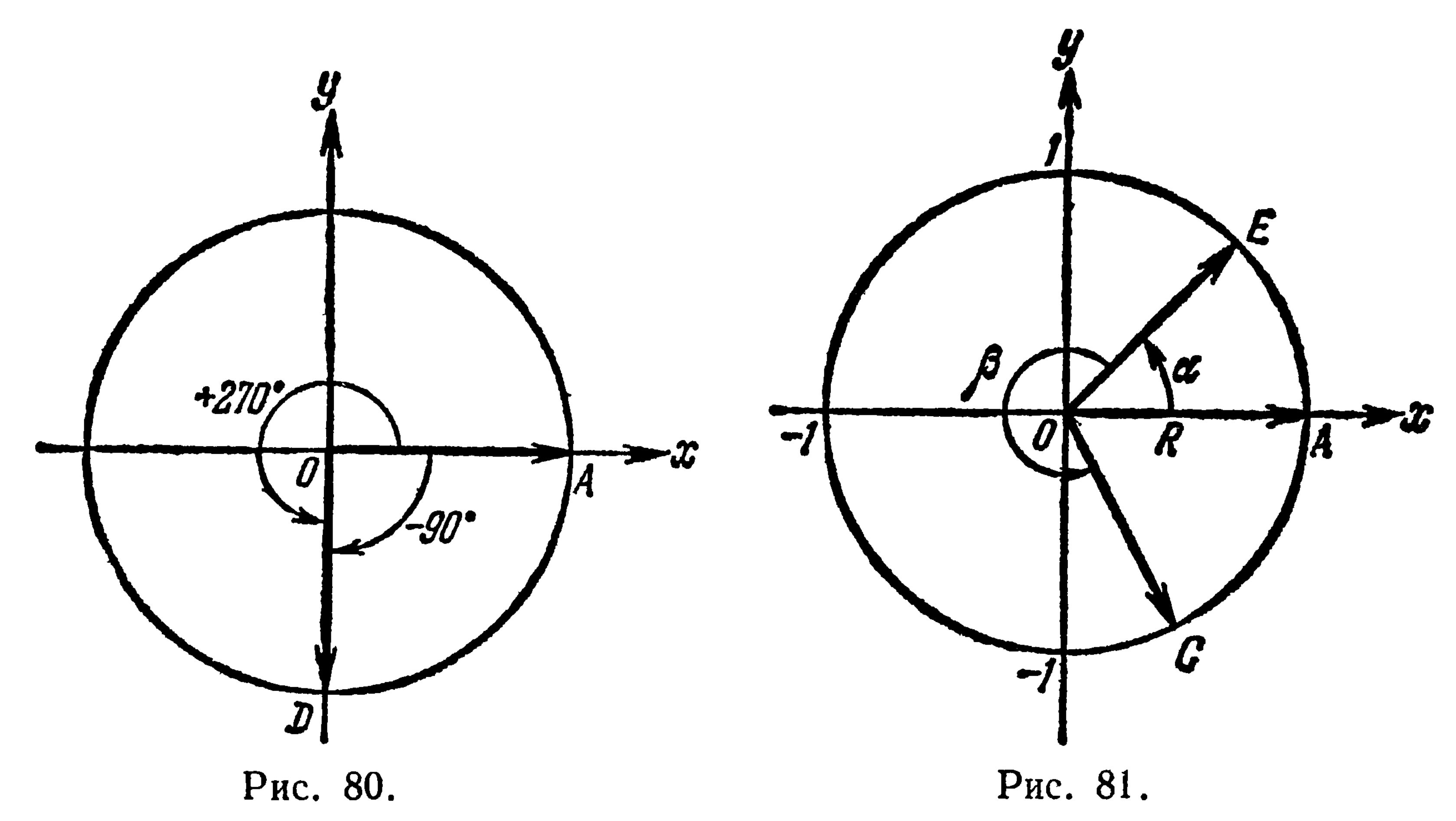


Рис. 80. Рис. 81.

(на чертеже положительный), который получим в результате вращения некоторого подвижного радиуса-вектора от его начального положения $\overline{OE}$ до его конечного положения $\overline{OC}$. В результате этих действий мы получим угол, который будем называть *суммой* углов α и β. (Начальное положение подвижного радиуса-вектора $\overline{OA}$, конечное положение радиуса-вектора $\overline{OC}$.)

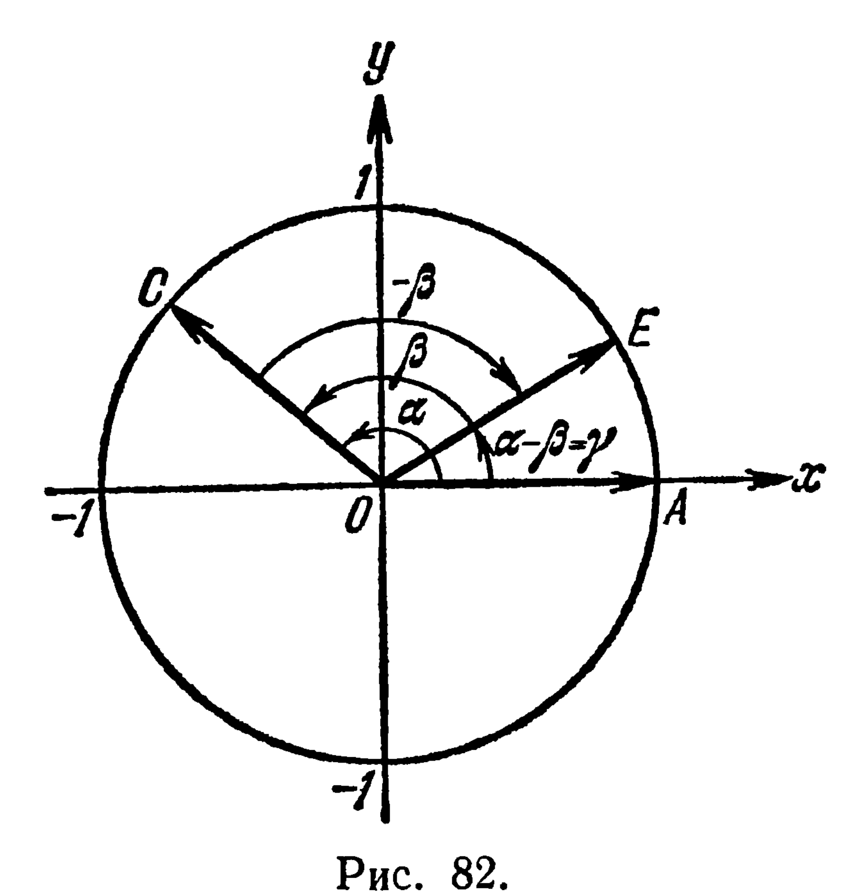


Рис. 82.

Разность двух углов. Под разностью двух углов α и β, которую обозначим $\alpha-\beta$, мы будем понимать такой третий угол γ, который в сумме с углом β дает угол α, т. е. $\gamma=\alpha-\beta$, если $\beta+\gamma=\alpha$. Разность двух углов α и β можно трактовать как сумму углов α и $-\beta$. В самом деле, $[\alpha+(-\beta)]+\beta=\alpha$ (рис. 82). Вообще, *для любых углов их сумма измеряется алгебраической суммой действительных чисел, измеряющих эти углы.*

Пример 2. $\angle AOB = +60°$, а $\angle BOC = -90°$, тогда $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 60° + (-90°) = -30°$ (рис. 83).

Пример 3. Угол $\beta = +780°$, а угол $\beta' = -1110°$. Сумма их $\beta + \beta' = 780° + (-1110°) = -330°$.

В формуле (95.1) предполагалось, что n — любое целое неотрицательное число. Если же предположить, что n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль), то при помощи формулы

$$\beta_n = 360° n + \alpha, \qquad (96.1)$$

где $0° \leqslant \alpha < 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, можно будет записать любой угол, как положительный, так и отрицательный.

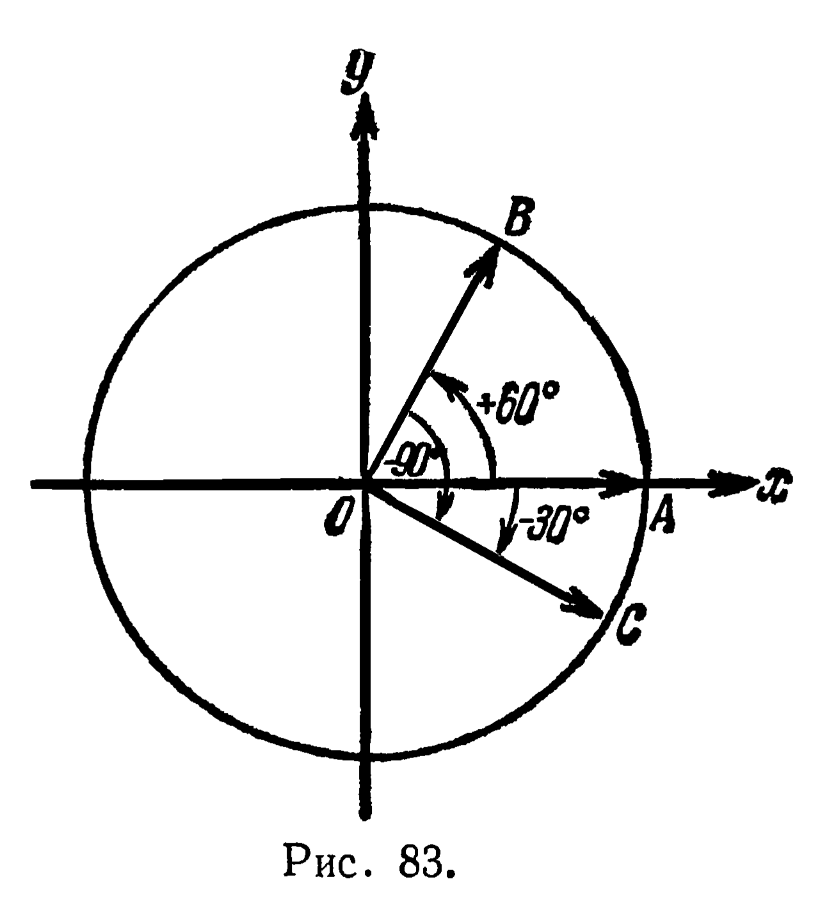


Рис. 83.

Пример 4. Угол, равный $-1370°$, можно записать так:

$$-1370° = 360°(-4) + 70°.$$

Здесь $n = -4$, $\alpha = +70°$.

Заметим, что все углы β_n, записанные при помощи формулы (96.1), при разных значениях n, но одном и том же α, имеют общие начальную ($\overline{OA}$) и конечную ($\overline{OE}$) стороны (рис. 79). Поэтому построение любого угла β_n сводится к построению соответствующего неотрицательного угла α, меньшего 360°. На рис. 79 углы $\beta_n = \alpha + 360° n$ между собой не отличаются, они различаются лишь процессом вращения радиуса-вектора, который привел к их образованию.

Упражнения

1. Углом какой четверти является угол, равный:
а) 73°; б) 327°; в) 151°; г) 190°; д) 94°; е) 286°; ж) 359°?

2. Углом какой четверти является угол, равный:
а) —30°; б) —260°; в) —98°; г) —300°; д) —89°; е) —272°?

3. Представить угол β в виде $\beta_n = 360° n + \alpha$, где n — целое число, а α удовлетворяет условию $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, если:
а) $\beta = -270°$; б) $\beta = 405°$; в) $\beta = -960°$; г) $\beta = 1800°$; д) $\beta = -1751°$.

§ 2. Тригонометрические функции произвольного угла

97. Определение основных тригонометрических функций. В гл. IV было дано общее определение функциональной зависимости (общее определение функции) и изучались некоторые элементарные функции. Теперь мы введем основные тригонометрические функции.

Пусть радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ точки M образует угол α с осью Ox (рис. 84), причем x и y соответственно абсцисса и ордината конца M вектора, r — его модуль, а величина угла α измеряется в градусах или в радианах (см. пп. 165, 166).

1. *Синусом* угла α (обозначение: $\sin \alpha$) называется отношение ординаты y (см. рис. 84) к длине r радиуса-вектора $\overline{OM}$:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}. \qquad (97.1)$$

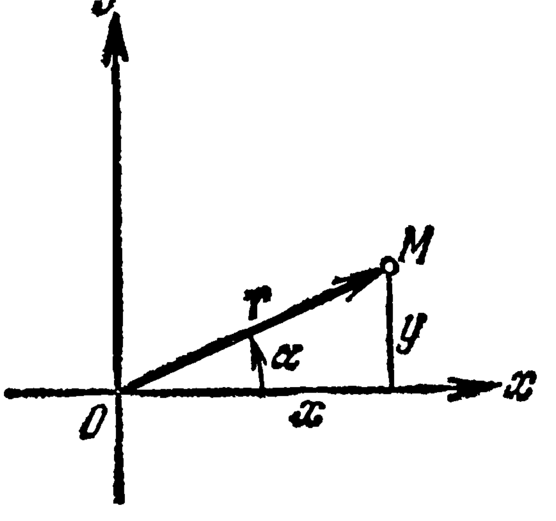


Рис. 84.

2. *Косинусом* угла α (обозначение: $\cos \alpha$) называется отношение абсциссы x к длине r радиуса-вектора $\overline{OM}$:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}. \qquad (97.2)$$

Ниже (замечание 1) мы покажем, что $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, определенные равенствами (97.1) и (97.2), действительно зависят лишь от угла α (но не от радиуса окружности r).

3. *Тангенсом* угла α (обозначение: $\operatorname{tg} \alpha$) называется отношение синуса угла α к косинусу этого угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \qquad (97.3)$$

4. *Котангенсом* угла α (обозначение: $\operatorname{ctg} \alpha$) называется отношение косинуса угла α к синусу этого угла:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \qquad (97.4)$$

5. *Секансом* угла α (обозначение: $\sec \alpha$) называется величина, обратная $\cos \alpha$:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \qquad (97.5)$$

6. *Косекансом* угла α (обозначение: $\operatorname{cosec} \alpha$) называется величина, обратная $\sin \alpha$:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \qquad (97.6)$$

Замечание 1. Тригонометрические функции (97.1)—(97.6) действительно являются функциями только угла α, т. е. не зависят от длины подвижного радиуса-вектора. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что если подвижный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ образует с осью абсцисс данный угол α, то отношения x/r и y/r не зависят от длины радиуса-вектора; читатель легко в этом убедится.

Замечание 2. Из определения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}, \tag{97.7}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}. \tag{97.8}$$

Соотношения (97.7) и (97.8) можно было бы принять в качестве определений для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Замечание 3. Аналогично получаем

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}, \tag{97.9}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}. \tag{97.10}$$

Соотношения (97.9) и (97.10) можно было бы также принять в качестве определений для $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$.

Замечание 4. Во всех определениях (97.1)—(97.6) мы предполагаем, что соответствующие отношения существуют (имеют смысл). Например, $\operatorname{tg}\alpha$ имеет смысл, если $\cos\alpha\neq 0$, $\operatorname{ctg}\alpha$ имеет смысл, если $\sin\alpha\neq 0$, и т. д. Поскольку (замечание 1) тригонометрические функции (97.1)—(97.6) угла α не зависят от длины подвижного радиуса-вектора, то в качестве радиуса-вектора можно брать вектор с длиной, равной единице ($|\boldsymbol{r}|=r=1$). Такой вектор называют *единичным радиусом-вектором*. В случае единичного радиуса-вектора формулы для основных тригонометрических функций запишутся так (рис. 85):

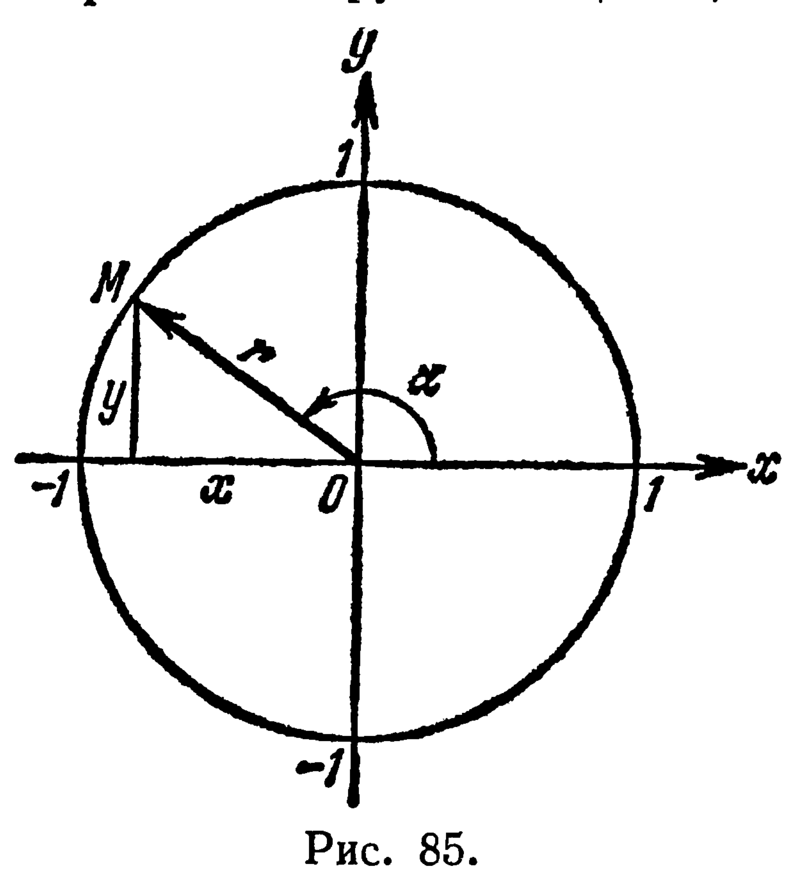


Рис. 85.

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=y, & \cos\alpha&=x,\\ \operatorname{tg}\alpha&=\frac{y}{x}, & \operatorname{ctg}\alpha&=\frac{x}{y},\\ \sec\alpha&=\frac{1}{x}, & \operatorname{cosec}\alpha&=\frac{1}{y}.\end{aligned}\right\} \tag{97.11}$$

Формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ остались прежними (см. (97.7) и (97.8)), а формулы для остальных основных тригонометрических функций приняли более простой вид (см. (97.1), (97.2), (97.9) и (97.10)). Следовательно, синус и косинус угла α равны соответственно ординате и абсциссе конца подвижного единичного радиуса-вектора. Конец этого единичного радиуса-вектора при изменении угла α от 0° до 360° опишет окружность, называемую *единичной окружностью* (рис. 85). Для геометрического истолкования тангенса и котангенса вводят понятия *оси тангенсов* и *оси котангенсов*. *Осью тангенсов* называется перпендикуляр, восставленный в точке A к неподвижному радиусу-вектору $\overline{OA}$. Положительное

и отрицательное направления на оси тангенсов выбирают так, чтобы они совпадали с соответствующими направлениями оси ординат (рис. 86). Рассмотрим угол $\alpha=\angle AOM$ и введем понятие соответствующей точки оси тангенсов.

а) Если точка M единичной окружности лежит справа от оси ординат, то соответствующей ей точкой оси тангенсов назовем точку M_1 (точку пересечения продолжения OM с осью тангенсов, рис. 86, *а*).

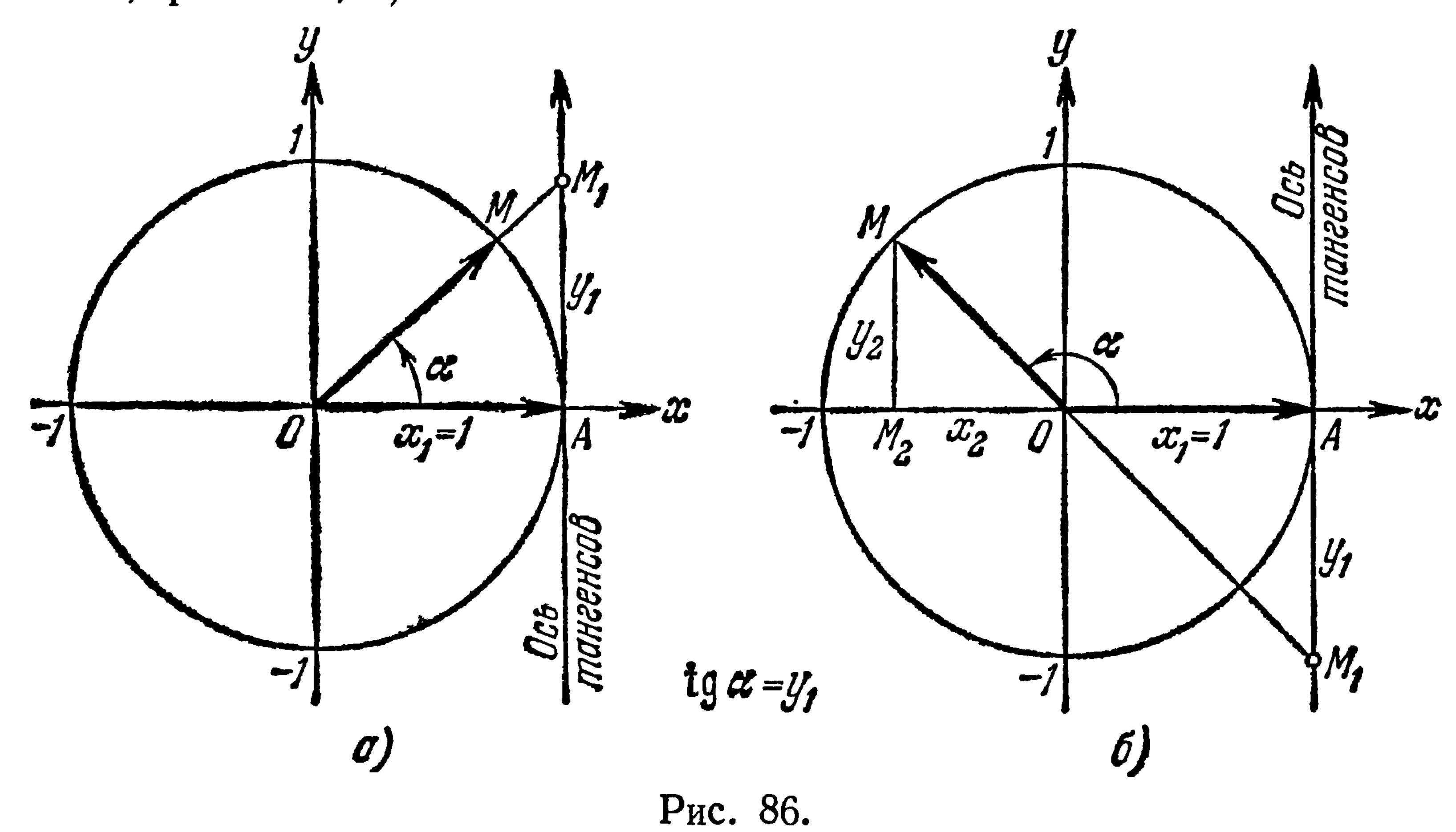


Рис. 86.

б) Если точка M единичной окружности лежит слева от оси ординат, то соответствующей ей точкой оси тангенсов назовем точку M_1 (точку пересечения продолжения MO с осью тангенсов, рис. 86, *б*).

Заметим, что тангенс угла α численно равен ординате y_1 (рис. 86) соответствующей точки оси тангенсов, т. е. всегда $\operatorname{tg}\alpha=y_1$. Докажем это для углов первых двух четвертей:

1) $0°\leqslant\alpha<90°$ (рис. 86, *а*). $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_1}{1}=y_1\geqslant 0$, где y_1 — ордината точки M_1.

2) $90°<\alpha\leqslant 180°$ (рис. 86, *б*). $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2}{x_2}\leqslant 0$, где x_2 и y_2 — абсцисса и ордината точки M. Из подобия прямоугольных треугольников OMM_2 и OM_1A имеем

$$\frac{|y_2|}{|x_2|}=\frac{|y_1|}{1},$$

или

$$\frac{y_2}{-x_2}=\frac{-y_1}{1}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y_2}{x_2}=y_1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2}{x_2}=y_1\leqslant 0$.

Рекомендуем читателю самостоятельно рассмотреть случаи:

$$3)\ 180^\circ \leqslant \alpha < 270^\circ \quad \text{и} \quad 4)\ 270^\circ < \alpha \leqslant 360^\circ.$$

Заметим еще следующее:

а) если точка M лежит на оси ординат (например, $\alpha = 270^\circ$), то соответствующей ей точки оси тангенсов не существует, но при этом и $\operatorname{tg}\alpha$ также не существует;

б) в рассмотренных случаях 1)—4) мы брали угол α в пределах от 0° до 360°, но в наших рассуждениях ничего не изменится, если мы будем предполагать угол α любым.

Осью котангенсов называется перпендикуляр, восставленный в точке B (конец радиуса-вектора $\overline{OB}$, образующего с осью Ox

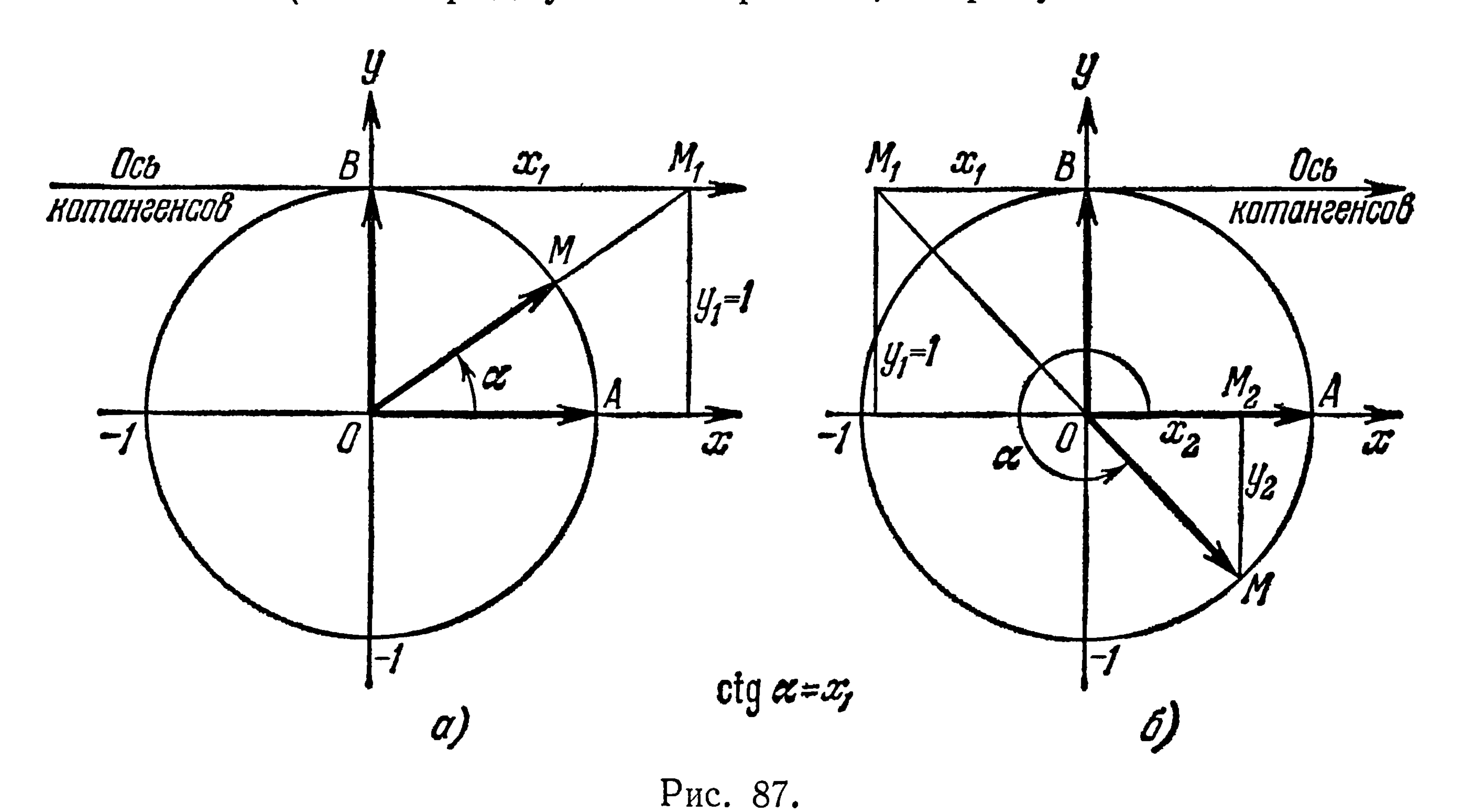


Рис. 87.

угол, равный 90°) к оси ординат. Положительное и отрицательное направления на оси котангенсов выбирают так, чтобы они совпадали с соответствующими направлениями оси абсцисс (рис. 87). Введем понятие соответствующей точки оси котангенсов.

а) Если точка M единичной окружности лежит над осью абсцисс, то соответствующей ей точкой оси котангенсов назовем точку M_1 (точку пересечения продолжения OM с осью котангенсов, рис. 87, *а*).

б) Если точка M единичной окружности лежит под осью абсцисс, то соответствующей ей точкой оси котангенсов назовем точку M_1 (точку пересечения продолжения MO с осью котангенсов, рис. 87, *б*).

Аналогично предыдущему можно получить, что котангенс угла α равен абсциссе x_1 соответствующей точки оси котангенсов, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = x_1$. Если точка M лежит на оси абсцисс (например,

$\alpha = 180°$), то соответствующей ей точки оси котангенсов не существует, но при этом и $\operatorname{ctg}\alpha$ также не существует.

98. Изменение основных тригонометрических функций при изменении угла от 0 до 2π. В дальнейшем мы будем использовать не только градусную, но и радианную меру углов (см. п. 166); радианное измерение углов станет особенно важным при переходе к тригонометрическим функциям числового аргумента (п. 107). В связи с этим напомним некоторые факты из геометрии, относящиеся к градусной и радианной системам измерения углов и дуг:

1) при измерении углов и дуг в радианной системе наименование единицы измерения — радиана обычно опускают и говорят, например, «угол равен $\pi/4$» вместо «угол равен $\pi/4$ радиана»; «угол равен 1000» вместо «угол равен 1000 радиан»;

2) при переходе от градусной меры (α градусов) к радианной мере (a радиан) пользуются формулой

$$a = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}; \tag{98.1}$$

3) при переходе от радианной меры (a радиан) к градусной мере (α градусов) пользуются формулой

$$\alpha° = \frac{a \cdot 180°}{\pi}. \tag{98.2}$$

Полезно запомнить соответствующие значения в градусной и радианной мере некоторых наиболее часто встречающихся углов, приведенные в следующей таблице.

Градусы	0	30	45	60	90	180	270	360
Радианы	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Рассмотрим теперь, как изменяется (по абсолютной величине и знаку) каждая из основных тригонометрических функций при изменении угла α от 0 до 2π. За их изменением проследим, пользуясь единичной окружностью (см. п. 97).

I. **$\sin\alpha$.** Согласно первой формуле (97.11) $\sin\alpha = y$, где y — ордината конца подвижного единичного радиуса-вектора (см. рис. 85).

1) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ (первая четверть). Если углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi/2$ (рис. 88), то $y_1 < y_2$, следовательно, и $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$. При возрастании угла α от 0 до $\pi/2$ $\sin\alpha$ монотонно возрастает от 0 до 1.

2) $\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (вторая четверть). Если углы α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам $\pi/2 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$ (рис. 89), то

$y_1 > y_2$, следовательно, и $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2$. При возрастании угла α от $\pi/2$ до π $\sin\alpha$ монотонно убывает от 1 до 0.

3) $\pi \leqslant \alpha \leqslant 3\pi/2$ (третья четверть). При возрастании угла α ($\alpha_2 > \alpha_1$) от π до $3\pi/2$ $\sin\alpha$ монотонно убывает ($y_2 < y_1$) от 0 до —1 (рис. 90).

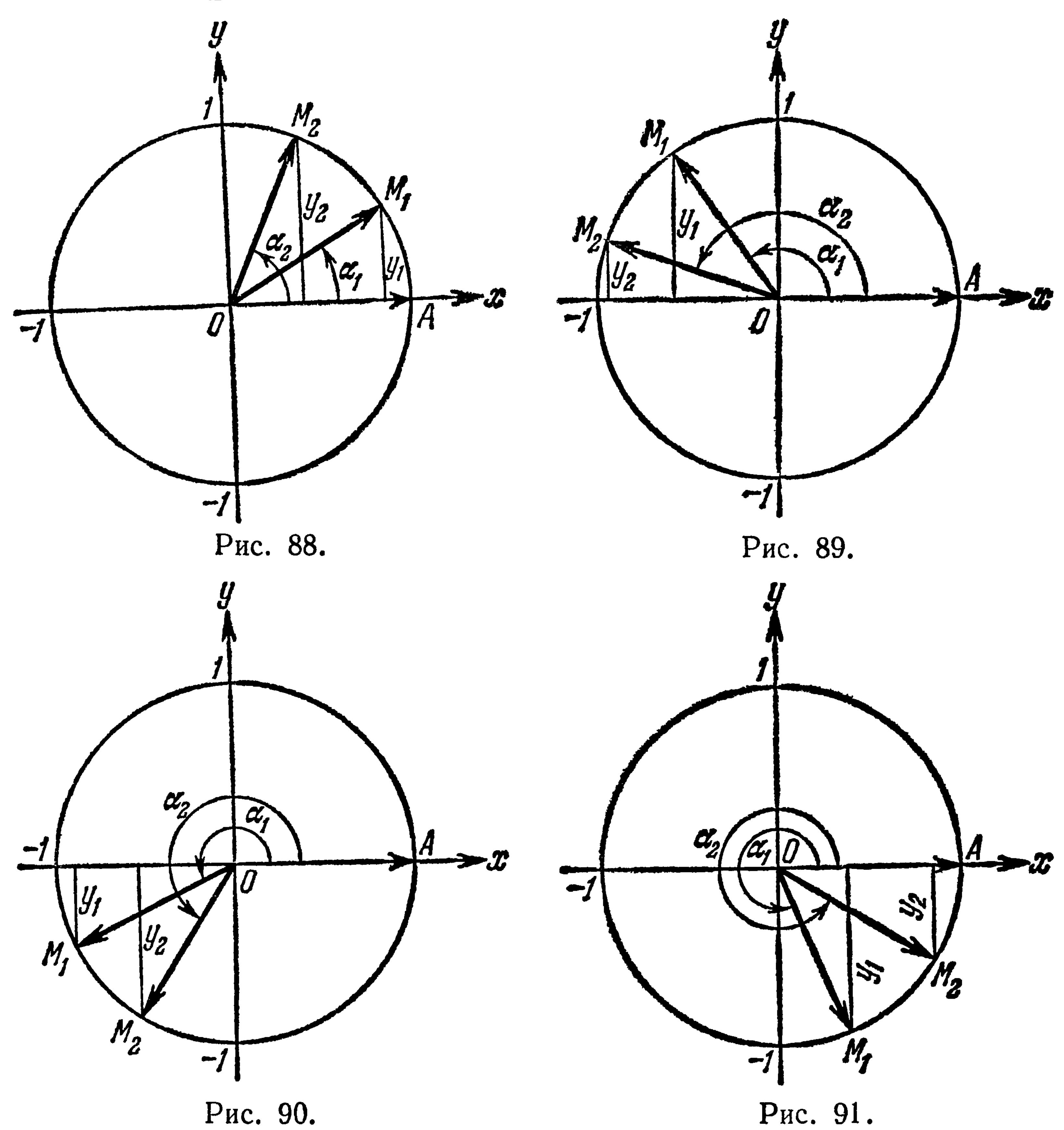


Рис. 88. Рис. 89. Рис. 90. Рис. 91.

4) $3\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ (четвертая четверть). При возрастании угла α ($\alpha_2 > \alpha_1$) от $3\pi/2$ до 2π $\sin\alpha$ монотонно возрастает ($y_2 > y_1$) от —1 до 0 (рис. 91).

Вывод. При любом угле α абсолютная величина $\sin\alpha$ не превосходит 1, что записывается так:

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \tag{98.3}$$

или в равносильной форме:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1. \tag{98.4}$$

II. **cos** α. По второй формуле (97.11) $\cos\alpha = x$, где x — абсцисса конца подвижного единичного радиуса-вектора (рис. 85).

1) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ (первая четверть). Для углов α_1 и α_2, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi/2$ (рис. 92, *а*), выполняется неравенство $x_2 < x_1$ ($x_1 = OM_1'$ и $x_2 = OM_2'$), следовательно, $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$. При возрастании угла α от 0 до $\pi/2$ $\cos\alpha$ монотонно убывает от 1 до 0.

2) $\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (вторая четверть). При возрастании угла α ($\alpha_4 > \alpha_3$) от $\pi/2$ до π $\cos\alpha$ монотонно убывает ($x_4 < x_3$, где $x_4 = -|OM_4'|$ и $x_3 = -|OM_3'|$) от 0 до -1 (рис. 92, *а*).

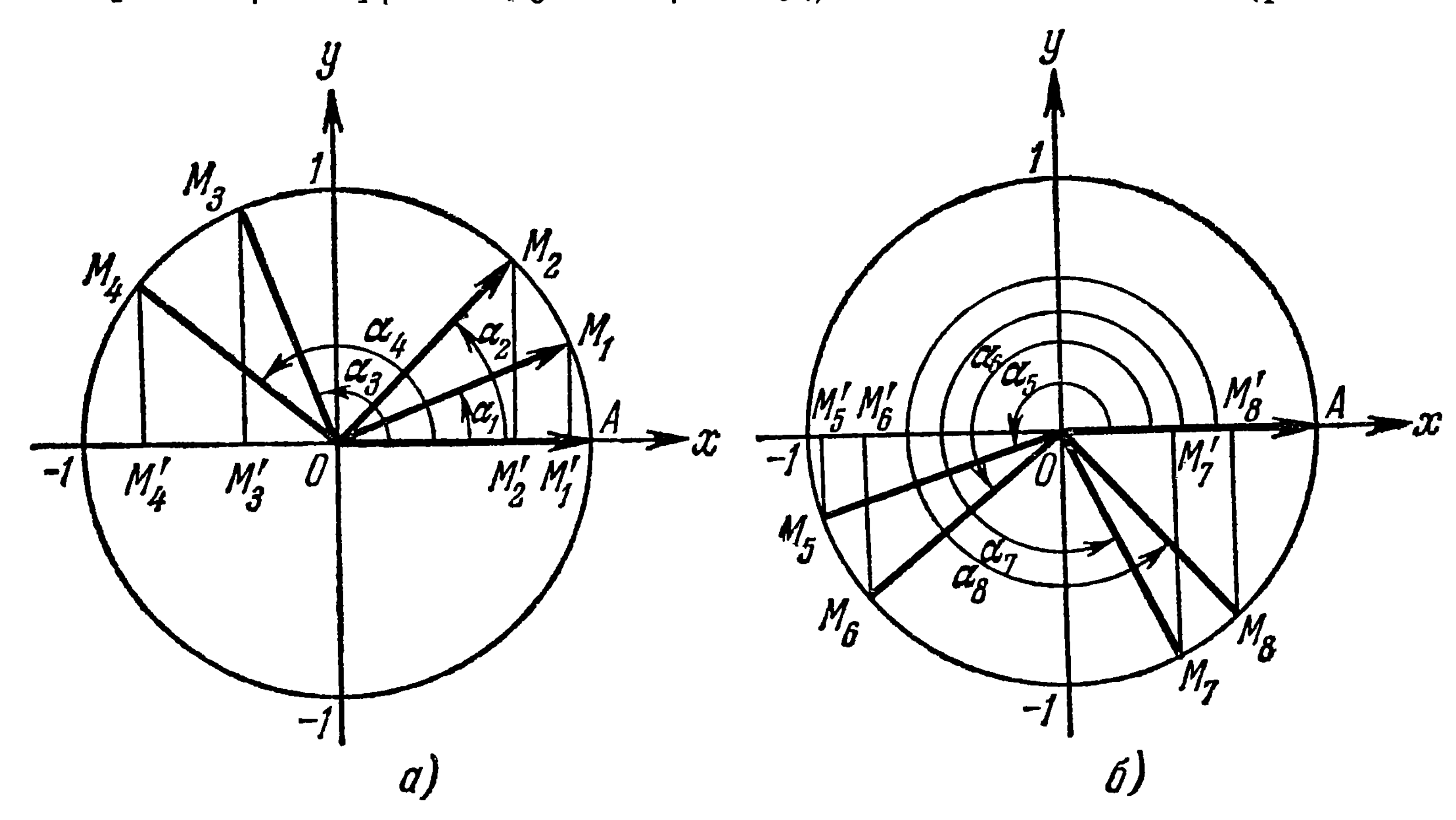


Рис. 92.

3) $\pi \leqslant \alpha \leqslant 3\pi/2$ (третья четверть). Для углов α_5 и α_6, удовлетворяющих неравенствам $\pi \leqslant \alpha_5 < \alpha_6 \leqslant 3\pi/2$ (рис. 92, *б*), выполняется неравенство $x_5 < x_6$ ($x_5 = -OM_5'$ и $x_6 = -OM_6'$), следовательно, $\cos\alpha_5 < \cos\alpha_6$. При возрастании угла α от π до $3\pi/2$ $\cos\alpha$ монотонно возрастает от -1 до 0.

4) $3\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ (четвертая четверть). При возрастании угла α ($\alpha_8 > \alpha_7$) от $3\pi/2$ до 2π $\cos\alpha$ монотонно возрастает ($x_8 > x_7$, где $x_8 = OM_8'$ и $x_7 = OM_7'$) от 0 до 1 (рис. 92, *б*).

Вывод. При любом угле α абсолютная величина $\cos\alpha$ не превосходит 1, что записывается так:

$$|\cos\alpha| \leqslant 1, \tag{98.5}$$

или в равносильной форме:

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1. \tag{98.6}$$

III. **tg** α. Тангенс угла α численно равен ординате соответствующей точки оси тангенсов (см. п. 97).

1) $0 \leqslant \alpha < \pi/2$ (первая четверть). Для углов α_1 и α_2, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2$ (рис. 93), вы-

полняется неравенство $y_2 > y_1$ ($y_1 = AM_1$ и $y_2 = AM_2$), следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_1$. При возрастании угла α от 0 до $\pi/2$ $\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно возрастает. Заметим, что $\operatorname{tg}(\pi/2)$ не существует. Если угол α приближается к $\pi/2$, оставаясь меньше $\pi/2$, то

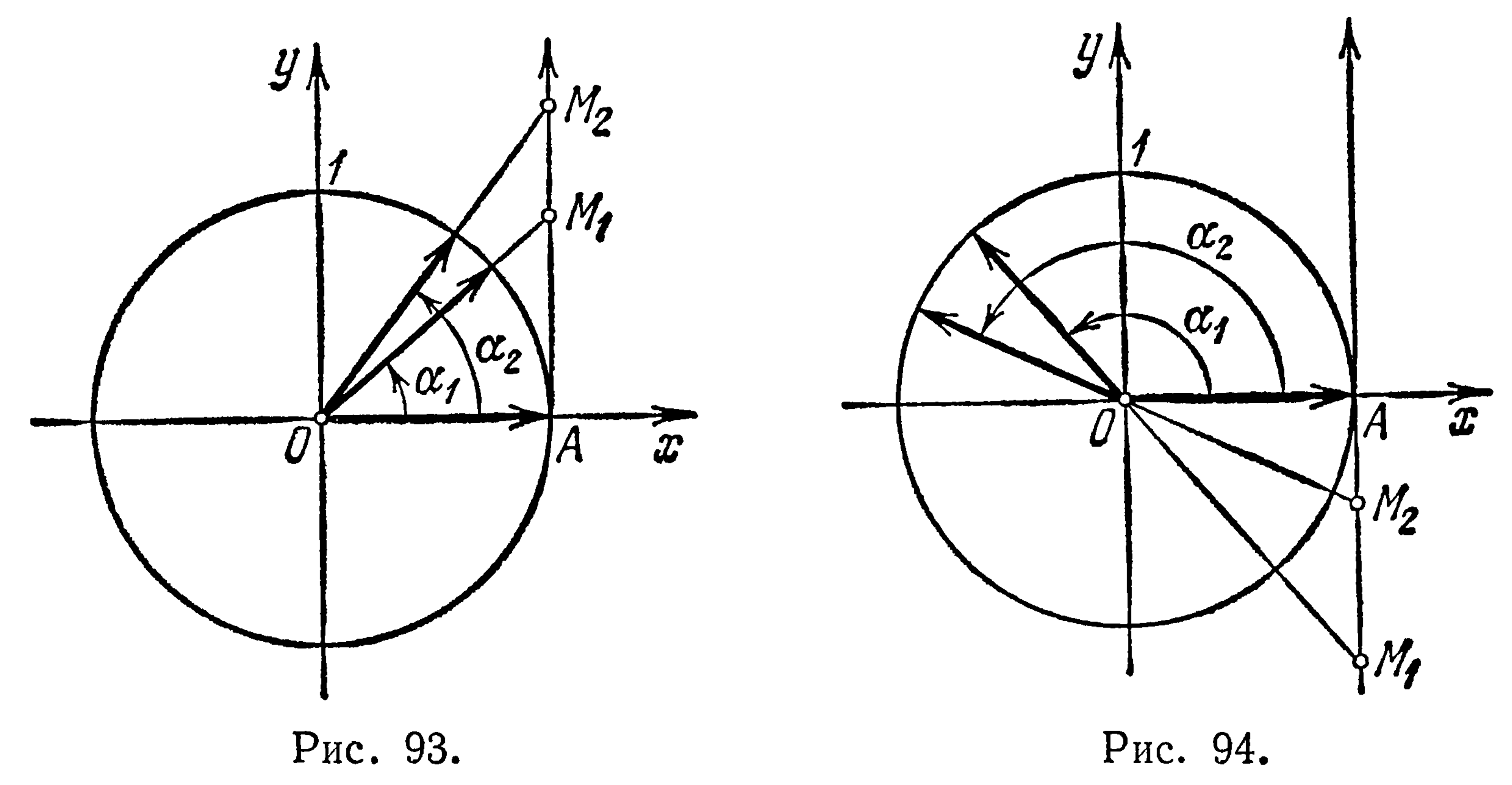


Рис. 93. Рис. 94.

$\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно возрастает ($\operatorname{tg}\alpha$ стремится к плюс бесконечности).

Сходное положение встречалось при изучении функции $y = 1/x$; если x приближается к нулю, оставаясь больше нуля, то $y = 1/x$ стремится к плюс бесконечности.

Это же условно записывают так:

$$\operatorname{tg}\alpha \to +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to \pi/2, \quad \text{где} \quad \alpha < \pi/2.$$

2) $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$ (вторая четверть). Для углов α_1 и α_2, удовлетворяющих неравенствам $\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$ (рис. 94), выполняется неравенство $y_2 > y_1$ ($y_1 = -|AM_1|$ и $y_2 = -|AM_2|$), следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_1$. При возрастании угла α от $\pi/2$ до π $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает до нуля.

Если α стремится к $\pi/2$, оставаясь больше $\pi/2$, то $\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно возрастает по абсолютной величине; оставаясь отрицательным ($\operatorname{tg}\alpha$ стремится к минус бесконечности). Это записывается так:

$$\operatorname{tg}\alpha \to -\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to \pi/2, \quad \text{где} \quad \alpha > \pi/2.$$

3) $\pi \leqslant \alpha < 3\pi/2$ (третья четверть). Тангенс ведет себя так же, как и в первой четверти, т. е. возрастает от 0 до $+\infty$. Рекомендуем читателю сделать соответствующий рисунок, аналогичный рис. 93.

Если α стремится к $3\pi/2$, оставаясь меньше $3\pi/2$, то $\operatorname{tg}\alpha$ стремится к плюс бесконечности:

$$\operatorname{tg}\alpha \to +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 3\pi/2, \quad \alpha < 3\pi/2.$$

4) $3\pi/2 < \alpha \leqslant 2\pi$ (четвертая четверть). Тангенс ведет себя так же, как и во второй четверти, т. е. возрастает от $-\infty$ до 0. Рекомендуем читателю сделать соответствующий рисунок, аналогичный рис. 94.

Если α стремится к $3\pi/2$, оставаясь больше $3\pi/2$, то $\operatorname{tg}\alpha$ стремится к минус бесконечности:

$$\operatorname{tg}\alpha \to -\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 3\pi/2, \quad \alpha > 3\pi/2.$$

IV. **$\operatorname{ctg}\alpha$.** Котангенс угла α численно равен абсциссе соответствующей точки оси котангенсов (см. п. 97).

1) $0 < \alpha \leqslant \pi/2$ (первая четверть). Для углов α_1 и α_2, удовлетворяющих неравенствам $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi/2$ (рис. 95), выполняется неравенство $x_2 < x_1$ ($x_1 = BM_1$ и $x_2 = BM_2$), следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_2 < \operatorname{ctg}\alpha_1$. При возрастании угла α от 0 до $\pi/2$

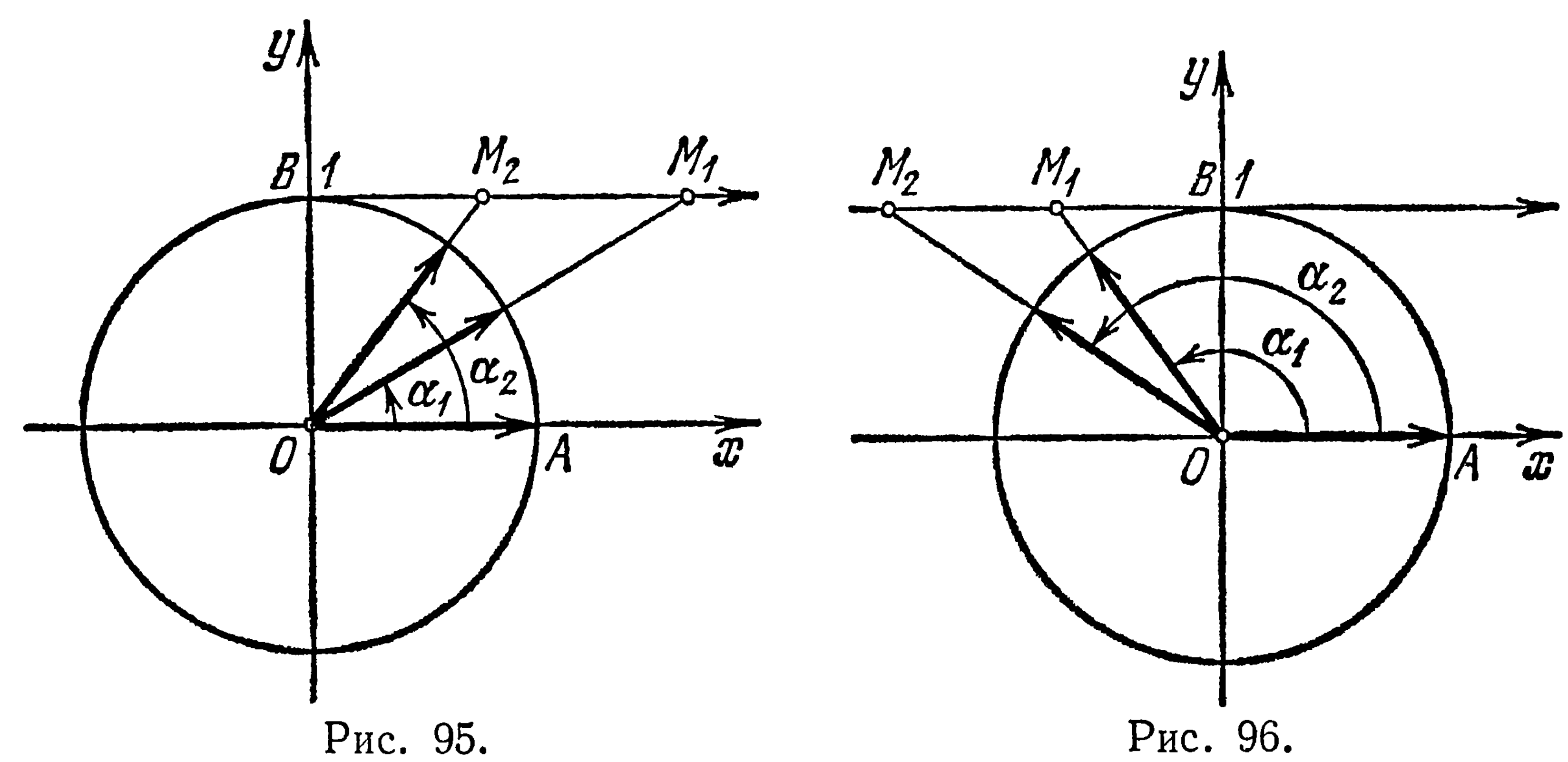


Рис. 95. Рис. 96.

$\operatorname{ctg}\alpha$ убывает до нуля. Если α стремится к нулю, оставаясь больше нуля, то $\operatorname{ctg}\alpha$ стремится к плюс бесконечности:

$$\operatorname{ctg}\alpha \to +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 0, \quad \text{где} \quad \alpha > 0.$$

2) $\pi/2 \leqslant \alpha < \pi$ (вторая четверть). Для углов α_1 и α_2, удовлетворяющих неравенствам $\pi/2 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ (рис. 96), выполняется неравенство $x_2 < x_1$ ($x_1 = -|BM_1|$ и $x_2 = -|BM_2|$), следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_2 < \operatorname{ctg}\alpha_1$. При возрастании угла α от $\pi/2$ до π $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от 0 до $-\infty$. Если α стремится к π, оставаясь меньше π, то $\operatorname{ctg}\alpha$ стремится к минус бесконечности:

$$\operatorname{ctg}\alpha \to -\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to \pi, \quad \alpha < \pi.$$

Разбор поведения $\operatorname{ctg}\alpha$ в остальных четвертях предоставляется читателю. Приведем только окончательные результаты:

3) $\pi < \alpha \leqslant 3\pi/2$ (третья четверть). $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от $+\infty$ до 0; при $\alpha \to \pi$, где $\alpha > \pi$, $\operatorname{ctg}\alpha \to +\infty$.

4) $3\pi/2 \leqslant \alpha < 2\pi$ (четвертая четверть). $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от 0 до $-\infty$; при $\alpha \to 2\pi$, где $\alpha < 2\pi$, $\operatorname{ctg}\alpha \to -\infty$.

Упражнения

1. Может ли синус угла быть равным

а) $3/5$; б) $-4/5$; в) $10/9$; г) $\sqrt{6}/2$; д) $-\sqrt{3}/2$; е) $a+1/a$, где $a \neq 0$?

2. Может ли косинус угла быть равным:

а) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})/(\sqrt{3}-1)$; б) 0,835; в) $-1/\sin 10°$; г) $\sqrt{2,8}/\sqrt[3]{2,8}$; д) $\sqrt[3]{\pi}/\sqrt{\pi}$?

3. Углом какой четверти является угол α, у которого:

а) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$; б) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$; г) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$; д) $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$; е) $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$?

4. Проследить за поведением $\sec\alpha$ при изменении угла α в пределах от 0 до 2π.

5. Проследить за поведением $\operatorname{cosec}\alpha$ при изменении угла α в пределах от 0 до 2π.

6. Может ли секанс угла быть равным: а) $-0,989$; б) $\lg 3\pi$; в) $\lg 4\pi$?

7. Может ли косеканс угла быть равным: а) $-1/\sec 20°$; б) $\pi/4$; в) $\pi/3$?

§ 3. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

99. Основные тригонометрические тождества. Между основными тригонометрическими функциями произвольного угла α имеются следующие тождественные соотношения:

1. $$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (99.1)$$

Доказательство. Принимая $|\boldsymbol{r}|=r=1$, получим (для произвольного угла α) $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, где x и y — проекции единичного радиуса-вектора на оси координат (см. рис. 85). По теореме Пифагора (см. п. 216) $|x|^2+|y|^2=1$, так как $|\boldsymbol{r}|=1$, откуда

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

2. $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (99.2)$$

где $\alpha \neq \pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

3. $$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (99.3)$$

где $\alpha \neq n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Тождества (99.2) и (99.3) служат соответственно определениями функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ (см. формулы (97.3) и (97.4)).

4. $$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}, \qquad (99.4)$$

где $\alpha \neq \pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

5. $$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}, \qquad (99.5)$$

где $\alpha \neq n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Тождества (99.4) и (99.5) служат соответственно определениями функций $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ (см. формулы (97.5) и (97.6)).

Тождества (99.1)—(99.5) назовем *основными*. При помощи этих основных тождеств выведем так называемые *дополнительные* тождества.

6. Перемножив почленно тождества (99.2) и (99.3), получим

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1, \tag{99.6}$$

где $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

7. Разделив тождество (99.1) почленно на $\cos^2\alpha$, при условии, что $\cos\alpha\neq0$, получим

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha, \tag{99.7}$$

где $\alpha\neq\pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

8. Разделив тождество (99.1) почленно на $\sin^2\alpha$, при условии, что $\sin\alpha\neq0$, получим

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha, \tag{99.8}$$

где $\alpha\neq n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

При помощи тождеств (99.1)—(99.8) можно производить преобразования различных выражений, содержащих тригонометрические функции, и получать новые тождества.

Пример 1. Доказать тождество

$$\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Решение. Заменив в левой части $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ их выражениями по формулам (99.2) и (99.3), получим

$$\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=$$
$$=\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^3\alpha+\cos\alpha\sin^2\alpha+\cos^3\alpha=$$
$$=\sin\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

После выполнения тождественных преобразований левая часть равенства совпала с правой. Исходное тождество этим доказано.

Это же тождество можно доказать и по-другому, воспользовавшись формулами (99.7) и (99.8), а затем формулами (99.4) и (99.5). Рекомендуем это сделать читателю.

Пример 2. Упростить выражение

$$A=2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha). \tag{*}$$

Решение. Используя тождество (99.1), получаем

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1,$$

откуда

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha. \tag{99.9}$$

Аналогично находим

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^4\alpha=$$
$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha. \qquad (99.10)$$

Подставив (99.9) и (99.10) в (*), будем иметь

$$A=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-1.$$

100. Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них. При помощи формул (99.1)—(99.8) можно выразить (с точностью до знака) через любую из шести тригонометрических функций угла α остальные пять функций. Мы ограничимся только функциями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

1. Выражение через $\sin\alpha$. Из тождества (99.1) находим

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (100.1)$$

Подставив найденное значение $\cos\alpha$ в тождество (99.2), получим

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \qquad (100.2)$$

где $\alpha\neq\pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

2. Выражение через $\cos\alpha$. Из тождества (99.1) находим

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (100.3)$$

Подставив найденное значение $\sin\alpha$ в тождество (99.2), получим

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \qquad (100.4)$$

где $\alpha\neq\pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

3. Выражение через $\operatorname{tg}\alpha$. Из тождества (99.7) находим $\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Подставив значение $\sec\alpha$ в тождество (99.4), получим из него

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad (100.5)$$

где $\alpha\neq\pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Далее находим

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad (100.6)$$

где $\alpha\neq\pi/2+n\pi$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

При извлечении квадратного корня знак следует выбирать в зависимости от того, в какой четверти находится угол α.

Пример 1. Известно, что $\cos\alpha=-3/5$ и $180°<\alpha<270°$. Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Угол α принадлежит третьей четверти (рис. 97), в которой $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$, $\sin\alpha<0$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4},$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующий факт:

Для того чтобы два действительных числа x и y можно было принять за $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ одного и того же угла α, необходимо и достаточно, чтобы сумма их квадратов была равна единице: $x^2+y^2=1$.

Доказательство. *Необходимость.* Если $x=\cos\alpha$ и $y=\sin\alpha$, то по тождеству (99.1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, т. е. $x^2+y^2=1$.

Достаточность. Рассмотрим радиус-вектор $\overline{OM}$ (рис. 85) с проекциями x и y. Так как по условию $x^2+y^2=1$, то длина этого вектора равна 1. Следовательно, $\overline{OM}$ — единичный радиус-вектор. Согласно первым двум формулам (97.11) $\sin\alpha=y$ и $\cos\alpha=x$, где α — угол, образованный подвижным единичным радиусом-вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением оси Ox.

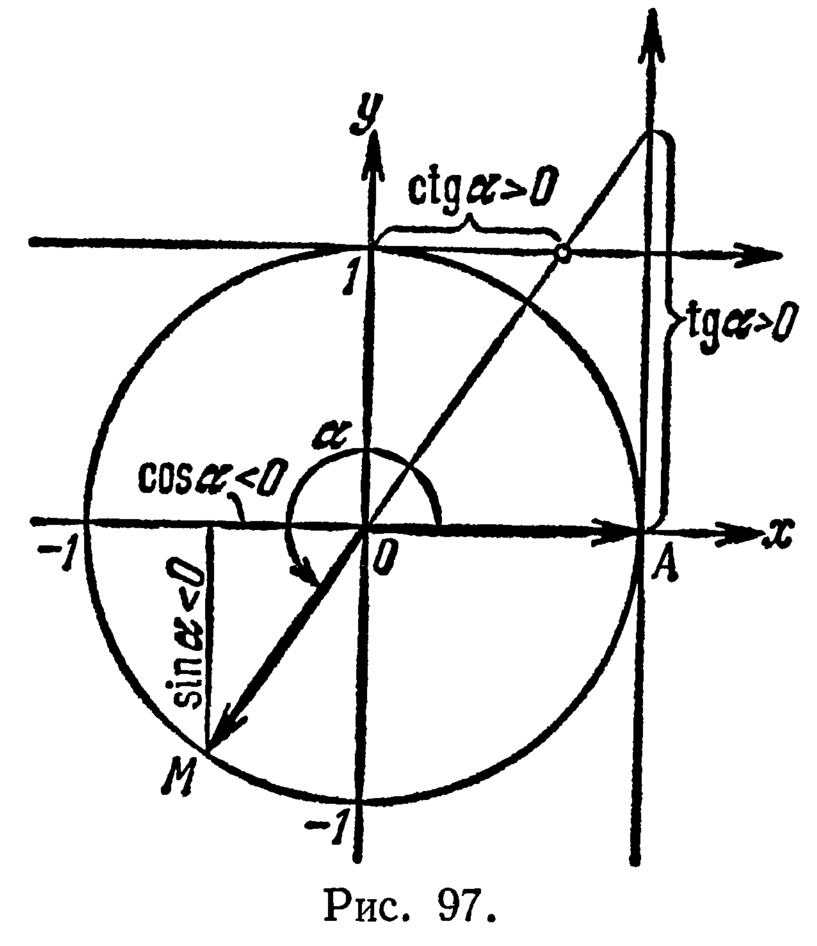


Рис. 97.

Пример 2. Могут ли $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного и того же угла α быть равными соответственно: а) $^{12}/_{13}$ и $-^{5}/_{13}$; б) $^{1}/_{3}$ и $-^{2}/_{3}$?

Решение. а) Числа $^{12}/_{13}$ и $-^{5}/_{13}$ обладают тем свойством, что $(^{12}/_{13})^2+(-^{5}/_{13})^2=1$. Следовательно, по доказанному существует такой угол α, для которого $\sin\alpha=^{12}/_{13}$ и $\cos\alpha=-^{5}/_{13}$.

б) Для чисел $^{1}/_{3}$ и $-^{2}/_{3}$ имеем $(^{1}/_{3})^2+(-^{2}/_{3})^2=^{5}/_{9}\neq 1$. Следовательно, числа $^{1}/_{3}$ и $-^{2}/_{3}$ нельзя принять за $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного и того же угла α.

101. Значения тригонометрических функций некоторых углов. Воспользовавшись сведениями из геометрии, найдем значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60° (или соответственно в радианной мере углов $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$).

1) $\alpha=\pi/6$ (рис. 98). На основании теоремы о том, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, заключаем, что

$$\sin\frac{\pi}{6}=y=\frac{1}{2}$$

(поскольку $r=1$). Воспользовавшись теперь формулами (100.1), (99.2) и (99.6), легко вычислим:

$$\cos\frac{\pi}{6}=+\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/6)}=\sqrt{3}.$$

2) $\alpha=\pi/4$ (рис. 99). В данном случае проще начинать с вычисления тангенса:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{y}{x}=1,$$

ибо $y=x$. Воспользовавшись теперь формулами (100.5), (100.6)

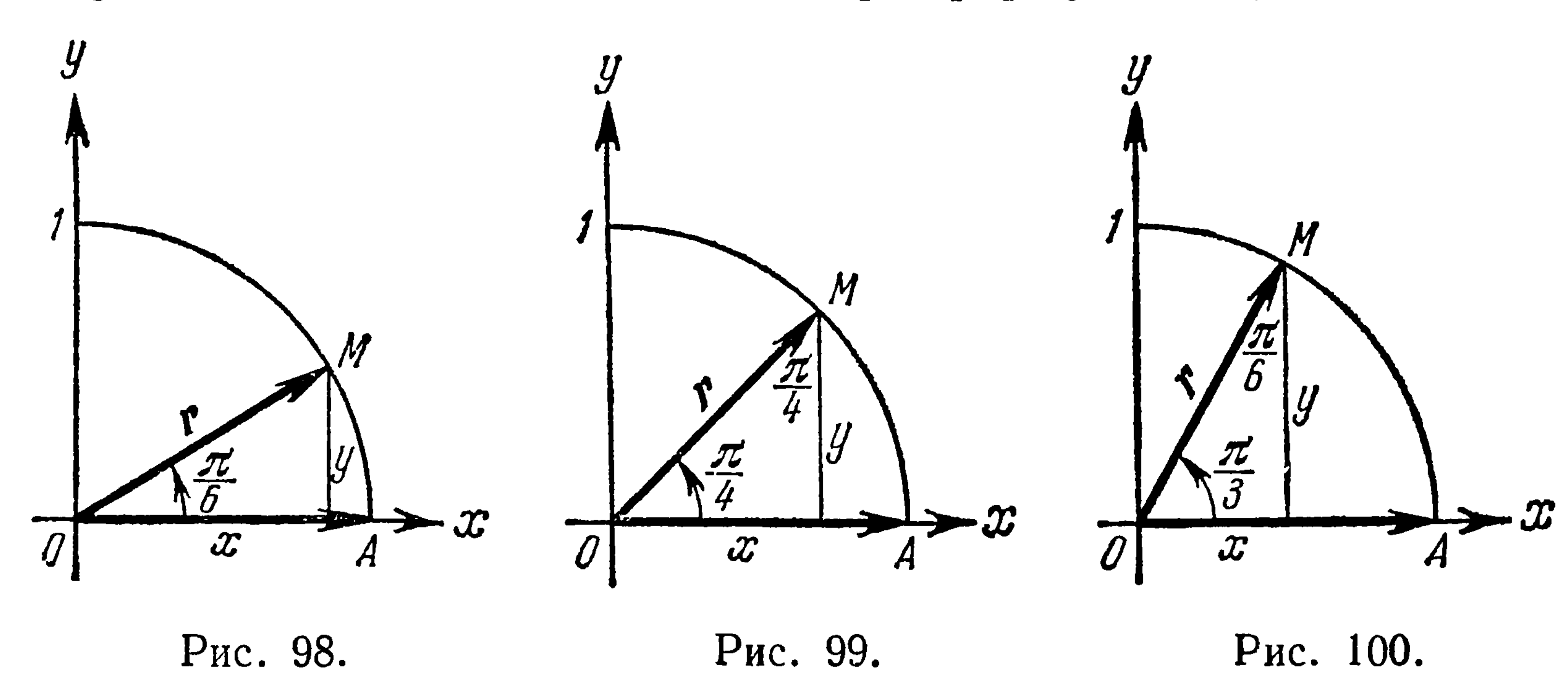


Рис. 98. Рис. 99. Рис. 100.

и (99.6), легко найдем:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

3) $\alpha=\pi/3$ (рис. 100). По определению косинуса $\cos(\pi/3)=x$. В нашем случае $x=1/2$, следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Далее воспользуемся формулами (100.3), (99.2) и (99.6):

$$\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Присоединяя к полученным результатам результаты п. 98, составим следующую таблицу значений тригонометрических функций некоторых часто встречающихся углов.

Углы α / Функции	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3}{2}\pi$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0	не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не существует	0	не существует

О поведении $\operatorname{tg}\alpha$ в окрестности $\alpha=\pi/2$, $\alpha=3\pi/2$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ в окрестности $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ и $\alpha=2\pi$ см. п. 98.

Упражнения

Доказать тождества:

1. $\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sec^2\alpha}$. 2. $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

3. $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha}$. 4. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sec^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Упростить выражения:

5. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. 6. $\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(\sec^2\alpha-1)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{cosec}^2\alpha}$.

7. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$. Найти $\sin\alpha\cos\alpha$.

8. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Найти $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

9. Доказать тождества: а) $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}=1$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

10. Получить формулы, выражающие тригонометрические функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$.

11. Дано: $\sin\alpha=4/5$ и $\pi/2<\alpha<\pi$. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

12. Могут ли синус и косинус одного и того же угла α быть равными: а) $1/4$ и $-3/4$; б) $-4/\sqrt{65}$ и $7/\sqrt{65}$?

§ 4. Четность, нечетность и периодичность тригонометрических функций

102. Четность и нечетность. Напомним (см. п. 33), что функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для всех допустимых значений аргумента x имеет место тождество

$$f(-x)\equiv f(x).$$

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для всех допустимых значений аргумента x имеет место тождество

$$f(-x)\equiv -f(x).$$

Для тригонометрических функций справедлива следующая

Теорема. *Функции* $\cos\alpha$ *и* $\sec\alpha$ *являются четными, т. е.*

$$\cos(-\alpha)\equiv\cos\alpha \quad \text{и} \quad \sec(-\alpha)\equiv\sec\alpha,$$

а функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ *и* $\operatorname{cosec}\alpha$ *являются нечетными, т. е.*

$$\sin(-\alpha)\equiv-\sin\alpha,\quad \operatorname{cosec}(-\alpha)\equiv-\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)\equiv-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(-\alpha)\equiv-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Доказательство. Рассмотрим два угла, образованных единичным радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$: $\angle AOE=\alpha$ и $\angle AOE_1=-\alpha$ (рис. 101). Заметим, что абсцисса точек E и E_1 одна и та же (x). Согласно второй формуле (97.11) имеем $\cos\alpha=x$ и $\cos(-\alpha)=x$, следовательно,

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha. \tag{102.1}$$

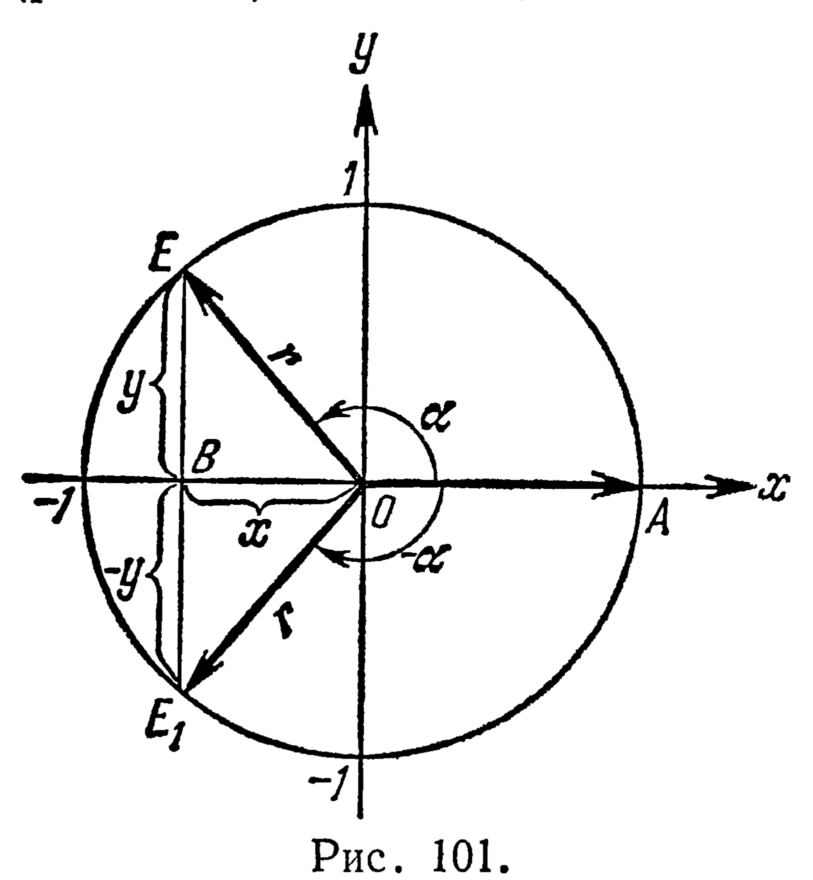


Рис. 101.

Так как равенство (102.1) справедливо для любого угла α, то мы доказали, что $\cos(-\alpha)\equiv\cos\alpha$.

Четность $\sec\alpha$ (см. формулу (99.4)) доказывается так:

$$\sec(-\alpha)=\frac{1}{\cos(-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha.$$

Итак,

$$\sec(-\alpha)=\sec\alpha. \tag{102.2}$$

Заметим, далее, что ординаты точек E и E_1 противоположны по знаку ($BE=y$, $BE_1=-y$). Согласно первой формуле (97.11) имеем $\sin\alpha=y$ и $\sin(-\alpha)=-y$, следовательно,

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha. \tag{102.3}$$

Используя формулу (99.2), а также тождества (102.1) и (102.3), получим

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha. \qquad (102.4)$$

Для доказательства нечетности $\operatorname{ctg}\alpha$ воспользуемся тождествами (99.6) и (102.4):

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)}=\frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Итак,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (102.5)$$

Рекомендуем читателю доказать, что справедливо и тождество

$$\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha. \qquad (102.6)$$

Пример. Найти значения тригонометрических функций угла $\alpha=-\pi/3$.

Решение. Используя нечетность функций $\sin\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, получим

$$\sin(-\pi/3)=-\sin(\pi/3)=-\sqrt{3}/2,$$
$$\operatorname{cosec}(-\pi/3)=-\operatorname{cosec}(\pi/3)=-2/\sqrt{3},$$
$$\operatorname{tg}(-\pi/3)=-\operatorname{tg}(\pi/3)=-\sqrt{3},$$
$$\operatorname{ctg}(-\pi/3)=-\operatorname{ctg}(\pi/3)=-1/\sqrt{3}.$$

Используя четность функций $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$, получим

$$\cos(-\pi/3)=\cos(\pi/3)=1/2, \qquad \sec(-\pi/3)=\sec(\pi/3)=2.$$

103. Понятие периодической функции. Тригонометрические функции обладают свойством периодичности, которое определяется в общей форме следующим образом.

Определение. Функция $f(x)$ называется *периодической с периодом* T $(T\neq 0)$, если для любого x выполнено условие: если функция определена в одной из точек x или $x+T$, то она определена и во второй точке, и ее значения в обеих точках равны между собой:

$$f(x)=f(x+T). \qquad (103.1)$$

Число T называется в этом случае *периодом* функции $f(x)$. Докажем следующее предложение:

Если T — период функции $f(x)$, то и любое из чисел nT, $n=-1, \pm 2, \ldots$, также является периодом $f(x)$.

Доказательство. Проведем сначала доказательство для $-T$. Для этого рассмотрим пару значений аргумента x и $x+(-T)=x-T$. Из записи

$$x=(x-T)+T$$

видно (в силу определения периодичности), что если функция определена в одной из точек $x-T$, x, то она определена и во второй точке. Далее устанавливаем равенство $f(x-T)=f(x)$:

$$f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T).$$

Доказательство того, что nT при натуральном n является периодом функции $f(x)$, проведем по индукции (случай отрицательного n сводится к этому заменой T на $-T$). Итак, требуется установить, что если $f(x)$ определена в одной из точек x, $x+nT$,

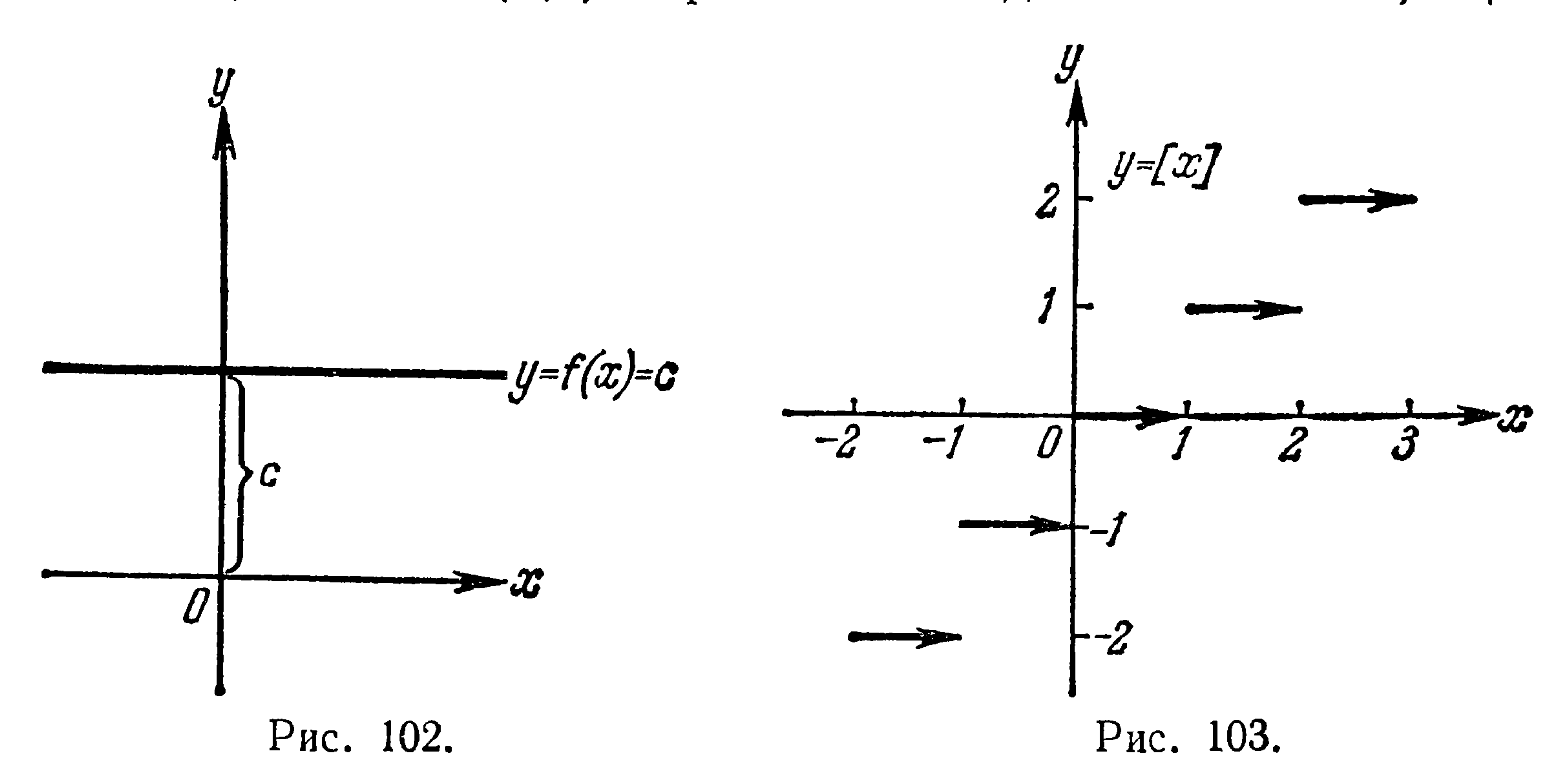


Рис. 102. Рис. 103.

то она определена и во второй точке, причем $f(x)=f(x+nT)$. Допустим, что утверждение теоремы уже доказано для некоторого $n=k$ (оно, например, очевидно при $n=1$). Докажем, что оно останется верным и для $n=k+1$. Прежде всего, в силу того, что T — период, замечаем, что если одно из значений аргумента $x+kT$ и $x+(k+1)T=(x+kT)+T$ принадлежит области определения функции, то ей принадлежит и второе значение. Так как, по предположению индукции, такое же положение справедливо и для пары точек x и $x+kT$, то видно, что точки x и $x+(k+1)T$ принадлежат (или не принадлежат) области определения $f(x)$ одновременно. Далее устанавливаем равенство значений $f(x)$ в точках x и $x+(k+1)T$:

$$f(x+(k+1)T)=f(x+kT+T)=f(x+kT)=f(x)$$

(последнее — по предположению индукции).

Доказано, что nT — период функции при любом целом n. Наименьший положительный период функции (если он существует) называется *основным периодом.*

Пример 1. Функция $f(x)=c$ (c — постоянная величина) имеет своим периодом любое число. Основного периода здесь нет. График этой функции изображен на рис. 102.

Пример 2. Напомним, что целой частью числа x (обозначение: $[x]$) называется наибольшее целое число, не превосходящее x (п. 4). Целая часть x есть функция от x; ее график показан на рис. 103.

Дробной частью числа x (обозначение: (x)) мы назвали (п. 4) разность между x и его целой частью:

$$(x) = x - [x].$$

Дробная часть x является периодической функцией с основным периодом $T = 1$. Действительно,

$$(x+1) = x+1-[x+1],$$

и так как очевидно, что $[x+1] = [x]+1$, то

$$(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x] = (x).$$

График дробной части x показан на рис. 104.

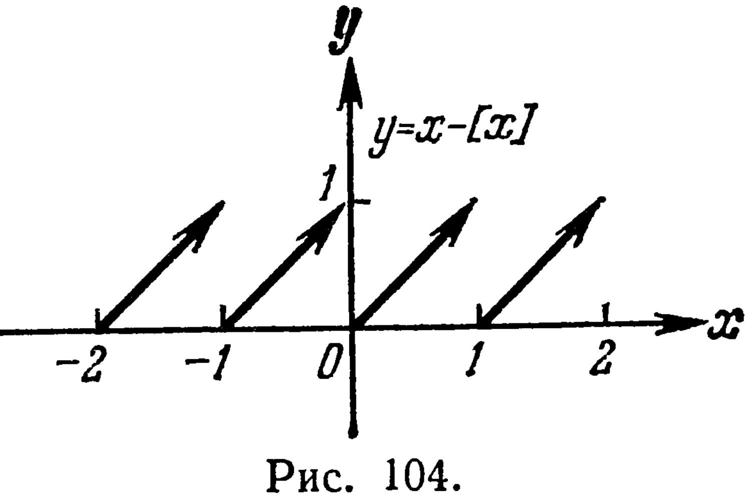


Рис. 104.

Пример 3. а) Рассмотрим следующую функцию $f(x)$, определенную для x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x < 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ {}^1/_2 & \text{при} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 105.

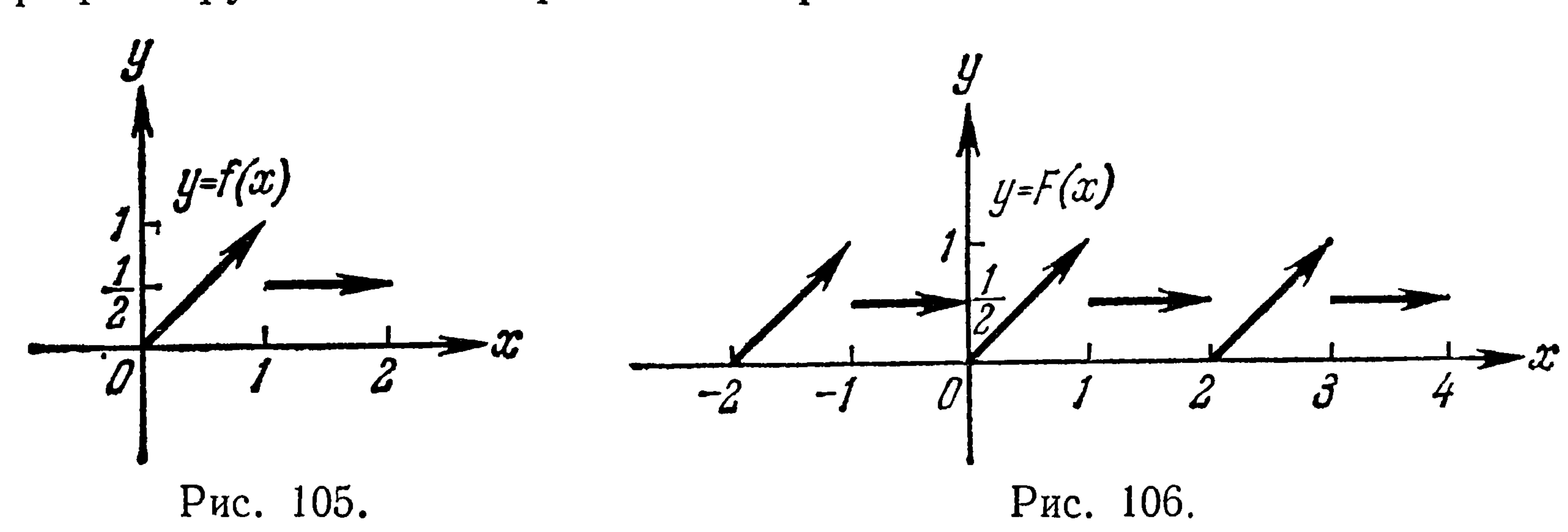


Рис. 105. Рис. 106.

б) С помощью этой функции $f(x)$, приняв за основной период число $T = 2$, построим периодическую функцию $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} x-[x] & \text{при} \quad 2n \leqslant x < 2n+1, \\ {}^1/_2 & \text{при} \quad 2n+1 \leqslant x < 2n+2, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 106.

104. Периодичность тригонометрических функций. Одним из важных свойств тригонометрических функций является свойство периодичности, с которым мы в общем виде познакомились в п. 103. Докажем следующую теорему о периодичности тригонометрических функций.

Теорема. *Тригонометрические функции* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ *и* $\operatorname{cosec}\alpha$ *являются периодическими функциями, причем основной период функций* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ *и* $\operatorname{cosec}\alpha$ *равен* 2π (360°), *а основной период функций* $\operatorname{tg}\alpha$ *и* $\operatorname{ctg}\alpha$ *равен* π (180°)[1]).

Доказательство. В пп. 95 и 96 мы ввели углы вида $\beta_n = 360^\circ n + \alpha$, где $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ и n — целое число (положительное, отрицательное или нуль). В радианной мере эти углы можно записать в виде $\beta_n = 2\pi n + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ и n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Напомним, что все углы β_n при разных значениях n, но одном и том же α имеют общие начальную $(\overline{OA})$ и конечную $(\overline{OE})$ стороны (см. п. 96). Если воспользоваться первой из формул (97.11) для определения синуса, то получим

$$\sin\beta_n = \sin(2\pi n + \alpha) = y = \sin\alpha;$$

если воспользоваться второй из формул (97.11) для определения косинуса, то получим

$$\cos\beta_n = \cos(2\pi n + \alpha) = x = \cos\alpha,$$

так как соответствующие значения x и y для угла α и углов $\beta_n = 2\pi n + \alpha$ одинаковы (рис. 107). Аналогичный результат получается и для других тригонометрических функций. Мы приходим к следующим формулам:

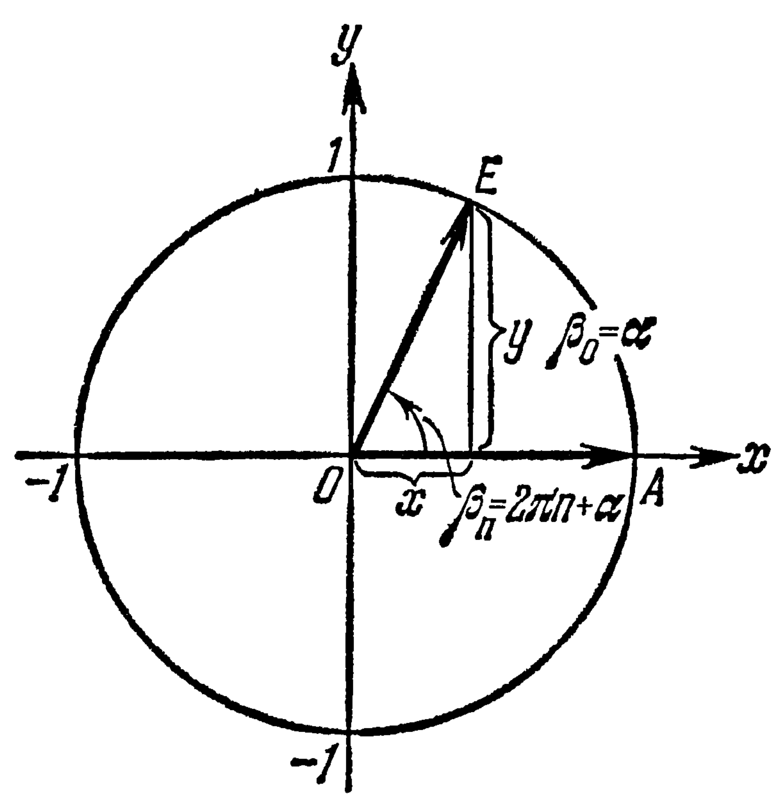


Рис. 107.

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\pi n + \alpha) &= \sin\alpha, \\ \cos(2\pi n + \alpha) &= \cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(2\pi n + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(2\pi n + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha, \\ \sec(2\pi n + \alpha) &= \sec\alpha, \\ \operatorname{cosec}(2\pi n + \alpha) &= \operatorname{cosec}\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (104.1)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Этим уже доказано, что $T = 2\pi$ является периодом для всех основных тригонометрических функций. Покажем, что для тангенса и котангенса справедливы также следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi n + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(\pi n + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (104.2)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

[1]) Пока мы рассматриваем тригонометрические функции *угла*, и период T следует рассматривать как угол; это замечание сохраняет силу вплоть до п. 107, где вводятся тригонометрические функции числового аргумента.

Рассмотрим два случая.

а) $n=2k$, т. е. n — четное число ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). В этом случае имеем

$$\operatorname{tg}(\pi n+\alpha)=\operatorname{tg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\pi n+\alpha)=\operatorname{ctg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Здесь мы использовали полученные ранее формулы (104.1).

б) $n=2k+1$, т. е. n — нечетное число ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$): В этом случае имеем

$$\operatorname{tg}(\pi n+\alpha)=\operatorname{tg}(2k\pi+\pi+\alpha)=\operatorname{tg}(\pi+\alpha),$$
$$\operatorname{ctg}(\pi n+\alpha)=\operatorname{ctg}(2k\pi+\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}(\pi+\alpha).$$

Здесь мы использовали формулы (104.1).

Из геометрических соображений (рис. 108) следует, что $y=-y_1$ и $x=-x_1$, где x и y — координаты конца подвижного единичного радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, образующего с осью абсцисс угол α, а x_1 и y_1 — координаты конца подвижного единичного радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_1$, образующего с осью абсцисс угол $\pi+\alpha$. Мы имеем

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\frac{y_1}{x_1}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогично получаем $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, при любом $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеем

$$\operatorname{tg}(\pi n+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\pi n+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

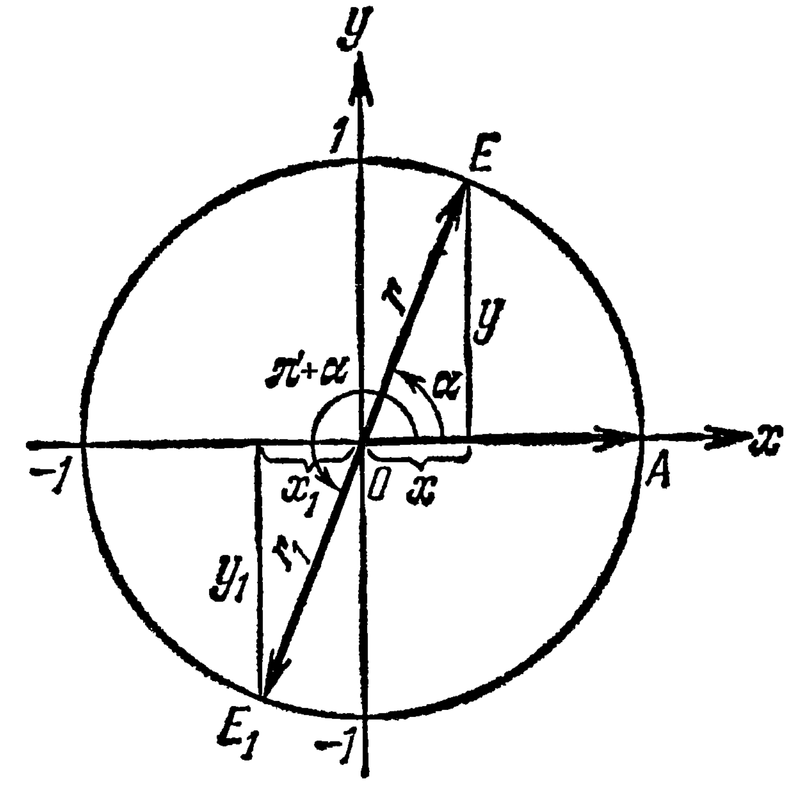


Рис. 108.

Для углов в градусной мере аналогичные формулы получим, заменив в формулах (104.1) $2\pi n$ на $360°n$ и в формулах (104.2) πn на $180°n$. Этим доказано, что π (или $180°$) — период для функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Остается доказать, что 2π — основной период для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$, а π — основной период для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Докажем это только для $\sin\alpha$, а для остальных основных пяти функций советуем это сделать читателю.

Доказательство. Требуется показать, что $T=2\pi$ — наименьший положительный угол такой, что для всех α выполняется равенство $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$. Проведем доказательство от противного. Допустим, например, что существует угол A такой, что

$$\sin(\alpha+A)\equiv\sin\alpha \quad \text{и} \quad 0<A<2\pi.$$

Так как в последнем равенстве α может быть любым (ведь это равенство, по предположению, выполняется тождественно), то

должно выполняться, например, равенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Но $\sin\alpha=1$ только для аргументов α вида $\alpha=\pi/2+2\pi n$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, должно выполняться равенство $\pi/2+A=\pi/2+2\pi n$, откуда следует, что $A=2\pi n$. Мы пришли к противоречию, предположив, что $0<A<2\pi$.

Для $\sin\alpha$ наше утверждение доказано. Аналогично оно доказывается и для других тригонометрических функций.

Упражнения

1. Угол $\alpha=-\pi/6$. Найти значения основных тригонометрических функций.

2. Угол $\alpha=-45°$. Найти значения основных тригонометрических функций.

3. Показать, что следующие функции:

а) $y=\sin^4 x$; б) $y=x^2+\operatorname{tg}^4 x$; в) $y=\dfrac{1+2\cos x}{x^6}$; г) $y=\dfrac{\cos x\sin x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}$; д) $y=\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{\sin x+\operatorname{ctg}x}$; е) $y=\dfrac{3x+2\sin x}{\operatorname{ctg}^5 x}$; ж) $y=\sin|x|$; з) $y=|\sin x|$, являются четными.

4. Показать, что следующие функции:

а) $y=\operatorname{ctg}^5 x$; б) $y=x+\operatorname{tg}x$; в) $y=\dfrac{\cos^4 x+1}{\sin^3 x}$; г) $y=-\operatorname{tg}^3 x$; д) $y=\dfrac{x^2\operatorname{tg}x}{1+\sec x}$; е) $y=\dfrac{x+\sin x}{\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$, являются нечетными.

5. Указать, какие из следующих функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y=\sin x+\operatorname{ctg}x$; б) $y=\sin x+\cos x$; в) $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$; г) $y=x^4+\sin^2 x+1$; д) $y=x^3+\sin^3 x+1$; е) $y=\lg|\sin x|$.

6. Указать периодические функции среди следующих функций:

а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\cos x^2$; в) $y=x\operatorname{tg}x$; г) $y=\cos(1/x)$; д) $y=\sin x+\cos x$; е) $y=2\operatorname{ctg}x+3$; ж) $y=-4$; з) $y=\lg\cos x$.

7. Указать основной период (если он существует) следующих функций:

а) $y=\dfrac{\sin x}{2}$; б) $y=\sin 2x$; в) $y=\sin\dfrac{x}{2}$; г) $y=\cos x+\operatorname{ctg}x$; д) $y=2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x$; е) $y=5^{\sin x}$; ж) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; з) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; и) $y=\sin x+\sin\dfrac{x}{3}$; к) $y=\sin x+\sin\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{5}$; л) $y=7$; м) $y=\cos 2\pi x$.

§ 5. Формулы приведения

105. Зависимость между тригонометрическими функциями дополнительных углов. Углы α и β назовем *дополнительными до* $\pi/2$, если $\alpha+\beta=\pi/2$. *Сходными* (по названию) тригонометрическими функциями будем соответственно называть синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс.

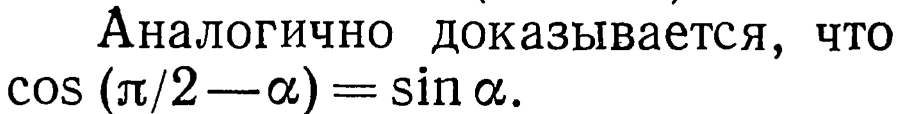
Теорема. *Сходные тригонометрические функции дополнительных углов равны между собой.*

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad (105.1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (105.2)$$

Предположим для определенности, что $\pi/2<\alpha<\pi$; тогда угол $\beta=\pi/2-\alpha$ удовлетворяет неравенствам $-\pi/2<\beta<0$. Построим теперь с помощью подвижного единичного радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ углы $AOE=\alpha$ и $AOE_1=-\beta>0$ (рис. 109). Заметим, что $\triangle B_1OE_1=\triangle BEO$ (они прямоугольные, имеют равные гипотенузы $|\overline{OE}|=|\overline{OE_1}|$ и равные острые углы: $\angle BEO=\alpha-\pi/2=-\beta=\angle B_1OE_1$). Из равенства треугольников имеем $-x=y_1$ и $x_1=y$. Следовательно, $\sin(-\beta)=\sin(\alpha-\pi/2)=y_1=-x=-\cos\alpha$, откуда $\sin(\alpha-\pi/2)=-\cos\alpha$, но в силу нечетности синуса $\sin(\alpha-\pi/2)=-\sin(\pi/2-\alpha)$, и мы имеем $\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$.


Аналогично доказывается, что $\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$.

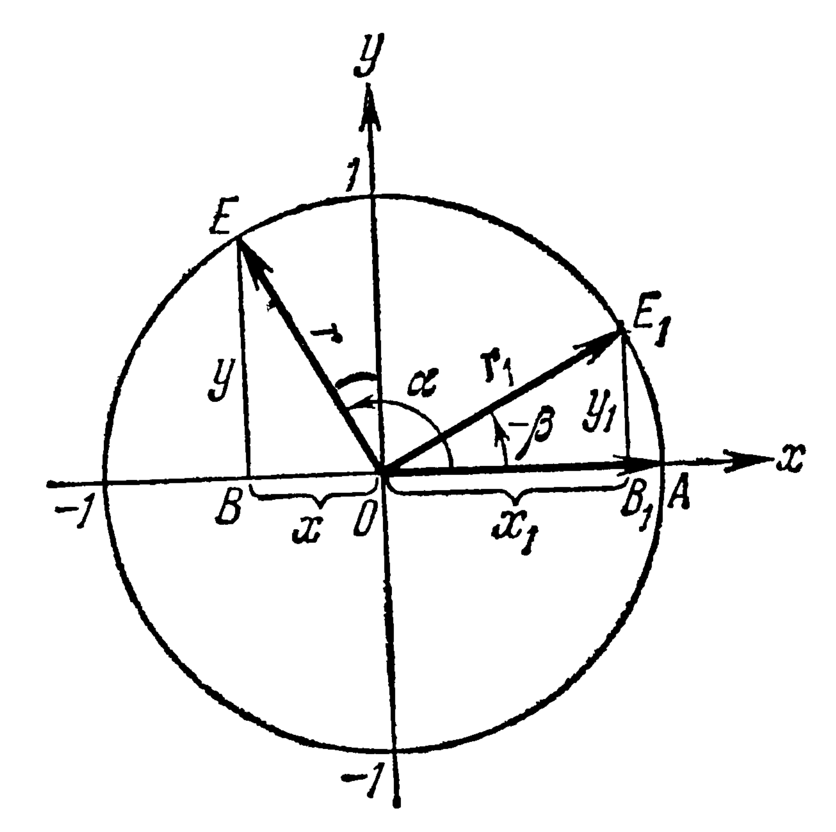


Рис. 109.

Для остальных функций можно доказательство вести так:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin(\pi/2-\alpha)}{\cos(\pi/2-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha, \qquad (105.3)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos(\pi/2-\alpha)}{\sin(\pi/2-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (105.4)$$

При выводе формул (105.3) и (105.4) мы пользовались только что доказанными формулами (105.1) и (105.2).

Замечание 1. При доказательстве теоремы мы считали, что угол α задан в радианах. Соответствующие формулы для угла α, измеренного в градусной мере, легко получить из формул (105.1)—(105.4), заменив $\pi/2$ на 90°.

Замечание 2. При доказательстве теоремы мы предположили для определенности, что угол α удовлетворяет неравенствам $\pi/2<\alpha<\pi$. Можно показать, что теорема остается в силе и в случае любого угла α (как положительного, так и отрицательного).

Пример. Заменить данные тригонометрические функции тригонометрическими функциями дополнительного угла:

1. $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

2. $\operatorname{tg} 18^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 18^\circ) = \operatorname{ctg} 72^\circ$.
3. $\operatorname{ctg} 31^\circ 29'32'' = \operatorname{tg}(90^\circ - 31^\circ 29'32'') = \operatorname{tg} 58^\circ 30'28''$.

106. Формулы приведения. *Формулами приведения* называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $-\alpha$, $\pi/2 \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $3\pi/2 \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через тригонометрические функции угла α, где α — произвольный (допустимый) угол. Сами тригонометрические функции этих углов будем называть *приводимыми тригонометрическими функциями*. Будем говорить для краткости, что углы $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ образованы откладыванием угла α от оси Ox (от горизонтальной оси), а углы $\pi/2 \pm \alpha$ и $3\pi/2 \pm \alpha$ образованы откладыванием угла α от оси Oy (от вертикальной оси).

Пользуясь возможностью произвольного выбора угла α в формулах (105.1)—(105.4), получим новые важные формулы (мы ограничимся функциями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

а) Заменив в формулах (105.1)—(105.4) α на $-\alpha$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.1)$$

б) Заменив в формулах (106.1) α на $\pi/2+\alpha$, а следовательно, $\pi/2+\alpha$ на $\pi+\alpha$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha, \\ \cos(\pi+\alpha) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (106.2)$$

(мы снова воспользовались тем, что формулы (106.1) справедливы для произвольного угла α). Так как π является основным периодом для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ (см. п. 104), то

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(\pi+\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.3)$$

в) Аналогично получим

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right] = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \\ \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right] = -\sin(\pi+\alpha) = \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.4)$$

Рекомендуем читателю доказать, что

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= -\operatorname{ctg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= -\operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.5)$$

г) Заменив в формулах (106.2) и (106.3) α на $-\alpha$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha, & \operatorname{tg}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha, \\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha, & \operatorname{ctg}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.6)$$

д) Заменив в формулах (106.4) и (106.5) α на $-\alpha$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= -\cos\alpha, & \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= \operatorname{ctg}\alpha, \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= -\sin\alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.7)$$

е) В силу того, что 2π является периодом для всех основных тригонометрических функций, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\pi-\alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \\ \cos(2\pi-\alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(2\pi-\alpha) &= \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha) &= \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.8)$$

ж) Аналогично е), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\pi+\alpha) &= \sin\alpha, & \operatorname{tg}(2\pi+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \cos(2\pi+\alpha) &= \cos\alpha, & \operatorname{ctg}(2\pi+\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (106.9)$$

Рекомендуем читателю написать формулы, аналогичные формулам (106.1)—(106.8), для углов в градусной мере, заменив в последних $\pi/2$ на $90°$, π на $180°$, $3\pi/2$ на $270°$ и 2π на $360°$.

Пример 1. Пользуясь формулами приведения, найти значения следующих тригонометрических функций (или выразить их через значения тригонометрических функций острых углов): а) $\sin(2\pi/3)$; б) $\cos 91°10'52''$; в) $\operatorname{ctg} 182°12'46''$.

Решение. а) $\sin(2\pi/3)=\sin(\pi/2+\pi/6)=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$;
б) $\cos 91°10'52''=\cos(90°+1°10'52'')=-\sin 1°10'52''$;
в) $\operatorname{ctg} 182°12'46''=\operatorname{ctg}(180°+2°12'46'')=\operatorname{ctg} 2°12'46''$.

Пример 2. Найти $\operatorname{tg}(3\pi/2-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}9$.

Решение. $\operatorname{tg}(3\pi/2-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha=1/\operatorname{tg}\alpha=10/9$.

Сформулируем теперь общее правило приведения:

1) *если угол α откладывается от вертикальной оси (углы $\pi/2\pm\alpha$, $3\pi/2\pm\alpha$), то название приводимой функции меняется на сходное; если же угол α откладывается от горизонтальной оси (углы $-\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$), то название приводимой функции сохраняется;*

2) *если приводимая функция имеет отрицательное значение, то нужно соответствующую функцию угла* α *взять со знаком минус; если же приводимая функция имеет неотрицательное значение, то нужно соответствующую функцию угла* α *взять со знаком плюс.*

Проиллюстрируем это правило на примере угла $\beta=\pi+\alpha$. Заметим еще раз, что правило приведения справедливо для любого угла α, но для простоты запоминания и иллюстрации этого правила мы считаем α острым положительным углом.

Итак, на рис. 110 угол $\beta=\pi+\alpha=\angle AOE$. Требуется выразить тригонометрические функции угла $\pi+\alpha$ через тригонометрические функции острого положительного угла α. Заметим,

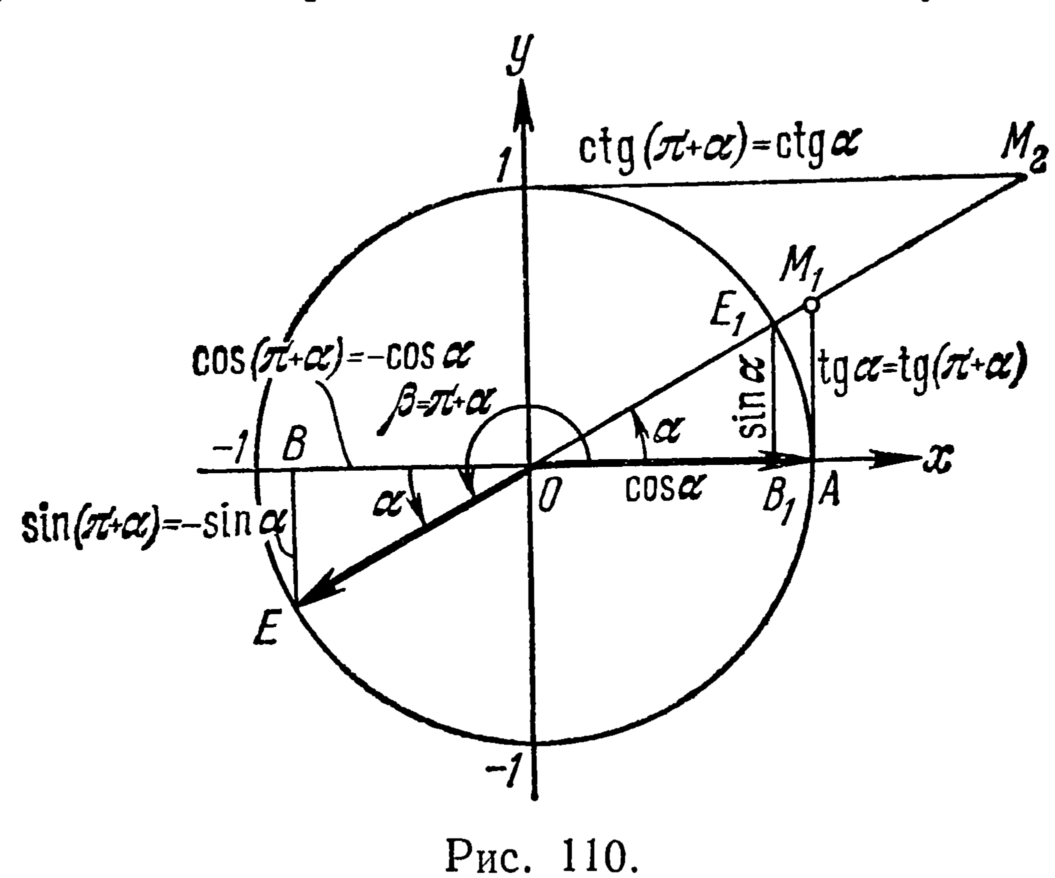


Рис. 110.

что угол $\alpha=\angle BOE=\angle AOE_1$. Согласно правилу приведения нужно выяснить:

1) соответствующие названия тригонометрических функций;
2) знаки приводимых тригонометрических функций.

1) Так как угол α откладывается от горизонтальной оси (угол β имеет вид $\pi+\alpha$), то названия приводимых функций сохраняются.

2) $\sin\beta<0$, $\cos\beta<0$.

Учитывая 1) и 2), имеем

$$\sin\beta=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos\beta=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;$$

так как $\operatorname{tg}\beta>0$ и $\operatorname{ctg}\beta>0$, то

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Мы пришли к формулам (106.2) и (106.3). Рекомендуем читателю проиллюстрировать на чертеже типа рис. 110 правило приведе-

ния для остальных углов ($-\alpha$, $\pi/2\pm\alpha$, $\pi-\alpha$, $3\pi/2\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$). Мы формулировали определения и правило для случаев, когда углы измерялись в радианах, но все остается в силе, если всюду заменить $\pi/2$ на 90°, π на 180°, $3\pi/2$ на 270°, 2π на 360°, а угол α считать заданным в градусной мере.

Объединим полученные для формул приведения результаты в следующую таблицу.

Углы / Функции	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90^\circ-\alpha)$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90^\circ+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180^\circ-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180^\circ+\alpha)$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$ $(270^\circ-\alpha)$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$ $(270^\circ+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360^\circ-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360^\circ+\alpha)$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Для произвольного угла $\beta=\beta_n=360^\circ\,n+\alpha$, где $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$ (см. формулу (96.1)), или $\beta=\beta_n=2\pi n+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<2\pi$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, если угол дан в радианах, задача отыскания $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$ с помощью формул (104.1) и (104.2) сводится к отысканию тригонометрических функций угла α.

Пример 3. Дан угол $\beta=13\pi/3$. Найти $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

Решение. Представим данный угол в виде $\beta=\beta_2=2\cdot2\pi+$ $+\pi/3$. Применив формулы (104.1) и (104.2), получим

$$\sin\frac{13\pi}{3}=\sin\left(2\cdot2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{13\pi}{3}=\cos\left(2\cdot2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Заметим, что тангенс и котангенс можно было бы вычислить и так:

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}=\frac{\sin(13\pi/3)}{\cos(13\pi/3)}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{3}=\frac{1}{\operatorname{tg}(13\pi/3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 4. Найти $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$, если $\beta=-1050°$.

Решение. Представим данный угол в виде

$$\beta=\beta_{-3}=360°(-3)+30°.$$

Применив формулы (104.1), получим

$$\sin(-1050°)=\sin[360°\cdot(-3)+30°]=\sin 30°={}^1/_2,$$
$$\cos(-1050°)=\cos[360°\cdot(-3)+30°]=\cos 30°=\sqrt{3}/2.$$

Тангенс и котангенс найдем следующим образом:

$$\operatorname{tg}(-1050°)=\frac{\sin(-1050°)}{\cos(-1050°)}=\frac{{}^1/_2}{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\operatorname{ctg}(-1050°)=\frac{\cos(-1050°)}{\sin(-1050°)}=\frac{\sqrt{3}/2}{{}^1/_2}=\sqrt{3}.$$

Пример 5. Имеем угол $\beta=-960°$. Найти $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

Решение. Представим данный угол в виде $\beta=\beta_{-3}=360°\times\times(-3)+120°$. Применив формулы (104.1) и (106.1), получим

$$\sin(-960°)=\sin[360°\cdot(-3)+120°]=\sin 120°=$$
$$=\sin(90°+30°)=\cos 30°=\sqrt{3}/2,$$
$$\cos(-960°)=\cos[360°\cdot(-3)+120°]=\cos 120°=$$
$$=\cos(90°+30°)=-\sin 30°=-{}^1/_2,$$
$$\operatorname{tg}(-960°)=\frac{\sin(-960°)}{\cos(-960°)}=\frac{\sqrt{3}/2}{-{}^1/_2}=-\sqrt{3},$$
$$\operatorname{ctg}(-960°)=1/\operatorname{tg}(-960°)=-1/\sqrt{3}.$$

Пример 6. Найти $\operatorname{tg}(21\pi/4)$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{21\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$

Пример 7. Найти $\operatorname{ctg}1020°$.

Решение. $\operatorname{ctg}1020°=\operatorname{ctg}(180°\cdot 5+120°)=\operatorname{ctg}120°=$ $=\operatorname{ctg}(90°+30°)=-\operatorname{tg}(30°)=-1/\sqrt{3}$.

Пример 8. Доказать тождество

$$\frac{\cos^2(\pi/2+\alpha)}{\sec^2(\pi+\alpha)-1}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)}{\operatorname{cosec}^2(2\pi+\alpha)-1}=1.$$

Решение. Применив формулы приведения, получим в левой части предполагаемого тождества $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}=A$. Далее, $A=\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cos^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, т. е. левая часть равна 1. Мы пришли к верному равенству, что и доказывает наше тождество.

Упражнения

1. Заменить значения данных тригонометрических функций значениями тригонометрических функций дополнительных углов:

а) $\sin 54°$, б) $\sin(\pi/4-3\alpha)$; в) $\cos 53°$; г) $\cos(3\pi/10)$; д) $\operatorname{tg} 51°$;
е) $\operatorname{ctg}(\pi/4-\alpha/2)$; ж) $\operatorname{ctg} 36°28'46''$.

2. Найти значения следующих тригонометрических функций (или выразить их через значения тригонометрических функций острых углов):

а) $\cos(2\pi/3)$; б) $\sin 92°31'$; в) $\operatorname{ctg}(5\pi/4)$; г) $\operatorname{tg} 330°$.

3. Найти $\operatorname{ctg}(3\pi/2+\alpha)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 10/11$.

4. Вычислить:

а) $3\sin(\pi/2)+4\cos(2\pi/3)+6\sin(13\pi/6)$;

б) $2\operatorname{tg} 180° - \frac{1}{2}\sin(-270°)+\frac{1}{2}\cos 180°$.

5. Упростить выражение $\dfrac{\cos(\alpha-\pi/4)\cos(\pi/4-\alpha)}{\sin^2(\alpha+\pi/4)}$.

6. Значения данных тригонометрических функций привести к значениям тригонометрических функций неотрицательных острых углов:

а) $\cos(32\pi/3)$; б) $\sin 2760°$; в) $\operatorname{tg}(-1845°)$; г) $\operatorname{ctg} 2209°$.

7. Вычислить выражение $2\operatorname{tg} 1095°+\operatorname{ctg} 975°+\operatorname{tg}(-195°)$, зная, что $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$.

8. Доказать тождество

$$3[\sin^4(3\pi/2-\alpha)+\sin^4(3\pi+\alpha)]-2[\sin^6(\pi/2+\alpha)+\sin^6(5\pi-\alpha)]=1.$$

Глава IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА И ИХ ГРАФИКИ

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента

107. Определение. В настоящей главе мы введем *тригонометрические функции числового аргумента.* Многие вопросы математики, механики, физики и других наук приводят к тригонометрическим функциям не только угла (дуги), но и аргументов совершенно различной природы (длина, время, температура и т. д.). До сих пор под аргументом тригонометрической функции понимался угол, измеренный в градусах или радианах. Теперь мы обобщим понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса, введя их как функции числового аргумента.

Определение. *Тригонометрическими функциями числового аргумента* x называются одноименные тригонометрические функции угла, равного x радианам.

Поясним это определение на конкретных примерах.

Пример 1. Вычислим значение $\sin(\pi/4) = \sin 0{,}785\ldots$ Здесь под $\pi/4 = 0{,}785\ldots$ мы понимаем отвлеченное иррациональное число. Согласно определению $\sin(\pi/4) = \sin(\pi/4 \text{ радиан}) = \sqrt{2}/2$. Итак, $\sin(\pi/4) = \sin 0{,}785\ldots = \sqrt{2}/2$.

Пример 2. Вычислим значение $\sin 1{,}5$. Здесь под 1,5 мы понимаем отвлеченное число. Согласно определению $\sin 1{,}5 = \sin(1{,}5 \text{ радиана}) = 0{,}9975$ (см. приложение II).

Пример 3. Вычислим значение $\operatorname{tg} 1{,}3$. Аналогично предыдущему получаем $\operatorname{tg} 1{,}3 = \operatorname{tg}(1{,}3 \text{ радиана}) = 3{,}6021$ (см. приложение II).

Итак, в дальнейшем под аргументом тригонометрических функций мы будем понимать угол (дугу) или просто число в зависимости от той задачи, которую решаем. А в ряде случаев аргументом может служить величина, имеющая и другую размерность, например время и т. д. Называя аргумент углом (дугой), мы можем подразумевать под ним число, с помощью

которого он измерен в радианах. Например, вместо слов «косинус числа 10» будем говорить «косинус угла, равного 10 радианам».

108. Области определения и области изменения значений тригонометрических функций. Уточним области определения (существования) и области изменения значений тригонометрических функций, рассматриваемых как функции числового аргумента (x — число). Здесь мы существенным образом воспользуемся результатами пп. 97, 98.

1) $y = \sin x$. Так как соответствующая функция угла определена для всех углов x, то и новая функция определена для всех действительных чисел x $(-\infty < x < +\infty)$. Синус как функция угла изменяется в пределах от -1 до $+1$, следовательно, и новая функция изменяется в пределах от -1 до $+1$, т. е. она удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. (Область изменения значений функции $\sin x$ — отрезок $[-1, 1]$ оси Oy.)

Для остальных функций сообщаем просто результаты. Рассуждения аналогичны предыдущему.

2) $y = \cos x$. Область определения (существования): $-\infty < x < +\infty$. Область изменения функции: $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$.

3) $y = \operatorname{tg} x$. Область определения (существования): x — любое действительное число, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Область изменения функции: $-\infty < \operatorname{tg} x < +\infty$.

4) $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения (существования): x — любое действительное число, кроме чисел вида $x = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Область изменения функции: $-\infty < \operatorname{ctg} x < +\infty$.

Заметим, что все свойства тригонометрических функций угла (четность, нечетность, периодичность) переносятся на тригонометрические функции числового аргумента.

109. Некоторые неравенства и их следствия. Выведем теперь некоторые неравенства и их следствия.

Неравенство 1. *Для всех действительных значений x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x < \pi/2$, справедливы следующие неравенства:*

$$\sin x \leqslant x < \operatorname{tg} x. \tag{109.1}$$

Доказательство. Пусть число x удовлетворяет неравенствам $0 < x < \pi/2$. Построим окружность радиуса $OA = 1$ и в ней отложим от оси Ox центральный угол AOM, равный x радианам (рис. 111). Из чертежа видно, что площадь $\Delta\, AOM$ меньше площади сектора AOM, которая меньше площади $\Delta\, AOM_1$. Соответствующие площади равны $\frac{1}{2}\, OA \cdot BM$, $\frac{1}{2} OA^2 \cdot x$ и $\frac{1}{2} OA \cdot AM_1$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} OA \cdot BM < \frac{1}{2} OA^2 \cdot x < \frac{1}{2} OA \cdot AM_1. \tag{109.2}$$

Так как $|\overline{OA}| = OA = 1$, то $BM = \sin x$, $AM_1 = \operatorname{tg} x$, и неравенства (109.2) принимают вид

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (109.3)$$

Заметив, что $\sin 0 = \operatorname{tg} 0 = 0$, приходим к неравенствам (109.1).

Неравенство 2. *Для всех действительных значений x справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|. \qquad (109.4)$$

(Абсолютная величина функции $\sin x$ не превосходит абсолютной величины ее аргумента.)

Доказательство. 1) Если $0 \leqslant x < \pi/2$, то неравенство (109.4) справедливо на основании (109.1).

2) Если $-\pi/2 < x \leqslant 0$, то, сделав замену переменной x на y по формуле $y = -x$, получим $\sin y = \sin(-x) = -\sin x$, где y уже удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant y < \pi/2$, и для него справедливы неравенства $0 \leqslant \sin y \leqslant y$. Вернувшись к переменной x, получим $0 \leqslant \sin(-x) \leqslant -x$, или $0 \leqslant -\sin x \leqslant -x$. Последние неравенства равносильны неравенству $|\sin x| \leqslant |x|$, ибо $x \leqslant 0$.

3) Если же $|x| > \pi/2$, то и подавно $|\sin x| < |x|$, так как $|\sin x| \leqslant 1$.

Итак, мы доказали, что для всех действительных значений x справедливо неравенство (109.4).

Заметим, что только при $x = 0$ мы имеем равенство $\sin 0 = 0$.

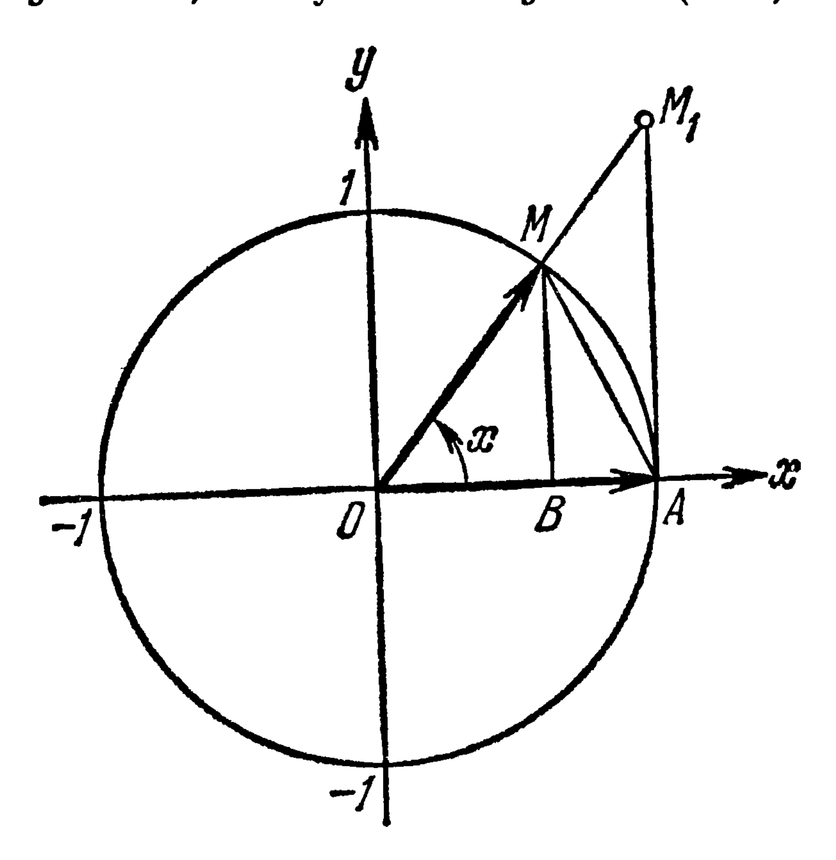


Рис. 111.

Неравенство 3. *Для всех действительных значений x справедливы неравенства*

$$0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant x^2/2 \qquad (109.5)$$

и, следовательно, неравенство

$$1 - x^2/2 \leqslant \cos x. \qquad (109.6)$$

Доказательство. По формуле (121.3) (см. стр. 306) имеем

$$0 \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

На основании неравенства (109.4) можем писать $\sin^2(x/2) \leqslant x^2/4$. Таким образом, $0 \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$, что и требовалось доказать.

Из (109.5) получим

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x. \qquad (109.6)$$

С помощью полученных неравенств изучим поведение $\cos x$, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при малых x.

Следствие 1. *При малых x*

$$\cos x \approx 1.$$

Доказательство. На основании (109.5) имеем $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant x^2/2$, а это и значит, что $\cos x \approx 1$ при малых x, причем ошибка, которую мы допускаем при замене $\cos x$ на 1, не превосходит $x^2/2$.

Пример 1. $\cos 0{,}1 \approx 1$, причем $0 \leqslant 1 - \cos 0{,}1 \leqslant 0{,}005$.

Пример 2. $\cos 0{,}4 \approx 1$, причем $0 \leqslant 1 - \cos 0{,}4 \leqslant 0{,}08$.

Следствие 2. *При малых x*

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1.$$

Доказательство. Пусть $0 < x < \pi/2$; тогда на основании (109.3) имеем

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделим теперь $\sin x$ на каждый из членов последних неравенств; получим

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (109.7)$$

Умножим все члены неравенств (109.7) на -1; получим

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x. \qquad (109.8)$$

Затем ко всем членам последних неравенств прибавим по единице, получим

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x. \qquad (109.9)$$

Применив теперь одно из неравенств (109.5), получим

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}. \qquad (109.10)$$

Мы вывели (109.10) в предположении, что $0 < x < \pi/2$. Рекомендуем читателю доказать самостоятельно, что (109.10) имеет место и при $-\pi/2 < x < 0$. Итак, при x, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \pi/2$, справедливы неравенства (109.10). А это и значит, что $(\sin x)/x \approx 1$, т. е. $\sin x \approx x$, причем ошибка, которую мы допускаем при замене $\sin x$ на x, не превосходит $|x|^3/2$. (Из (109.10) имеем $|x - \sin x| < |x|^3/2$.)

Пример 3. $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$, причем $0 < 0{,}1 - \sin 0{,}1 < 0{,}0005$.

Пример 4. $\sin 0{,}2 \approx 0{,}2$, причем $0 < 0{,}2 - \sin 0{,}2 < 0{,}004$.

Упражнения

1. Указать области определения и области изменения следующих тригонометрических функций:
а) $y = \sec x$; б) $y = \operatorname{cosec} x$.
2. Оценить ошибку, которую мы допустим, если приближенно положим:
а) $\cos 0{,}5 \approx 1$; б) $\cos 0{,}6 \approx 1$; в) $\sin 0{,}3 \approx 0{,}3$; г) $\sin 0{,}4 \approx 0{,}4$.

§ 2. Графики тригонометрических функций

110. Первоначальные сведения о таблицах тригонометрических функций. В Приложениях к настоящей книге (стр. 581—582) приведены таблицы, которые дают возможность получить значения основных тригонометрических функций с четырьмя значащими цифрами.

Приложение I. Таблица составлена для значений аргумента x в градусной мере. В графе I даются значения аргумента x° с шагом в 1° от 0° до 45°. В графе II даются соответствующие значения угла в радианной мере. Этой же графой

можно пользоваться для отыскания значений тригонометрических функций числового аргумента (см. п. 107). В графах III—VI даются соответственно значения тригонометрических функций— значения $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и $\cos x$, если $0 \leqslant x^\circ \leqslant 45^\circ$, и даются значения $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$, если $45^\circ \leqslant x^\circ \leqslant 90^\circ$ (читай внизу!). Тригонометрические функции остальных углов можно уже искать, используя всевозможные формулы приведения (см. п. 106). В графе VIII даются значения аргумента x° с шагом в 1° от 45° до 90° (читай снизу вверх!). В графе VII даются соответствующие значения угла в радианной мере (или просто числа!).

Поясним, как можно пользоваться таблицей. Итак, считаем, что, использовав соответствующие формулы приведения, мы пришли к отысканию тригонометрической функции неотрицательного угла, не большего 90°.

Пример 1. Найти $\operatorname{tg} 39^\circ$.

В графе I находим число 39. В графе IV (угол меньше 45°) находим соответствующее ему значение $\operatorname{tg} 39^\circ$, равное 0,8098. Итак, $\operatorname{tg} 39^\circ = 0,8098$.

Пример 2. Найти $\operatorname{tg} 62^\circ$.

В графе VIII находим число 62. В графе V (угол больше 45°) находим соответствующее ему значение $\operatorname{tg} 62^\circ$, равное 1,881. Итак, $\operatorname{tg} 62^\circ = 1,881$.

Приложение II. Таблица составлена для значений x в радианной мере. В графе I даются значения аргумента x с шагом 0,1 от 0 до 1,6. В графах II—IV даются соответственно значения тригонометрических функций—значения $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$. Этой же таблицей можно пользоваться для отыскания значений тригонометрических функций числового аргумента (см. п. 107). Тригонометрические функции остальных углов можно уже искать, используя всевозможные формулы приведения (см. п. 106).

Итак, допустим, что, использовав соответствующие формулы приведения, мы пришли к отысканию тригонометрической функции неотрицательного угла, не большего 1,6.

Пример 3. Найти $\cos 0,7$.

В графе I находим число 0,7. В графе III находим соответствующее ему значение $\cos 0,7$, равное 0,7648. Итак, $\cos 0,7 = 0,7648$.

Пример 4. Найти $\operatorname{tg} 1,4$.

В графе I находим число 1,4. В графе IV находим соответствующее ему значение $\operatorname{tg} 1,4$, равное 5,7979. Итак, $\operatorname{tg} 1,4 = 5,7979$.

111. Основные графики.

1. Синусоида (график функции $y = \sin x$). 1) Область определения (существования) функции:

x—любое действительное число $(-\infty < x < +\infty)$.

2) Область изменения функции:

$$-1 \leqslant y \leqslant 1.$$

3) Периодичность функции:

$\sin x$ — периодическая функция с основным периодом, равным 2π.

4) Четность функции:

$\sin x$ — нечетная функция, ибо $\sin(-x) = -\sin x$.

На основании пп. 3) и 4) достаточно построить график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$, а затем продолжить его нечетно на отрезок $[-\pi, 0]$ и, наконец, то, что получится на отрезке $[-\pi, \pi]$, продолжить периодически на всю числовую ось. Итак, в дальнейшем будем изучать поведение нашей функции на отрезке $[0, \pi]$.

5) Точки пересечения с осями координат:

а) с осью Oy $(x = 0)$: $y(0) = \sin 0 = 0$; график функции $y = \sin x$ проходит через начало координат;

б) с осью Ox $(y = 0)$ (нули функции).

Найдем те x, при которых $y = \sin x = 0$. Такими значениями будут числа $x_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Нас интересуют x_k из отрезка $[0, \pi]$. Такими x_k будут $x_0 = 0$ (уже найдено) и $x_1 = \pi$, а остальные нули функции расположены вне отрезка $[0, \pi]$. Следовательно, нули $\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ совпадают с концами этого отрезка.

6) Наименьшие и наибольшие значения функции на отрезке $[0, \pi]$.

Функция $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ монотонно возрастает от 0 до $+1$, а на отрезке $[\pi/2, \pi]$ монотонно убывает от $+1$ до 0 (см. п. 98). Следовательно, наименьшими значениями будут $y(0) = \sin 0 = 0$ и $y(\pi) = \sin \pi = 0$; наибольшее значение достигается в одной точке: $y(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$.

7) Интервалы знакопостоянства функции.

На исследуемом отрезке $[0, \pi]$ наша функция всюду неотрицательна, т. е. $y = \sin x \geqslant 0$.

8) На основании неравенств $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (п. 109) мы заключаем, что наша синусоида на отрезке $[0, \pi]$ должна располагаться ниже биссектрисы $y = x$ первого координатного угла. Так как при этом $x - \sin x \leqslant x^3/2$, т. е. является при малых x весьма малой величиной, то график $y = \sin x$ близок к графику $y = x$ (касается биссектрисы I координатного угла).

После того как функция исследована, приступаем к построению ее графика. Для этого найдем некоторые «опорные» точки его, а затем соединим их плавной линией с учетом свойств функции $\sin x$. Для построения некоторых «опорных» точек можно, например, применить два способа.

Первый способ. Составим таблицу значений для $\sin x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ с шагом $h=0{,}2$ с точностью до 0,01. (Длина последнего отрезка $[1{,}4;\ \pi/2]$ на оси Ox немного меньше 0,2).

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	$\pi/2$
$y=\sin x$	0	0,20	0,39	0,56	0,72	0,84	0,93	0,99	1,00

Значения для синуса взяты из таблицы тригонометрических функций (приложение II).

Второй способ. Воспользуемся геометрическими соображениями. Рассмотрим первую четверть единичной окружности (рис. 112). Разделим ее и соответствующий ей отрезок $[0, \pi/2]$

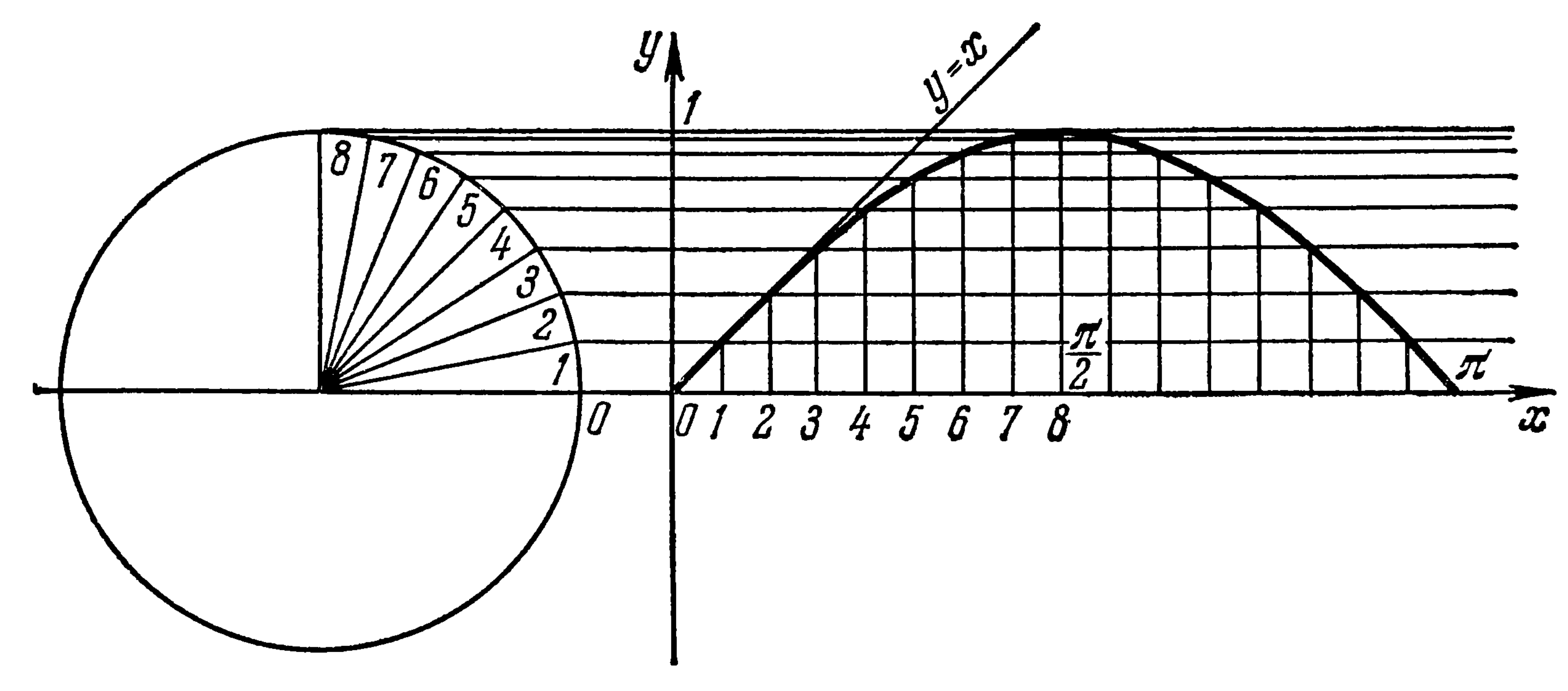


Рис. 112.

оси Ox, например, на 8 равных частей. Величина перпендикуляра, опущенного из точки деления окружности на ось Ox, численно равна значению синуса соответствующего угла и значению синуса соответствующего числового аргумента из отрезка $[0, \pi/2]$ оси Ox. Во второй четверти $(\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi)$ синус убывает от 1 до 0. На основании нашего геометрического построения можно заключить, что график синуса во второй четверти $(\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi)$ симметричен его графику в первой четверти относительно прямой $x=\pi/2$.

Соединив полученные вторым (или первым) способом «опорные» точки плавной линией, мы получим график синуса (синусоиду) на отрезке $[0, \pi]$. При проведении линии (построении графика) следует иметь в виду свойства 2), 6), 7) и 8). Затем продолжим график синуса на отрезок $[-\pi, 0]$, используя нечетность синуса, а именно построим на отрезке $[-\pi, 0]$ график, симметричный графику синуса на отрезке $[0, \pi]$ относи-

тельно начала координат. Имея график синуса, построенный на отрезке $[-\pi, \pi]$, мы, используя его периодичность, сможем продолжить его на всю числовую ось (рис. 113).

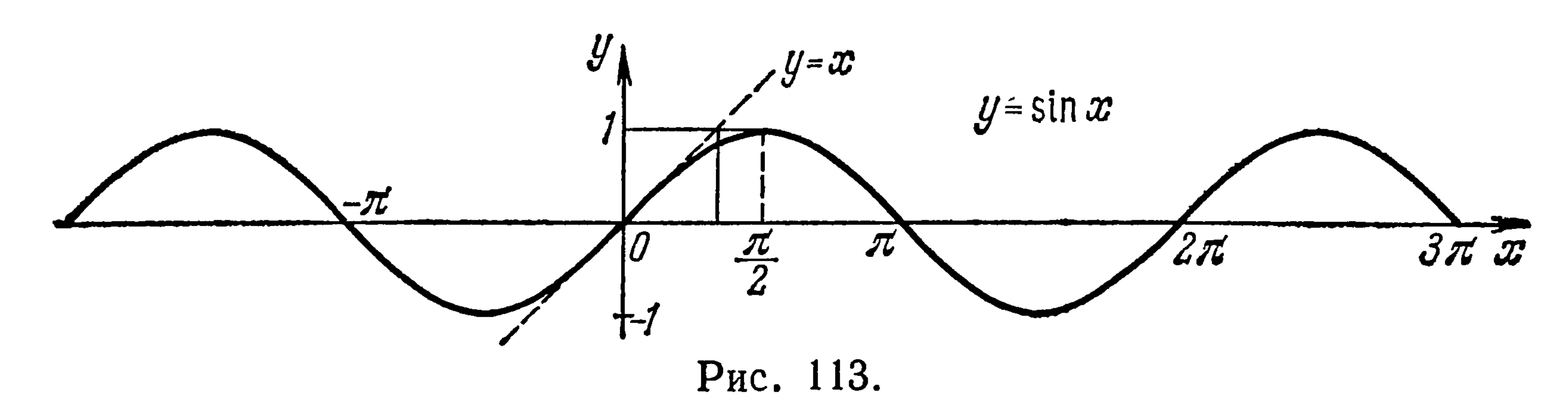


Рис. 113.

2. График функции $y = \cos x$. На основании формулы приведения мы имеем $y = \cos x = \sin(\pi/2 + x)$.

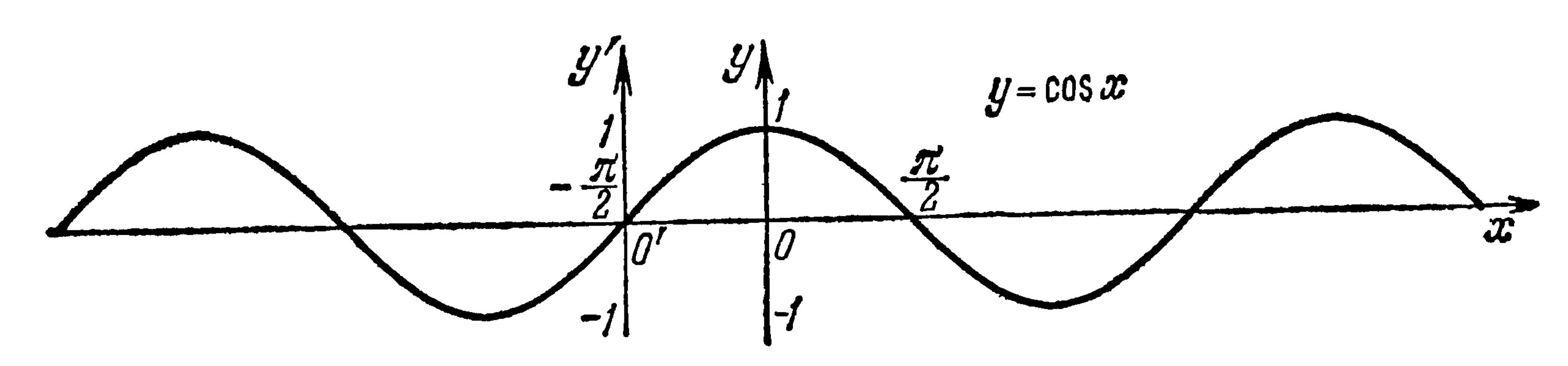


Рис. 114.

Следовательно, график косинуса — это синусоида, сдвинутая по оси Ox влево на $\pi/2$. График косинуса построен на рис. 114.

3. Тангенсоида (график функции $y = \operatorname{tg} x$). 1) Область определения функции:

x — любое действительное число, кроме чисел вида $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) Область изменения функции:

$$-\infty < y < +\infty.$$

3) Периодичность функции:

$\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом, равным π.

4) Четность функции:

$\operatorname{tg} x$ — нечетная функция, ибо $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

На основании 3) и 4) достаточно построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $[0, \pi/2]$, а далее продолжить его нечетно на отрезок $[-\pi/2, 0]$ и, наконец, то, что получится на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, продолжить периодически на всю числовую ось. Итак, в дальнейшем будем изучать поведение нашей функции на отрезке $[0, \pi/2]$.

5) Точки пересечения с осями координат:

а) с осью Oy $(x = 0)$: $y(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$; график функции $y = \operatorname{tg} x$ проходит через начало координат;

б) с осью Ox $(y = 0)$ (нули функции).

Найдем те значения x, при которых $\operatorname{tg} x = 0$. Такими значениями будут $x_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Нас интересуют x_k из отрезка $[0, \pi/2]$: $x_0 = 0$ (уже найдено), а остальные нули функции расположены вне отрезка $[0, \pi/2]$. Следовательно, единственный нуль $\operatorname{tg} x$, находящийся на отрезке $[0, \pi/2]$, совпадает с левым концом этого отрезка.

6) Вертикальные асимптоты:

$\operatorname{tg} x$ определен всюду на отрезке $[0, \pi/2]$, кроме точки $x = \pi/2$.

Так как $\operatorname{tg} x \to +\infty$ при $x \to \pi/2$, $x < \pi/2$, то прямая $x = \pi/2$ является вертикальной асимптотой для графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

7) Наименьшие и наибольшие значения функции на отрезке $[0, \pi/2]$.

На основании п. 98 функция $\operatorname{tg} x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно, наименьшее значение будет $y(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, а наибольшего значения не будет, ибо $\operatorname{tg} x \to +\infty$, когда $x \to \pi/2$, $x < \pi/2$.

8) Интервалы знакопостоянства функции.

На исследуемом отрезке $[0, \pi/2]$ функция $\operatorname{tg} x$ всюду неотрицательна, т. е. $y = \operatorname{tg} x \geqslant 0$. Следовательно, график функции лежит над осью Ox. На основании неравенств $0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$ (см. (109.1)) для $0 \leqslant x < \pi/2$ мы заключаем, что тангенсоида на отрезке $[0, \pi/2]$ должна располагаться выше биссектрисы $y = x$ первого координатного угла.

После того как функция исследована, приступаем к построению ее графика. Для этого найдем некоторые «опорные» точки его, а затем соединим их плавной линией с учетом свойств функции $\operatorname{tg} x$. Для построения «опорных» точек можно применять один из двух уже знакомых нам способов.

Первый способ. Составим таблицу значений для $\operatorname{tg} x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ с шагом $h = 0{,}2$ и с точностью до 0,01. (Длина последнего отрезка $[1{,}4; \pi/2]$ на оси Ox немного меньше 0,2.)

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	$\pi/2$
$y = \operatorname{tg} x$	0	0,20	0,42	0,68	1,03	1,56	2,57	5,80	не существует

Значения для тангенса взяты из таблицы тригонометрических функций (приложение II).

Второй способ. Воспользуемся геометрическими соображениями аналогично тому, как мы это делали в случае построения графика функции $y = \sin x$. Разделим опять первую четверть единичной окружности и соответствующий ей отрезок $[0, \pi/2]$ оси Ox, например, на 8 равных частей. На оси тангенсов получим отрезки, численно равные тангенсам соответствующих углов.

Далее, эти отрезки перенесем в соответствующие точки оси Ox. Концы их соединим плавной линией и получим график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 115). Вся тангенсоида изображена на рис. 116.

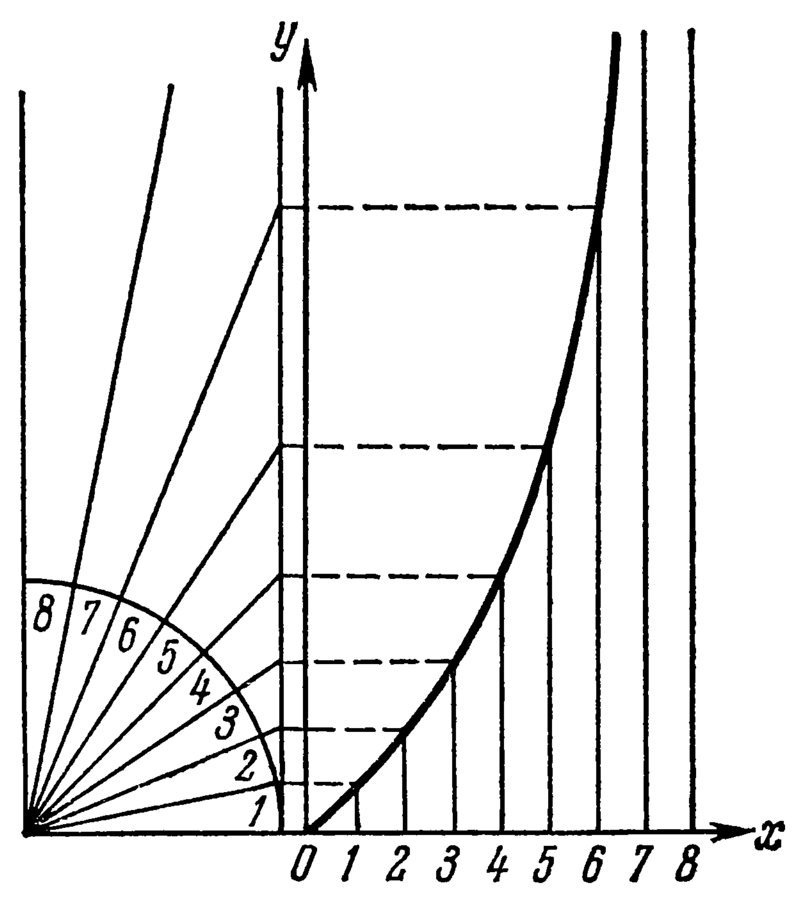


Рис. 115.

4. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рис. 117. Рекомедуем читателю самостоятельно построить его двумя способами:

1) составить таблицу значений для $\operatorname{ctg} x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ с шагом $h = 0{,}2$ и точностью до 0,01;

2) воспользоваться формулой приведения $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$.

Указания к способу 1). При составлении таблицы значений для $\operatorname{ctg} x$ воспользоваться формулой $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ и таблицей тригонометрических функций (приложение II), например: $\operatorname{ctg} 1{,}0 = 1/\operatorname{tg} 1{,}0 = 1/1{,}557 = 0{,}64$.

Указания к способу 2). 1) Построить график функции $y = \operatorname{tg} x$;

2) сдвинуть построенный график влево по оси Ox на $\pi/2$ (получим график функции $y = \operatorname{tg}(x + \pi/2)$);

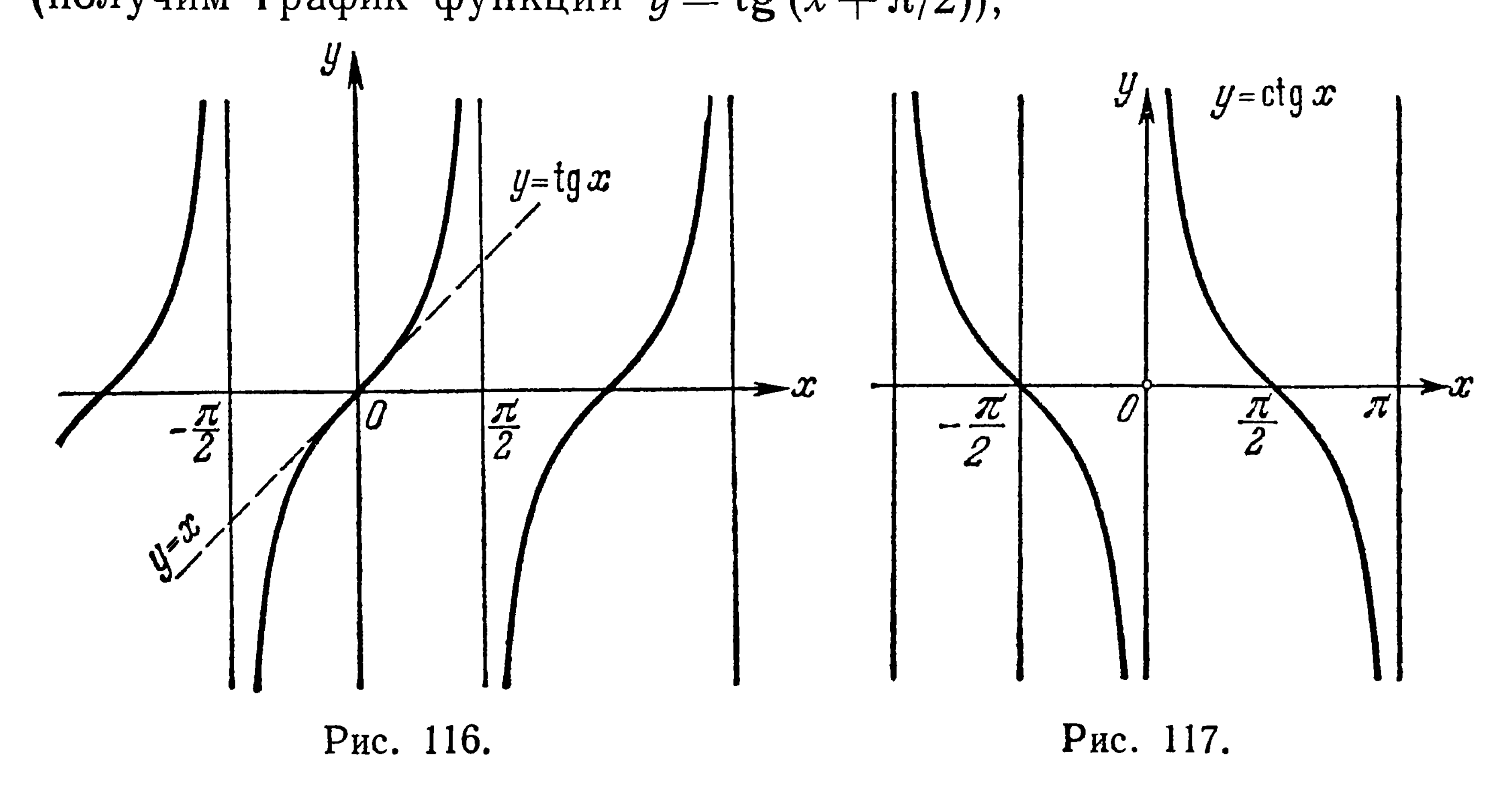


Рис. 116. Рис. 117.

3) последний график зеркально отразить (перевернуть) относительно оси Ox (после выполнения последнего действия получим график функции $y = \operatorname{ctg} x$).

112. Примеры построения графиков некоторых других тригонометрических функций. В дальнейшем мы будем коротко говорить: построить график функции $y = f(x)$, а понимать под этим

следующее: провести исследование функции $y=f(x)$ и построить ее график. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Построить график функции $y=2\sin x$.

Решение. Заметим, что график функции $y=2\sin x$ получается из графика функции $y=\sin x$, исследование которой проведено в начале п. 111, умножением каждой его ординаты на 2. Нули же функции $\sin x$ совпадают с нулями функции $2\sin x$. График функции $y=2\sin x$ изображен на рис. 118.

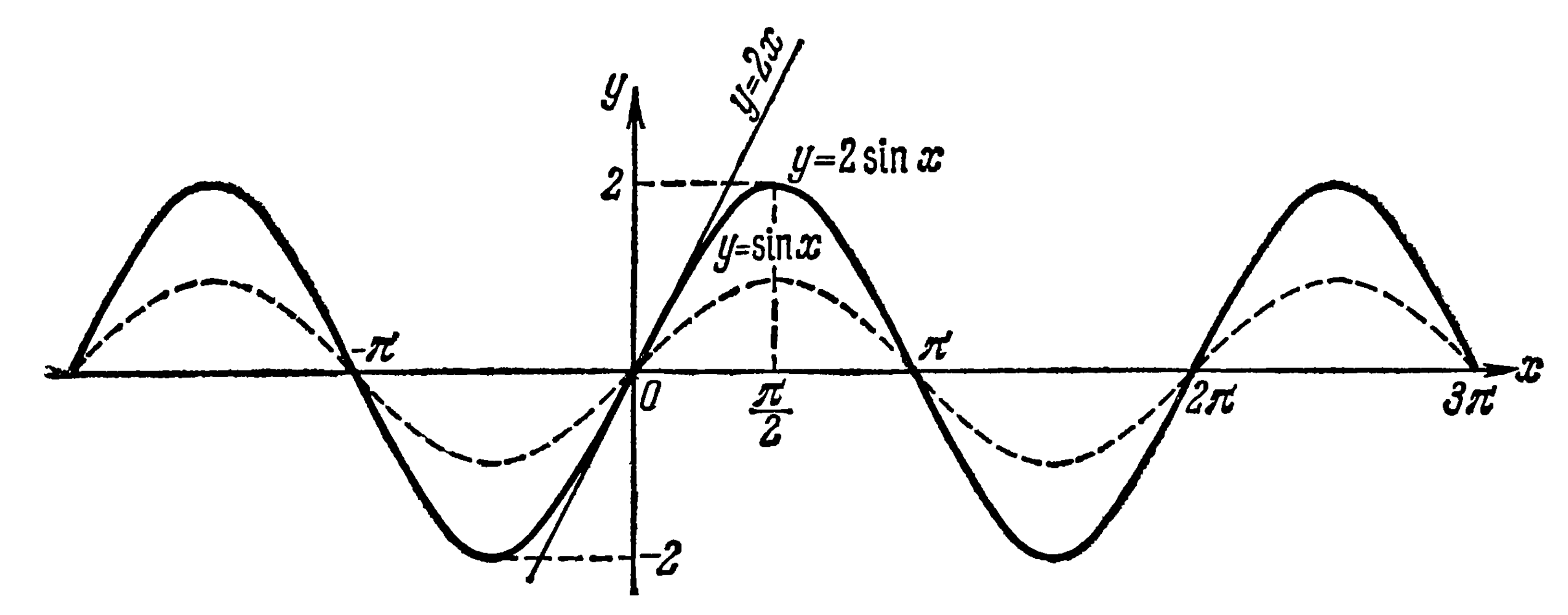


Рис. 118.

Пример 2. Построить график функции $y=\sin 2x$.

Решение. Заметим, что график функции $y=\sin 2x$ получается из графика функции $y=\sin x$ сжатием по оси Ox в два раза (см. п. 47). Основным периодом для функции $y=\sin 2x$ будет уже число π. График функции $y=\sin 2x$ изображен на рис. 119.

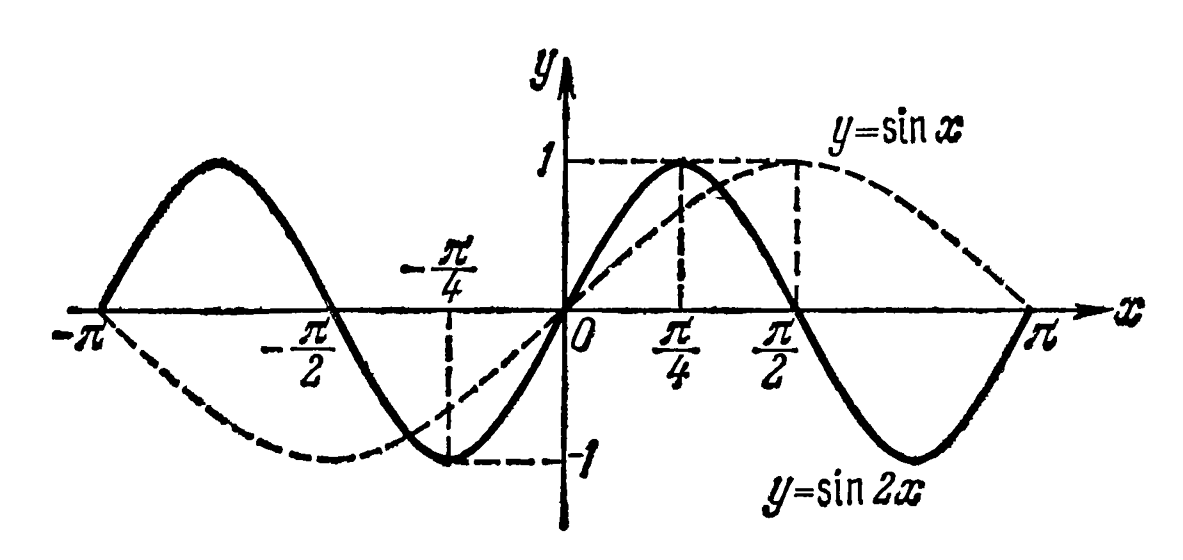


Рис. 119.

Пример 3. Построить графики функций: а) $y=\sin|x|$; б) $y=|\sin x|$.

Решение. а) Воспользуемся общим правилом (п. 48) построения графика функции $y=f(|x|)$ по графику функции $y=f(x)$: сохраняем часть графика $y=\sin x$ для $x\geqslant 0$ и зеркально отражаем ее относительно оси Oy (часть графика $y=\sin x$ для $x<0$ просто отбрасываем). Получаем график, показанный на рис. 120.

б) Снова используем результаты п. 48. Сохраняем часть синусоиды $y=\sin x$, расположенную выше оси Ox; часть синусоиды, лежащая ниже оси Ox, зеркально отражается в оси Ox. Получаем график функции $y=|\sin x|$, показанный на рис. 121.

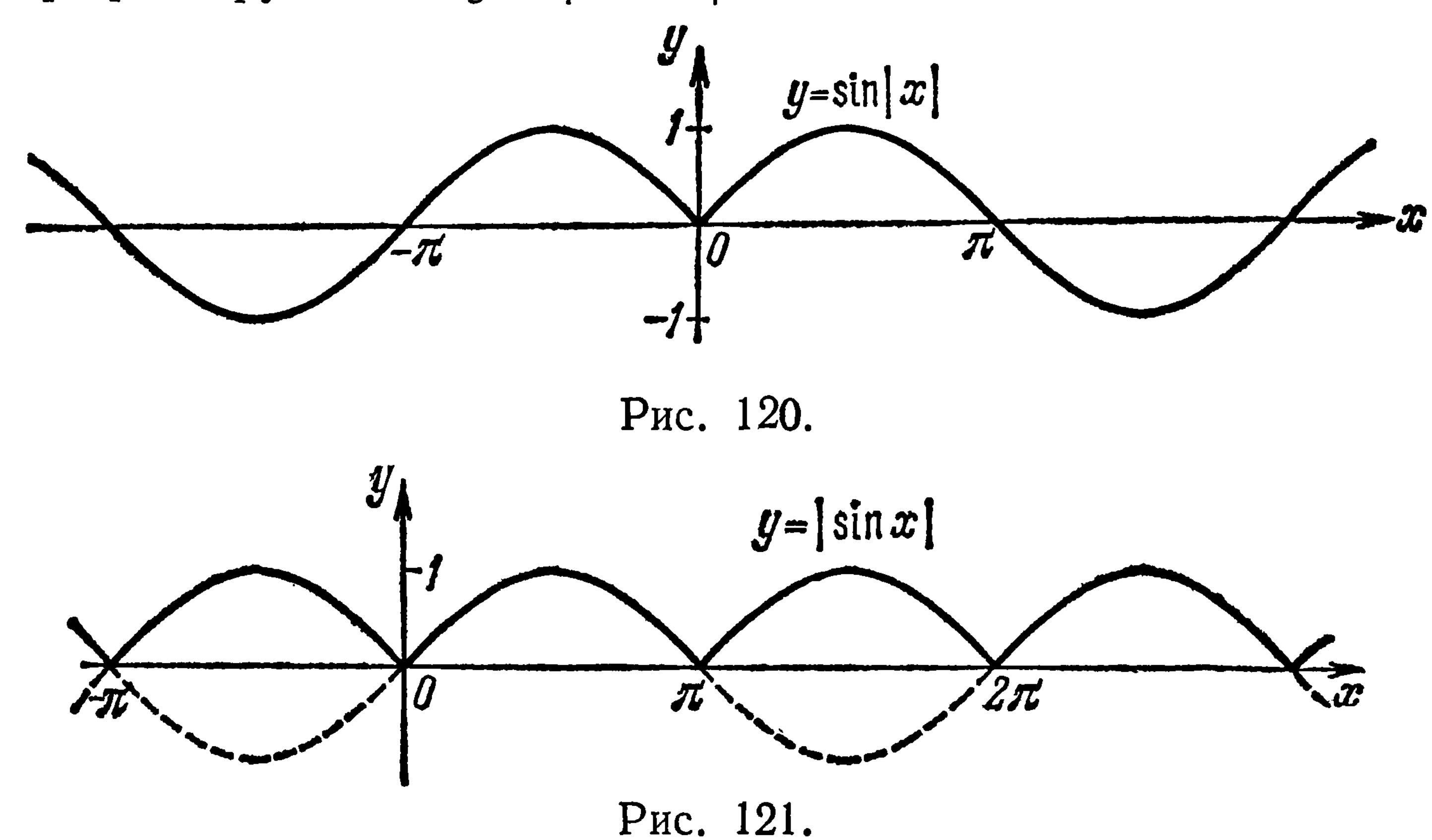


Рис. 120.

Рис. 121.

113. Дальнейшие примеры построения графиков функций.

Пример 1. Построить график функции $y=\lg\sin x$.

Решение. 1) Область определения функции.

Функция определена для тех значений аргумента x, для которых $\sin x>0$. Такие значения аргумента заключены в пределах $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) Периодичность функции.

$\sin x$ — периодическая функция с основным периодом, равным 2π. Следовательно, для тех x, для которых определена функция $y=\lg\sin x$, мы будем иметь $\lg\sin(x+2\pi)=\lg\sin x$, т. е. исследуемая функция будет иметь периодом также число 2π. Исходя из соображений периодичности, достаточно исследовать нашу функцию на любом отрезке длины 2π, например на отрезке $[0, 2\pi]$. Но на отрезке $[0, 2\pi]$ наша функция определена не всюду — она определена только в интервале $(0, \pi)$, поэтому в дальнейшем будем изучать поведение данной функции в интервале $(0, \pi)$.

3) Область изменения функции.

В интервале $(0, \pi)$ наибольшее значение, которое принимает $\sin x$, равно 1 (в точке $x=\pi/2$), а наименьшего значения нет, но при $x\to 0$, $x>0$, и $x\to\pi$, $x<\pi$, $\sin x\to 0$, оставаясь положительным. Функция $\lg\sin x$ сначала возрастает от $-\infty$ до 0 (при $0<x\leqslant\pi/2$), а затем убывает от 0 до $-\infty$ (при $\pi/2\leqslant x<\pi$). Итак, $-\infty<\lg\sin x\leqslant 0$.

4) Четность функции.

Функция $y=\lg\sin x$ ни четная, ни нечетная.

5) Точки пересечения с осями координат:

а) с осью Oy $(x=0)$; наша функция определена только в интервале $(0, \pi)$, а в точке $x=0$ она не существует, поэтому точки пересечения с осью Oy не существует;

б) с осью Ox $(y=0)$ (нули функции); наша функция обращается в нуль в единственной точке интервала $(0, \pi)$ — в точке $x=\pi/2$, а в остальных точках этого интервала она отлична от нуля.

6) Вертикальные асимптоты.

Заметим, что прямые $x=0$ и $x=\pi$ являются вертикальными асимптотами для нашей функции, ибо при $x \to 0$, $x > 0$, $y=\lg \sin x \to -\infty$ и при $x \to \pi$, $x < \pi$, $y=\lg \sin x \to -\infty$.

7) Интервалы знакопостоянства функции.

На исследуемом отрезке $[0, \pi]$ наша функция всюду неположительна, т. е. $y=\lg \sin x \leqslant 0$, ибо $0 < \sin x \leqslant 1$. Следовательно, график функции лежит под осью Ox.

8) Наименьшие и наибольшие значения функции на отрезке $[0, \pi]$.

Наибольшего значения функция достигает в единственной точке $x=\pi/2$, и это значение равно 0 $(y(\pi/2)=\lg \sin(\pi/2)=0)$. Наименьшего значения функция не имеет, ибо при $x \to 0$, $x > 0$, и при $x \to \pi$, $x < \pi$, $y=\lg \sin x \to -\infty$. График функции $y=\lg \sin x$ изображен на рис. 122.

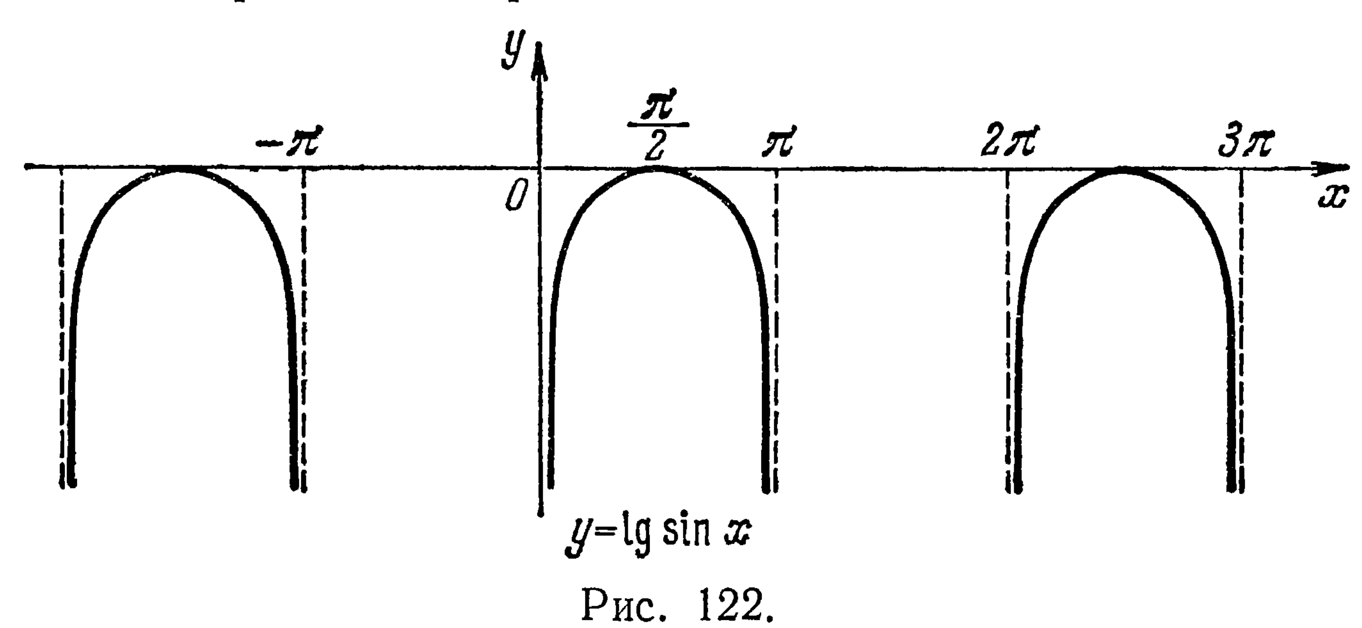


Рис. 122.

Пример 2. Построить график функции $y=x \sin 2x$.

Решение. 1) Область определения функции: x — любое действительное число.

2) Область расположения графика функции.

Заметим, что $|x \sin 2x| \leqslant |x|$ (так как $|\sin 2x| \leqslant 1$), поэтому

$$-x \leqslant x \sin 2x \leqslant x.$$

Геометрически это означает, что график функции $y=x \sin 2x$ заключен между графиками функций $y=-x$ и $y=x$.

3) Четность функции.

Данная функция, как произведение двух нечетных функций (x и $\sin 2x$), есть функция четная.

В дальнейшем будем исследовать функцию при $x \geqslant 0$.

4) Точки пересечения с осями координат:

а) с осью Oy ($x=0$); при $x=0$ мы имеем $y=0$, следовательно, график функции проходит через начало координат;

б) с осью Ox ($y=0$) (нули функции); функция обращается в нуль в точках, где $\sin 2x = 0$, т. е. в точках вида $x = \pi n/2$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

5) Точки, в которых функция принимает значения, равные x, или $-x$.

а) $x \sin 2x = x$ в точках, где $\sin 2x = 1$, т. е. в точках

$$x = \pi n + \pi/4 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) $x \sin 2x = -x$ в точках, где $\sin 2x = -1$, т. е. в точках

$$x = \pi n + 3\pi/4 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Построим график функции сначала для $x \geqslant 0$, а затем, используя четность нашей функции, отразим его зеркально в оси Oy. График функции $y = x \sin 2x$ изображен на рис. 123.

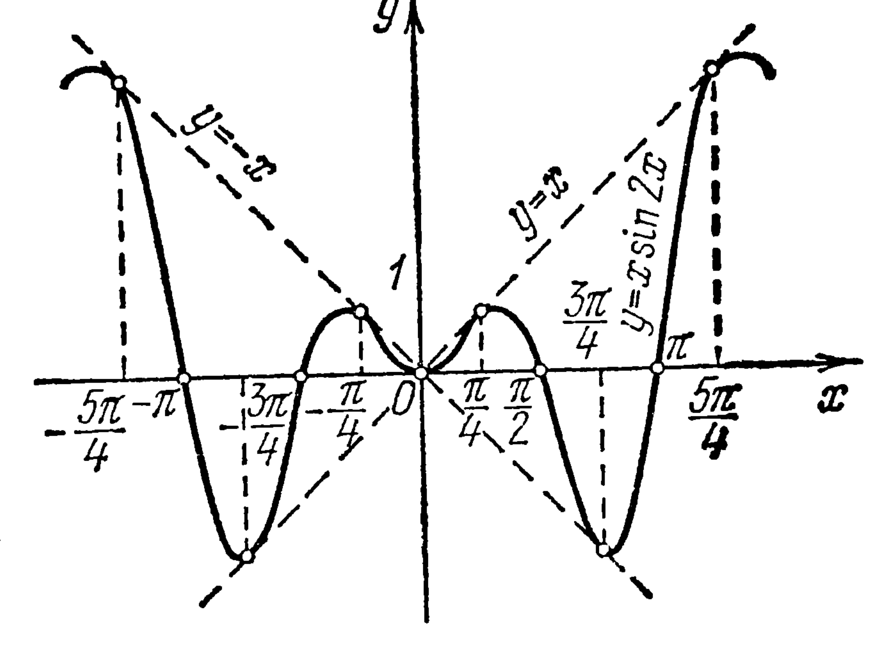


Рис. 123.

Пример 3. Построить график функции $y = x \dfrac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$.

Решение. 1) Область определения функции.

Функция определена для тех значений x, для которых существует и отлична от нуля функция $\operatorname{tg} x$, т. е. для всех x, кроме

$$x = n\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2}(2n+1),$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) Для всех x из области определения функции имеем

$$y = x\frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x} = \begin{cases} x, & \text{если} \quad \operatorname{tg} x > 0, \\ -x, & \text{если} \quad \operatorname{tg} x < 0. \end{cases}$$

3) Четность функции.

Функция — четная. Следовательно, достаточно сначала построить ее график для $x > 0$.

4) Заметим, что $\operatorname{tg} x > 0$ при $x > 0$ в интервалах

$$\pi n < x < \pi/2 + \pi n, \qquad \text{где} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. в интервалах $(0, \pi/2)$, $(\pi, 3\pi/2)$ и т. д.; $\operatorname{tg} x < 0$ при $x > 0$ в интервалах

$$\pi/2 + \pi n < x < \pi(n+1), \quad \text{где} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. в интервалах $(\pi/2, \pi)$, $(3\pi/2, 2\pi)$ и т. д.

5) Окончательно имеем (для $x>0$)

$$y=x\frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}=\begin{cases} x & \text{для } \pi n<x<\pi/2+\pi n, \\ -x & \text{для } \pi/2+\pi n<x<\pi(n+1), \end{cases}$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$

Построим график функции сначала для $x>0$, а затем, используя четность данной функции, отразим его зеркально в оси Oy.

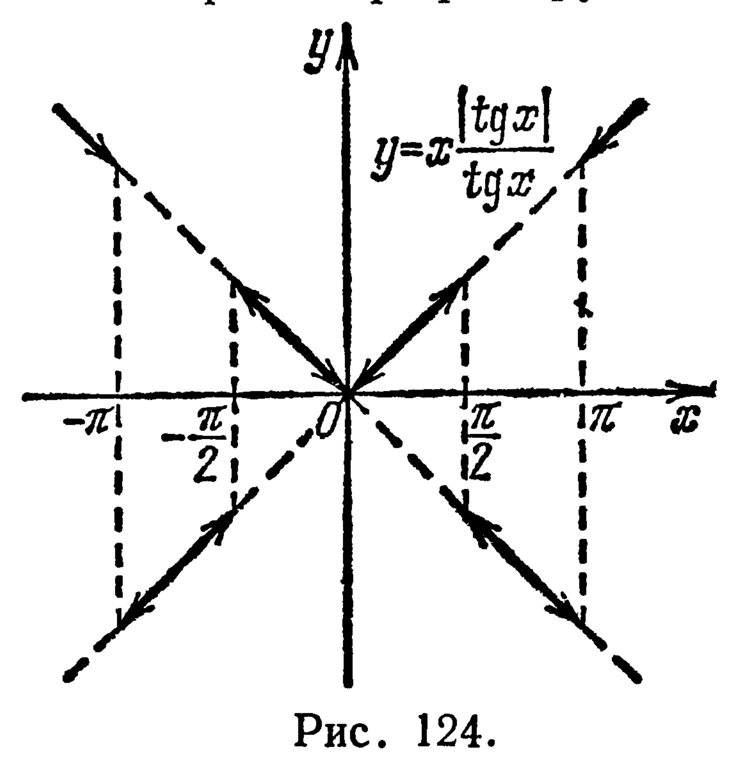


Рис. 124.

График функции $y=x\frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$ изображен на рис. 124.

Упражнения

1. Найти по таблицам тригонометрических функций следующие значения:

а) $\sin 38°$; б) $\cos 47°$; в) $\operatorname{tg} 0{,}5$.

2. Провести исследование и построить графики следующих функций:

1) $y=\sec x$; 2) $y=\operatorname{cosec} x$; 3) $y=3\cos x$; 4) $y=\cos 3x$; 5) $y=\cos|x|$; 6) $y=|\cos x|$; 7) $y=|\cos|x||$; 8) $y=\lg\cos x$; 9) $y=-\cos(x/2)$; 10) $y=x\cos\frac{x}{2}$; 11) $y=\sin(\pi x^2)$; 12) $y=2^{\log_2\cos x}$.

Глава X

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Формулы сложения и вычитания

114. Расстояние между двумя точками на плоскости.

Задача. На плоскости даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Найти расстояние AB между ними.

Решение. На рис. 125 изображен случай, когда $x_2 > x_1 > 0$ и $y_2 > y_1 > 0$. Мы же будем вести рассуждения, справедливые для любого случая расположения точек A и B. Заметим, что $AC = DE = |x_2 - x_1|$ и $BC = |y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACB имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

или $AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. Так как $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ и $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$, то

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда имеем

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (114.1)$$

Рис. 125.

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(7, -2)$ и $B(4, -6)$.

Решение. По формуле (114.1) имеем

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Пример 2. Найти расстояние между точками $C(2, -1)$ и $D(3, 1)$.

Решение. По формуле (114.1) имеем

$$CD = \sqrt{(3-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}.$$

115. Косинус суммы и разности двух аргументов.

а) Косинус разности. Предположим, что углы α и β удовлетворяют следующим двум условиям:

$$1)\ 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \beta < 2\pi; \quad 2)\ \alpha \geqslant \beta.$$

На рис. 126 изображены углы α ($\angle AOC$) и β ($\angle AOB$). Точки A, B и C лежат на единичной окружности ($OA = OB = OC = 1$). Заметим, что $\angle BOC = \alpha - \beta$.

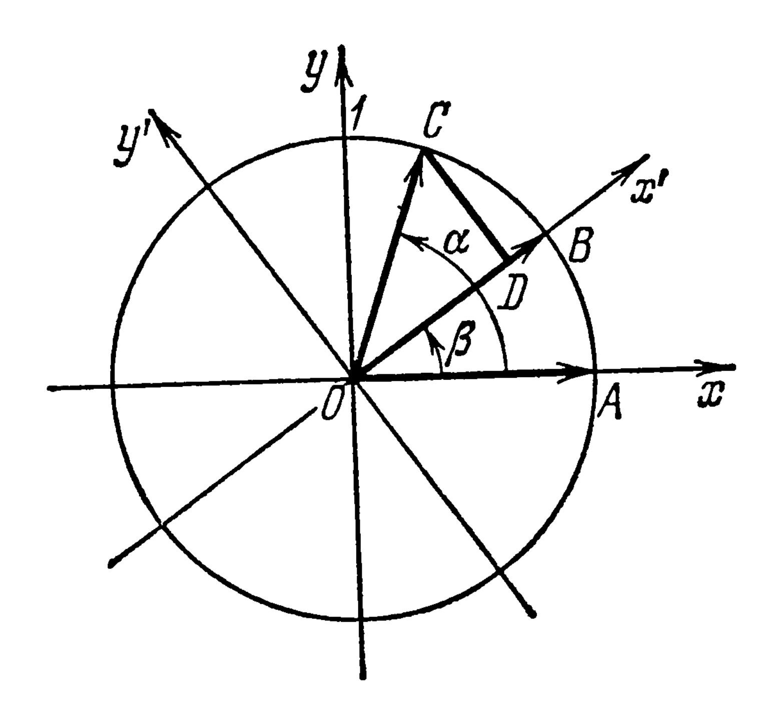


Рис. 126.

Кроме системы координат Oxy будем рассматривать еще новую систему координат $Ox'y'$, полученную из старой поворотом на угол β.

В дальнейшем будем использовать тот факт, что расстояние BC между точками B и C, вычисленное в старой системе координат Oxy и в новой системе координат $Ox'y'$, будет одинаково.

В системе координат Oxy точка B имеет координаты $(\cos\beta, \sin\beta)$, а точка C — координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. По формуле (114.1) имеем

$$BC^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta). \quad (115.1)$$

В системе координат $Ox'y'$ точка B имеет координаты $(1, 0)$, а точка C — координаты $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$. По формуле (114.1) найдем

$$BC^2 = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha-\beta) =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) =$$
$$= 2[1 - \cos(\alpha-\beta)]. \quad (115.2)$$

Приравняв правые части формул (115.1) и (115.2), получим выражение для косинуса разности двух углов:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (115.3)$$

Мы доказали теорему:

Косинус разности двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго плюс произведение синуса первого угла на синус второго.

Заметим, что ограничения, наложенные на углы α и β условиями 1) и 2), можно снять. В самом деле, допустим, что снято ограничение $0 \leqslant \alpha < 2\pi$; $0 \leqslant \beta < 2\pi$, налагаемое на углы α и β условиями 1), и мы имеем:

$2\pi k \leqslant \alpha < 2\pi(k+1)$ и $2\pi m \leqslant \beta < 2\pi(m+1)$, где $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

или $0 \leqslant \alpha - 2\pi k < 2\pi$ и $0 \leqslant \beta - 2\pi m < 2\pi$. Положив $\alpha - 2\pi k = \alpha_1$, $\beta - 2\pi m = \beta_1$, получим $0 \leqslant \alpha_1 < 2\pi$ и $0 \leqslant \beta_1 < 2\pi$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_1 \geqslant \beta_1$. (Ниже будет показано, что условие 2) не существенно.)

Итак, углы α_1 и β_1 удовлетворяют условиям 1) и 2), при которых была доказана теорема. Следовательно,

$$\cos(\alpha_1 - \beta_1) = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \sin\alpha_1 \sin\beta_1.$$

Подставив вместо α_1 и β_1 их значения, получим

$$\cos[\alpha - \beta + 2\pi(m-k)] = \\ = \cos(\alpha - 2\pi k)\cos(\beta - 2\pi m) + \sin(\alpha - 2\pi k)\sin(\beta - 2\pi m).$$

Воспользовавшись периодичностью синуса и косинуса, придем к формуле (115.3).

Мы показали, что условие 1) не существенно.

Допустим теперь, что, вопреки условию 2), $\alpha < \beta$, т. е. $\beta > \alpha$. Воспользовавшись четностью косинуса, будем иметь

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos[-(\alpha - \beta)] = \cos(\alpha - \beta).$$

Итак, доказана общность формулы (115.3), т. е. ее справедливость при любых углах α и β.

б) Косинус суммы. Так как формула (115.3) справедлива для любых двух углов α и β, то, заменив в ней β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

Воспользовавшись четностью косинуса и нечетностью синуса, будем иметь

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (115.4)$$

Мы доказали теорему:

Косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго минус произведение синуса первого угла на синус второго.

Пример. Вычислить $\cos(13\pi/12)$.

Решение.

$$\cos\frac{13}{12}\pi = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3} = \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \approx -0{,}966.$$

Формулы (115.3) и (115.4), как и все выводимые в дальнейшем соотношения для тригонометрических функций, сохраняют свою силу и для тригонометрических функций числового аргумента. Вообще, в дальнейшем мы уже не будем всякий раз указывать, как понимается аргумент тригонометрической функции (как угол или как число).

116. Синус суммы и разности двух аргументов.

а) Синус суммы. Воспользовавшись формулой приведения (105.2), будем иметь

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right].$$

К правой части последнего равенства применим формулу (115.3):

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Итак,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (116.1)$$

Мы доказали теорему:

Синус суммы двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго плюс произведение косинуса первого аргумента на синус второго.

б) Синус разности. Рекомендуем читателю вывести формулу

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (116.2)$$

и сформулировать соответствующую теорему.

Пример. Вычислить $\sin 105°$.

Решение. $\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cos 45°+$
$$+\cos 60°\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\approx 0{,}966.$$

117. Тангенс суммы и разности двух аргументов.

а) Тангенс суммы. При всех допустимых значениях аргументов α и β имеет место формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (117.1)$$

Доказательство. На основании формул (116.1) и (115.4) имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (117.2)$$

Разделив почленно числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части, на произведение $\cos\alpha\cos\beta$ (мы предполагаем, что оно отлично от нуля), получим (117.1).

б) Тангенс разности. Аналогично можно вывести формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (117.3)$$

Рекомендуем читателю вывести ее самостоятельно.

Пример 1. Вычислить $\operatorname{tg} 105°$.

Решение. $\operatorname{tg} 105°=\operatorname{tg}(60°+45°)=\frac{\operatorname{tg}60°+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}45°}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=$
$$=-\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}=-(2+\sqrt{3})\approx-3{,}732.$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}(13\pi/12)$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}(3\pi/4)+\operatorname{tg}(\pi/3)}{1-\operatorname{tg}(3\pi/4)\operatorname{tg}(\pi/3)}=$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}\approx 0{,}268.$$

118. О формулах сложения для нескольких аргументов. Если возникает необходимость найти тригонометрическую функцию трех (или более) слагаемых, то это можно сделать, последовательно применив выведенные в пп. 115—117 формулы. Например:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma)&=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=\\&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma=\\&=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\\&\quad+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}\qquad(118.1)$$

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad (118.2)$$

и

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (118.3)$$

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\cos 105°$; б) $\sin\frac{13}{12}\pi$; в) $\operatorname{tg}15°$; г) $\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

2. Вывести формулы:

а) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$.

§ 2. Формулы для двойного и половинного аргумента. Выражение $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через степени $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

119. Тригонометрические функции двойного аргумента. Положив в формулах (116.1), (115.4) и (117.1) $\alpha=\beta$, мы получаем следующие формулы:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (119.1)$$

Синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (119.2)$$

Косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента.

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (119.3)$$

Пример 1. Упростить выражение

$$A=2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha). \qquad (119.4)$$

Решение. Мы уже решали этот пример в п. 99. Используя формулы (99.9), (99.10) и (119.1), имеем

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha, \qquad (119.5)$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha. \qquad (119.6)$$

Подставив (119.5) и (119.6) в (119.4), получаем

$$A=2-\frac{3}{2}\sin^2 2\alpha-3+\frac{3}{2}\sin^2 2\alpha=-1.$$

Замечание. Формулы (119.5) и (119.6) можно получить и так:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha,$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$$

Формулы (119.1)—(119.3) можно использовать для любого аргумента α, считая его двойным для аргумента $\alpha/2$. Например:

$$\sin\alpha=\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (119.7)$$

$$\cos\alpha=\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (119.8)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg} 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (119.9)$$

$$\sin\frac{\alpha}{5}=\sin 2\left(\frac{\alpha}{10}\right)=2\sin\frac{\alpha}{10}\cos\frac{\alpha}{10}$$

и т. д.

Пример 2. Упростить выражение $A=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ и заменим $\operatorname{tg}\alpha$ по формуле (119.9), тогда получим

$$A=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Пример 3. Доказать, что $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$.

Решение. Заметим, что $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=$ $=\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}$.

Преобразуя левую часть тем же способом и далее, получим последовательно $\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=\frac{4}{\operatorname{tg}4\alpha}-4\operatorname{tg}4\alpha=\frac{8}{\operatorname{tg}8\alpha}=$ $=8\operatorname{ctg}8\alpha$, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$. Тождество доказано.

120. Выражение $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через степени $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при натуральном числе n. Случай, когда $n=2$, дан формулами (119.1), (119.2). Выразим теперь $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ и вообще $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Укажем на два способа получения соответствующих формул. Покажем, например, как получаются формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$.

Первый способ. Представляем $\sin 3\alpha$ в виде $\sin(2\alpha+\alpha)$ и используем формулу (116.1), а затем используем формулы (119.1) и (119.2):

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha.$$

Итак,

$$\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha. \tag{120.1}$$

В правую часть формулы (120.1) входят $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; заменив $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$, придем к следующей формуле:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha, \tag{120.2}$$

которая содержит в правой части только степени $\sin\alpha$. Аналогичные формулы можно получить для $\cos 3\alpha$ (рекомендуем это сделать читателю):

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha, \tag{120.3}$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha. \tag{120.4}$$

Заметим, что формулы (120.1) и (120.2) являются частным случаем формулы (118.1), когда в последней $\alpha=\beta=\gamma$. Формулы же (120.3) и (120.4) — частный случай формулы (118.2).

Второй способ. Воспользуемся результатами, полученными в алгебре при изучении комплексных чисел. На основании формулы Муавра (п. 17)

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha; \tag{120.5}$$

для случая, когда $n=3$, имеем

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha. \tag{120.6}$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны соответственно их действительные и мнимые части. Теперь из равенства

$$\cos^3\alpha+3\cos^2\alpha\sin\alpha\cdot i-3\cos\alpha\sin^2\alpha-\sin^3\alpha\cdot i=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha, \tag{120.7}$$

отделяя (и соответственно приравнивая) действительную и мнимую части, получим формулы

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha \tag{120.3}$$

и

$$\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha. \tag{120.1}$$

В общем случае для получения $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ можно поступать также двумя способами: либо применять последовательно теоремы сложения (первый способ), либо пользоваться формулой Муавра (второй способ).

Пример. Упростить выражение

$$A=\frac{1}{3}\cos^3\alpha\sin 3\alpha+\frac{1}{3}\sin^3\alpha\cos 3\alpha.$$

Решение. Применив формулы (120.1) и (120.3), получим

$$\frac{1}{3}\cos^3\alpha\sin 3\alpha+\frac{1}{3}\sin^3\alpha\cos 3\alpha=$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3\alpha\,(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha)+\frac{1}{3}\sin^3\alpha\,(\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha)=$$

$$=\cos^5\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin^5\alpha=\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\,(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\,(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\,\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

В конце решения примера мы воспользовались формулами (119.2), (99.1) и (119.1).

121. Тригонометрические функции половинного аргумента. Часто бывает необходимо, зная тригонометрические функции аргумента α, найти тригонометрические функции аргумента $\alpha/2$. Выведем соответствующие формулы. Мы имеем

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha. \qquad (119.8)$$

Присоединим к этой формуле основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1. \qquad (121.1)$$

Сложив почленно (119.8) и (121.1), получим

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (121.2)$$

Вычитая (119.8) из (121.1), получим

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (121.3)$$

Из тождеств (121.2) и (121.3) соответственно имеем

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (121.4)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (121.5)$$

Разделив почленно тождество (121.3) на (121.2), приходим к тождеству

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (121.6)$$

Из последнего тождества имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (121.7)$$

Применяя формулы (121.4), (121.5) и (121.7), следует всякий раз заботиться о знаке, который нужно взять перед радикалом.

Для вычисления $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ могут быть использованы и формулы, выражающие $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ рационально. Выведем эти формулы:

а) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (121.8)$$

Так как всегда $1+\cos\alpha\geqslant 0$ (формула (121.8) имеет смысл только при $1+\cos\alpha>0$), то из (121.8) можно заключить, что знак $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ во всех случаях совпадает со знаком $\sin\alpha$.

б) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (121.9)$$

Из последней формулы также ясно, что знак $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадает со знаком $\sin\alpha$, ибо всегда $1-\cos\alpha\geqslant 0$.

Пример 1. Найти $\sin 22°30'$, $\cos 22°30'$ и $\operatorname{tg} 22°30'$.

Решение. Мы знаем, что $\cos 45°=\sin 45°=\sqrt{2}/2$. Следовательно, применяя формулы (121.5), (121.4) и (121.9), получим

$$\sin 22°30'=+\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\approx 0{,}383;$$

$$\cos 22°30'=+\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\approx 0{,}924;$$

$$\operatorname{tg} 22°30'=\frac{1-\cos 45°}{\sin 45°}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}414.$$

Пример 2. Дано: $\sin\alpha=-4/5$, где $3\pi/2<\alpha<2\pi$. Найти $\sin(\alpha/2)$ и $\cos(\alpha/2)$.

Решение. Сначала находим

$$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}.$$

Так как $3\pi/4<\alpha/2<\pi$, то $\sin(\alpha/2)>0$, а $\cos(\alpha/2)<0$.

Применяя формулы (121.5), (121.4) и беря в них радикалы с соответствующими знаками, получим

$$\sin\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-{}^3/_5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+{}^3/_5}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Пример 3. Доказать тождество $\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha/2)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

Решение. Так как $\operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha$, то достаточно доказать, что $B=(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha/2)=\cos\alpha$. На основании формул приведения и (99.2) имеем

$$B=(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{[1+\cos(\pi/2-\alpha)]\sin(\pi/4-\alpha/2)}{\cos(\pi/4-\alpha/2)}.$$

Применяя формулу (121.2), получим

$$B=\frac{2\cos^2(\pi/4-\alpha/2)\sin(\pi/4-\alpha/2)}{\cos(\pi/4-\alpha/2)}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Далее получаем

$$B=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

(Мы применили сначала формулу (119.1), приняв за данный аргумент $(\pi/4-\alpha/2)$, а за удвоенный аргумент $(\pi/2-\alpha)$, а затем формулу приведения (105.1).) Следовательно, тождество доказано.

122. Выражение основных тригонометрических функций аргумента α через $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. Иногда требуется основные тригонометрические функции ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$) выразить рационально через $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. Покажем, например, как это делается для $\sin\alpha$. Используя тождества $\sin\alpha=2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ и $\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)=1$, можно писать

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего равенства, почленно на $\cos^2(\alpha/2)$, получим

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \qquad (122.1)$$

Используя тождество $\cos\alpha=\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)$, читатель может доказать, что

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \qquad (122.2)$$

Соответствующая формула для $\operatorname{tg}\alpha$ приводилась нами в п. 119:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \qquad (122.3)$$

Зная $\operatorname{tg}\alpha$, можно получить формулу

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}. \qquad (122.4)$$

Замечание. Формулы (122.1)—(122.4) имеют смысл для всех значений аргумента α, кроме $\alpha_n=(2n+1)\pi$, где n — целое число.

Пример 1. Дано $\operatorname{tg}(\alpha/2)={}^7/_8$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. На основании формулы (122.1) имеем

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot{}^7/_8}{1+({}^7/_8)^2}=\frac{112}{113}.$$

Аналогично $\cos\alpha=\dfrac{1-({}^7/_8)^2}{1+({}^7/_8)^2}=\dfrac{15}{113}$.

$\operatorname{tg}\alpha$ уже проще искать так: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{112}{15}$.

Пример 2. Вычислить $\dfrac{2+3\cos\alpha}{4-5\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{2}{3}$.

Решение. На основании формул (122.1) и (122.2) находим

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot(-{}^2/_3)}{1+(-{}^2/_3)^2}=-\frac{12}{13},\quad \cos\alpha=\frac{1-{}^4/_9}{1+{}^4/_9}=\frac{5}{13}.$$

Далее, $\dfrac{2+3\cos\alpha}{4-5\sin\alpha}=\dfrac{2+15/13}{4+60/13}=\dfrac{41}{112}$.

Упражнения

1. Доказать тождество $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.
2. Упростить выражение $A=\dfrac{5}{9}\dfrac{1}{\cos^2(x/2)}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5\operatorname{tg}(x/2)+4}{3}\right)^2}$.
3. Доказать тождество $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}(\alpha/2)-\operatorname{tg}(\alpha/2)}=\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$.
4. Получить формулы, выражающие $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через степени $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
5. Упростить $\cos^3\alpha\cos 3\alpha+\sin^3\alpha\sin 3\alpha$.
6. Дано: $\sin\alpha=-{}^3/_5$, где $3\pi<\alpha<7\pi/2$. Вычислить $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ и $\operatorname{tg}(\alpha/2)$.
7. Упростить $\dfrac{\sin(x-\pi/4)}{\sin(x+\pi/4)}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)-\dfrac{2\cos^2(x-5\pi/4)}{1-\sin 2x}$.
8. Доказать тождество $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
9. Доказать, что $\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.
10. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha/2)={}^6/_5$. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
11. Вычислить $\dfrac{3\sin\alpha-4\operatorname{tg}\alpha}{5\operatorname{ctg}\alpha+6\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{4}{3}$.
12. Получить выражение для $\operatorname{tg}3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.
13. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{ctg}16\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 3. Преобразование в сумму выражений вида $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$ и $\sin\alpha\sin\beta$

123. Основные формулы. Вернемся к формулам (116.1) и (116.2):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Сложив эти тождества почленно и разделив на 2, получим

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (123.1)$$

Выполнив аналогичные действия с формулами (115.3) и (115.4):

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

получим

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (123.2)$$

Вычтем из (115.3) почленно (115.4) и разделим на 2; получим

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (123.3)$$

124. Примеры. Иногда при решении примеров, имея произведения тригонометрических функций, например функций аргументов α и β, бывает полезно перейти к полусуммам или к полуразностям соответствующих тригонометрических функций.

Пример 1. Упростить $A=\frac{1}{3}\cos^3\alpha\sin 3\alpha+\frac{1}{3}\sin^3\alpha\cos 3\alpha$.

Решение. Мы решали этот пример в п. 120, используя формулы (120.1) и (120.3) для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$. Покажем теперь, как можно этот же пример решить, используя формулу (123.1). Заметим, что

$$\cos\alpha\sin 3\alpha=\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \sin\alpha\cos 3\alpha=\frac{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}{2}.$$

Используя только что полученные соотношения, будем иметь

$$A=\frac{1}{3}\cos^3\alpha\sin 3\alpha+\frac{1}{3}\sin^3\alpha\cos 3\alpha=$$
$$=\frac{1}{3}\cos^2\alpha\,\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\,\frac{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}{2}=$$
$$=\frac{1}{6}\sin 4\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\frac{1}{6}\sin 2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=\frac{1}{6}\sin 4\alpha+\frac{1}{6}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{6}\sin 4\alpha+\frac{1}{12}\sin 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

(В конце решения примера мы воспользовались формулами п. 119.)

Пример 2. Упростить $A=\dfrac{\sin(60^\circ+\alpha)}{4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

Решение. Преобразовав произведение, стоящее в знаменателе, получаем

$$A=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{2\left[\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos 90^\circ\right]}=\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{2\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Знаменатель преобразуем при помощи формулы приведения

$$\cos\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left[90^\circ-\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Числитель же преобразуем так:

$$\sin(60^\circ+\alpha)=2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогда

$$A=\frac{2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 3. Вычислить $A=\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

Решение. Заметим, что

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{4}.$$

Далее,

$$A=\frac{1}{4}(2\cos 20^\circ \sin 80^\circ-\sin 80^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ-\sin 80^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{8},$$

так как $\sin 100^\circ=\sin 80^\circ$, а $\sin 60^\circ=\sqrt{3}/2$.

Упражнения

1. Вычислить $\sin 52^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$.

2. Пользуясь формулами преобразований настоящего параграфа и таблицами тригонометрических функций, найти значения следующих выражений:
а) $\sin 3^\circ 30' \cos 4^\circ 30'$; б) $\cos 5^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$; в) $\sin 8^\circ 30' \sin 11^\circ 30'$;
г) $\sin 0{,}25 \cos 0{,}35$; д) $\cos 0{,}45 \cos 0{,}65$; е) $\sin 0{,}45 \sin 0{,}75$.

3. Не пользуясь формулами для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$, упростить выражение $\cos^3\alpha \cos 3\alpha+\sin^3\alpha \sin 3\alpha$.

4. Доказать тождество $4\sin\alpha \sin(\pi/3+\alpha)\sin(\pi/3-\alpha)=\sin 3\alpha$.

5. Вычислить $A=\cos 80^\circ \sin 50^\circ \cos 20^\circ$.

6. Доказать тождество $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin(3\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$.

7. Доказать, что $\cos 20^\circ+8\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ=2\sin^2 80^\circ$.

8. Вычислить $4\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

9. Вычислить $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$.

10. Вычислить $16\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

11. Вычислить $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$.

§ 4. Преобразование в произведение сумм вида $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$

125. Основные формулы. При вычислении различных выражений, содержащих тригонометрические функции, с помощью таблиц логарифмов и логарифмической линейки удобно иметь дело с произведениями, а не с суммами. Выведем ряд формул, которые позволяют от сумм переходить к произведениям.

а) Сумма синусов. Запишем формулу (123.1) в виде

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$

и положим в ней $x=(\alpha+\beta)/2$ и $y=(\alpha-\beta)/2$. Заметим, что $x+y=\alpha$ и $x-y=\beta$; следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (125.1)$$

Сумма двух синусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности их аргументов.

Пример 1. $\sin 14°+\sin 28°=2\sin 21°\cos 7°$.

Пример 2. $\sin 0{,}6+\sin 3{,}2=2\sin 1{,}9\cos 1{,}3$.

б) Разность синусов. Заменив в формуле (125.1) β на $-\beta$, получим, учитывая нечетность синуса,

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (125.2)$$

Разность двух синусов равна удвоенному произведению синуса полуразности на косинус полусуммы их аргументов.

Пример 3. $\sin 16°-\sin 13°=2\sin 1°30'\cos 14°30'$.

Пример 4. $\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{5\pi}{48}$.

в) Сумма косинусов. Запишем формулу (123.2) в виде

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

и положим в ней $x=(\alpha+\beta)/2$ и $y=(\alpha-\beta)/2$. Мы уже видели, что $x+y=\alpha$ и $x-y=\beta$; следовательно,

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (125.3)$$

Сумма двух косинусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности их аргументов.

Пример 5. $\cos 52°30'+\cos 16°30'=2\cos 34°30'\cos 18°$.

Пример 6. $\cos 0{,}8+\cos 2{,}8=2\cos 1{,}8\cos 1$.

г) Разность косинусов. Из формулы (123.3), аналогично предыдущему, получается формула

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (125.4)$$

Разность двух косинусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус обратной полуразности их аргументов.

Пример 7. $\cos\frac{\pi}{13}-\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{25\pi}{312}\sin\frac{\pi}{312}$.

Пример 8. $\cos 1{,}6 - \cos 1{,}4 = -2\sin 1{,}5 \sin 0{,}1$.

д) Сумма тангенсов. Перейдя к синусам и косинусам, получим

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (125.5)$$

Пример 9. $\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 18^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 12^\circ \cos 18^\circ} = \frac{1}{2}\sec 12^\circ \sec 18^\circ$.

Пример 10. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/4)\cos(\pi/12)} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cos(\pi/12)} \sqrt{\frac{3}{2}}\sec\frac{\pi}{12}.$$

е) Разность тангенсов. Заменив в формуле (125.5) β на $-\beta$, будем иметь, учтя четность косинуса и нечетность тангенса,

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (125.6)$$

Пример 11. Преобразовать по формуле (125.6) и вычислить, используя таблицу тригонометрических функций (приложение II),

$$\operatorname{tg} 0{,}55 - \operatorname{tg} 0{,}15.$$

Решение. $\operatorname{tg} 0{,}55 - \operatorname{tg} 0{,}15 = \frac{\sin 0{,}40}{\cos 0{,}55 \cos 0{,}15}$. В нашей таблице нет значений функций для аргументов 0,55 и 0,15, поэтому, воспользовавшись формулой (123.2), перейдем к полусумме косинусов, но уже от аргументов, которые имеются в таблице:

$$\cos 0{,}55 \cos 0{,}15 = \frac{\cos 0{,}70 + \cos 0{,}40}{2} = \frac{0{,}7648 + 0{,}9211}{2} \approx 0{,}843.$$

Теперь имеем $\operatorname{tg} 0{,}55 - \operatorname{tg} 0{,}15 \approx \frac{0{,}389}{0{,}843} \approx 0{,}46$.

Пример 12. $\operatorname{tg}\frac{5}{16}\pi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{5\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}}$.

Замечание. Последние две формулы (125.5) и (125.6) имеют смысл для аргументов α и β, отличных от $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, где n — целое число.

126. Примеры.

Пример 1. Преобразовать в произведение выражение $\cos\alpha + \sin\beta$.

Решение. Заменив $\sin\beta$ по формуле приведения на $\cos(\pi/2-\beta)$, перейдем к сумме косинусов и воспользуемся формулой (125.3):

$$\cos\alpha+\sin\beta=$$
$$=\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Перейдя к $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}. \quad (126.1)$$

Пример 3. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$A=\operatorname{ctg}60^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ.$$

Решение. Заменив $\operatorname{ctg}60^\circ$ по формуле приведения на $\operatorname{tg}30^\circ$ и воспользовавшись формулой (126.1), получим

$$A=\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ=\frac{2}{\sin 60^\circ}+\frac{2}{\sin 80^\circ}.$$

Далее, будем иметь

$$A=\frac{2(\sin 80^\circ+\sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ\sin 80^\circ}=\frac{4\sin 70^\circ\cos 10^\circ}{\sin 60^\circ\sin 80^\circ}.$$

Последнее выражение можно упростить, если заметить, что $\sin 60^\circ=\sqrt{3}/2$, а $\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$. Теперь будем иметь

$$A=\frac{8\sin 70^\circ\cos 10^\circ}{\sqrt{3}\cos 10^\circ}=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin 70^\circ.$$

Пример 4. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$A=\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (125.3), получим $A=2\cos 8\alpha\cos 3\alpha+6\cos 8\alpha\cos\alpha=2\cos 8\alpha(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$. Согласно формуле (120.4) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, откуда $\cos 3\alpha+3\cos\alpha=4\cos^3\alpha$, и мы имеем $A=8\cos 8\alpha\cos^3\alpha$.

Пример 5. Доказать тождество $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$.

Решение. Заметим, что $2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$ (см. (121.2)) и $\cos\alpha+\cos 3\alpha=2\cos 2\alpha\cos\alpha$. После этого преобразуем левую часть предполагаемого тождества:

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{1+\cos 2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=2\cos\alpha.$$

Следовательно, наше тождество доказано. Мы исключили из рассмотрения те значения аргумента α, при которых выражение $\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1$ или, что то же самое, $\cos\alpha+\cos 2\alpha$ равно нулю.

Пример 6. Проверить, что $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=4$.

Решение. Заменив по формуле приведения $\operatorname{tg}81^\circ$ на $\operatorname{ctg}9^\circ$, а $\operatorname{tg}63^\circ$ на $\operatorname{ctg}27^\circ$ и воспользовавшись формулой (126.1), получим

$$\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)=$$
$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{4\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{4\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}.$$

Заметив, что $\cos 36^\circ=\sin 54^\circ$, мы приходим к равенству $4=4$. Итак, $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ=4$.

Упражнения

Преобразовать суммы функций в произведения:

1. $\sin(\pi/30)+\sin(\pi/40)$. 2. $\sin 2{,}8-\sin 1{,}2$. 3. $\cos 40^\circ+\cos 10^\circ$. 4. $\cos(\pi/10)-\cos(\pi/20)$. 5. $\operatorname{tg}3{,}2+\operatorname{tg}10{,}4$. 6. $\operatorname{tg}91^\circ45'-\operatorname{tg}3^\circ51'$. 7. $\operatorname{tg}2+\operatorname{ctg}2$.

8. Вычислить: $\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{tg}15^\circ$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

9. $\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{19}{8}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)$.

10. $\sin 5\alpha\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$.

11. $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha)\sin^2(\pi/4+\alpha)}+\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha$.

12. $\operatorname{ctg}80^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ+\operatorname{tg}80^\circ$.

13. $\sin 7\alpha-\sin 5\alpha-\frac{4}{3}\sin 9\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha$.

Доказать тождества:

14. $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\cos\frac{3}{2}\alpha\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.

15. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}+\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right)+\operatorname{tg}3\alpha$.

16. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5}{2}\alpha$.

Проверить равенства:

17. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\dfrac{8\sin(7\pi/18)}{\sqrt{3}}$.

18. $\cos 80^\circ+\sin 20^\circ+\cos 60^\circ+\sin 40^\circ+\cos 40^\circ=\cos 65^\circ\cos 60^\circ\sec 85^\circ$.

19. $(\sin 20^\circ+\sin 140^\circ)(\cos 50^\circ+\cos 70^\circ)+$
$+(\sin 50^\circ+\cos 160^\circ)(\cos 40^\circ-\sin 70^\circ)=1$.

20. $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}10^\circ=1$.

21. $\sin 50^\circ\sin 24^\circ(\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{ctg}24^\circ)+\cos 16^\circ=2\sin 74^\circ$.

22. Вывести формулы для суммы и разности двух котангенсов:

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

§ 5. Преобразование некоторых выражений в произведения с помощью введения вспомогательного аргумента

Некоторые суммы бывает возможно свести к произведениям, если соответствующим образом ввести вспомогательный аргумент. Проиллюстрируем этот прием на отдельных примерах.

127. Преобразование в произведение выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$. Мы предполагаем, что $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Постараемся подобрать аргумент φ и положительный множитель ρ так, чтобы было

$$a=\rho\cos\varphi \quad \text{и} \quad b=\rho\sin\varphi. \tag{127.1}$$

Возведя в квадрат обе части равенств (127.1) и сложив полученные равенства почленно, будем иметь $a^2+b^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$, откуда $\rho^2=a^2+b^2$ и

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{127.2}$$

(В качестве ρ мы берем арифметическое значение корня.) После этого вспомогательный аргумент φ можно найти из соотношений

$$\cos\varphi=\frac{a}{\rho}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi=\frac{b}{\rho}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{127.3}$$

Теперь будем иметь

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\rho\cos\varphi\sin\alpha+\rho\sin\varphi\cos\alpha=$$
$$=\rho(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=\rho\sin(\alpha+\varphi).$$

Итак,

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\rho\sin(\alpha+\varphi). \tag{127.4}$$

Формулу (127.4) можно получить и так:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Положив теперь

$$\sqrt{a^2+b^2}=\rho>0, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,$$

мы придем к формуле (127.4).

Замечание. Тот факт, что такой аргумент φ существует, доказан в п. 100 $\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1\right)$.

Пример 1. Представить в виде произведения выражение $A=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$.

Решение. Здесь $a=\sqrt{3}$, $b=1$ и $\sqrt{a^2+b^2}=2$. Следовательно,

$$A=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Теперь полагаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}=\sin\varphi.$$

В качестве аргумента φ можно взять, например, $\varphi=\pi/6$. Окончательно имеем

$$A=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).$$

Пример 2. Представить в виде произведения выражение $A=\sin\alpha+\cos\alpha$.

Решение. В этом примере $a=1$ и $b=1$, следовательно, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$. Теперь поступаем, как в общем случае: $A=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)$. Положим $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\varphi$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\varphi$. В качестве аргумента φ можно взять, например, $\varphi=\pi/4$. После этого получим

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right). \qquad (127.5)$$

128. Преобразование в произведение выражений $a\sin\alpha+b$ и $a\cos\alpha+b$ при $0<|b|\leqslant|a|$.

1) Рассмотрим выражение $a\sin\alpha+b$. Запишем его следующим образом: $a\sin\alpha+b=a(\sin\alpha+b/a)$. Так как, по предположению, $|b/a|\leqslant 1$, то можно положить $b/a=\sin\varphi$. Теперь будем иметь

$$a\sin\alpha+b=a(\sin\alpha+\sin\varphi)=2a\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}.$$

Пример 1. Преобразовать в произведение $2\sin\alpha+1$.

Решение. $2\sin\alpha+1=2(\sin\alpha+1/2)$. Положим $1/2=\sin\varphi$. В качестве φ можно, например, взять $\pi/6$, и мы получим

$$2\sin\alpha+1=2\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$$

2) Рассмотрим выражение $a\cos\alpha+b$. Запишем его следующим образом: $a\cos\alpha+b=a(\cos\alpha+b/a)$. Так как, по предположению, $|b/a|\leqslant 1$, то можно положить $b/a=\cos\varphi$. Теперь будем иметь

$$a\cos\alpha+b=a(\cos\alpha+\cos\varphi)=2a\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}\cos\frac{\alpha-\varphi}{2}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $2\cos\alpha+\sqrt{2}$.

Решение. $2\cos\alpha+\sqrt{2}=2(\cos\alpha+\sqrt{2}/2)$. Положим $\sqrt{2}/2=\cos\varphi$. В качестве φ можно, например, взять $\pi/4$, и мы получим

$$2\cos\alpha+\sqrt{2}=2\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$
$$=2\left(\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right).$$

Пример 3. Преобразовать в произведение $3-4\cos^2\alpha$.

Решение. $3-4\cos^2\alpha=4\,(^3/_4-\cos^2\alpha)$. Положим $^3/_4=\cos^2\varphi$. В качестве φ можно, например, взять $\pi/6$, и мы будем иметь

$$3-4\cos^2\alpha=4\left(\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\alpha\right)=4\left(\frac{1+\cos(\pi/3)}{2}-\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

129. Преобразование в произведение выражения $a\operatorname{tg}\alpha+b$. Рассмотрим выражение $a\operatorname{tg}\alpha+b$, где $a\neq 0$. Запишем его следующим образом: $a\operatorname{tg}\alpha+b=a\,(\operatorname{tg}\alpha+b/a)$. Так как тангенс изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то при любых a и b можно положить $b/a=\operatorname{tg}\varphi$, и мы получим

$$a\operatorname{tg}\alpha+b=a\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{b}{a}\right)=a\,(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\varphi)=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\cos\varphi}.$$

Пример 1. Преобразовать в произведение $3\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}$.

Решение. $3\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}=3\,(\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}/3)$. Положим $\sqrt{3}/3=\operatorname{tg}\varphi$. В качестве φ можно, например, взять $\pi/6$, и мы будем иметь

$$3\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}=3\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sin(\alpha+\pi/6)}{\cos\alpha\cos(\pi/6)}=\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha+\pi/6)}{\cos\alpha}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $9-3\operatorname{tg}^2 4\alpha$.

Решение. $9-3\operatorname{tg}^2 4\alpha=3\,(3-\operatorname{tg}^2 4\alpha)$. Положим $3=\operatorname{tg}^2\varphi$. В качестве φ можно, например, взять $\pi/3$, и мы получим

$$9-3\operatorname{tg}^2 4\alpha=3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}^2 4\alpha\right)=3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}4\alpha\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}4\alpha\right)=$$
$$=\frac{3\sin(\pi/3-4\alpha)\sin(\pi/3+4\alpha)}{\cos(\pi/3)\cos 4\alpha\cos(\pi/3)\cos 4\alpha}=\frac{12\sin(\pi/3-4\alpha)\sin(\pi/3+4\alpha)}{\cos^2 4\alpha}.$$

Упражнения

С помощью введения вспомогательного аргумента представить в виде произведений следующие выражения:

1. $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$. **2.** $\sin\alpha-\cos\alpha$. **3.** $\sqrt{3}-2\sin\alpha$. **4.** $1-2\cos\alpha$. **5.** $3-4\sin^2\alpha$. **6.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}2\alpha+3$. **7.** $1-3\operatorname{tg}^2\alpha$. **8.** $3-9\operatorname{tg}^2 4\alpha$. **9.** $1-\cos\alpha+\cos 2\alpha$. **10.** $1+\sqrt{3}\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha$. **11.** $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$.

Глава XI

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

§ 1. Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$

130. Функция $y=\arcsin x$ (арксинус). Рассмотрим функцию $y=\sin x$. Так как область определения этой функции — вся ось Ox $(-\infty<x<+\infty)$, а область изменения значений — отрезок $[-1, 1]$ оси Oy $(-1\leqslant y\leqslant 1)$, то об обратной функции (по отношению к функции $y=\sin x$) имеет смысл говорить только на отрезке $[-1, 1]$ оси Oy. Пусть, например, известно, что $y=\sin x=a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$. Сколько значений x можно найти из последнего уравнения? На рис. 127 видно, что существует

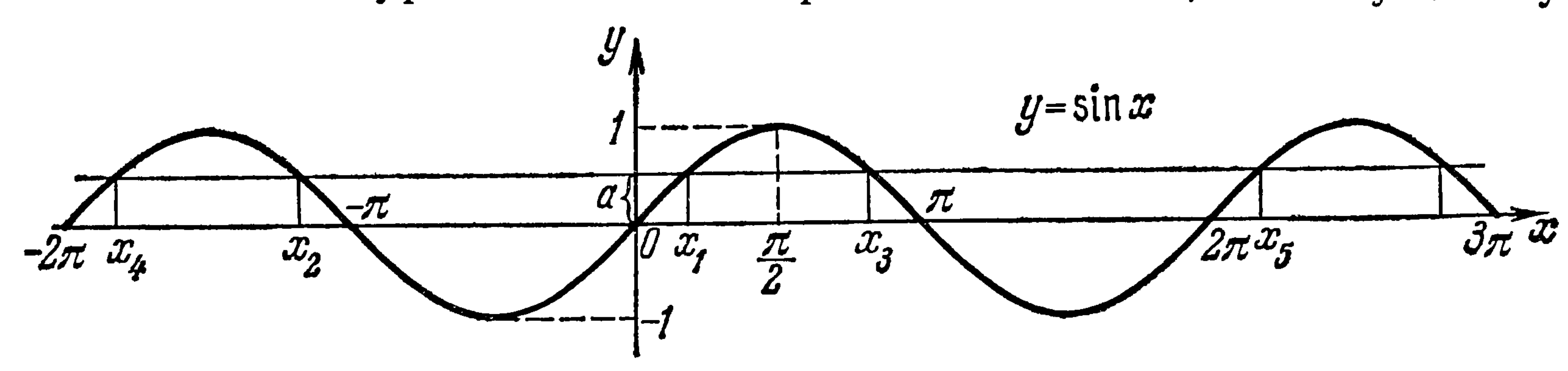


Рис. 127.

бесконечно много значений аргумента x $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, обладающих тем свойством, что $\sin x_i=a$, где $i=1, 2, \ldots$

Для того чтобы получить обратную (однозначную) функцию к функции $y=\sin x$, достаточно рассмотреть какой-либо наибольший отрезок оси Ox, на котором функция $y=\sin x$ или монотонно возрастает, или монотонно убывает (см. п. 35). Функция $y=\sin x$ монотонно возрастает от -1 до $+1$, например, на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ и вообще на любом отрезке вида $[-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi]$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Она монотонно убывает от $+1$ до -1 на любом отрезке вида $[\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi]$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

На всей оси Ox функция $y=\sin x$ обратной (однозначной) функции не имеет. На каждом же из отрезков монотонности функция $y=\sin x$ имеет обратную функцию. Остается теперь зафиксировать какой-либо из этих отрезков. В качестве отрезка

оси Ox, на котором рассматривается функция $y=\sin x$ и обратная к ней функция, обычно берут отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$. Итак, рассмотрим функцию $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. На этом отрезке функция $y=\sin x$ монотонно возрастает, принимая все значения от -1 до $+1$. Следовательно, для любого y_0 из отрезка $[-1, 1]$ оси Oy найдется, и притом только одно, значение x_0 из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ оси Ox такое, что $y_0=\sin x_0$, т. е. для функции $y=\sin x$ на указанном отрезке существует обратная (однозначная) функция, которую условились называть *арксинусом* и обозначать так: $x=\arcsin y$. Меняя, как обычно, обозначения, мы будем писать

$$y=\arcsin x. \qquad (130.1)$$

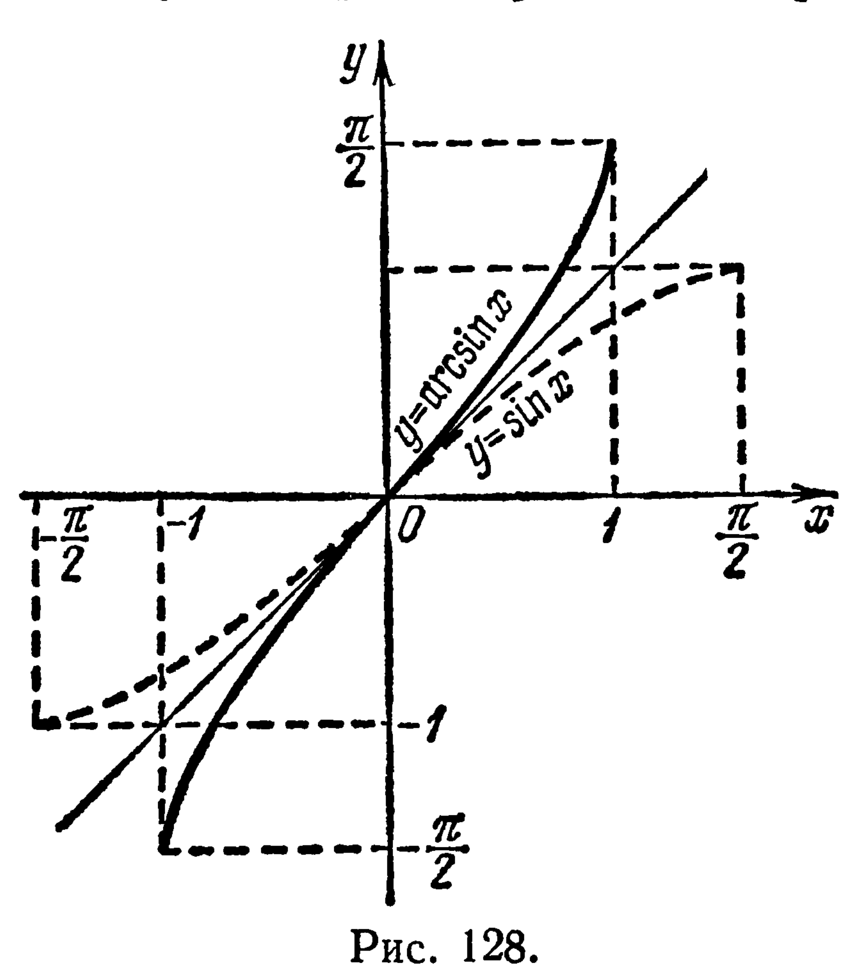


Рис. 128.

Пример 1. Найти $\alpha=\arcsin(1/2)$.

Данный пример подробно можно сформулировать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, синус которого равен $1/2$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, синус которых равен $1/2$, например: $\pi/6$, $5\pi/6$, $13\pi/6$, $-7\pi/6$ и т. д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Таким аргументом будет $\pi/6$. Итак,

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Найти $\alpha=\arcsin(-\sqrt{3}/2)$.

Решение. Рассуждая так же, как и в примере 1, получим

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

По общему правилу (см. п. 35) график обратной функции симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы I—III координатных углов (рис. 21).

Свойства функции $y=\arcsin x$ (рис. 128).

1) Область определения: отрезок $[-1, 1]$.
2) Область изменения: отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$.
3) Функция $y=\arcsin x$ нечетная: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.
4) Функция $y=\arcsin x$ монотонно возрастающая.
5) График пересекает оси Ox, Oy в начале координат.
6) $$\arcsin x \begin{cases} \geqslant 0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ <0 & \text{при } -1\leqslant x<0. \end{cases}$$

Перечисленные свойства вытекают из свойств функции $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

131. Функция $y=\arccos x$ (арккосинус). Функция $y=\cos x$ определена на всей оси Ox $(-\infty<x<+\infty)$ и изменяется в отрезке $[-1, 1]$ оси Oy $(-1\leqslant y\leqslant 1)$. Если мы поставим вопрос об определении тех x, при которых $y=\cos x=a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$, то увидим, что эта задача решается неоднозначно. На рис. 129

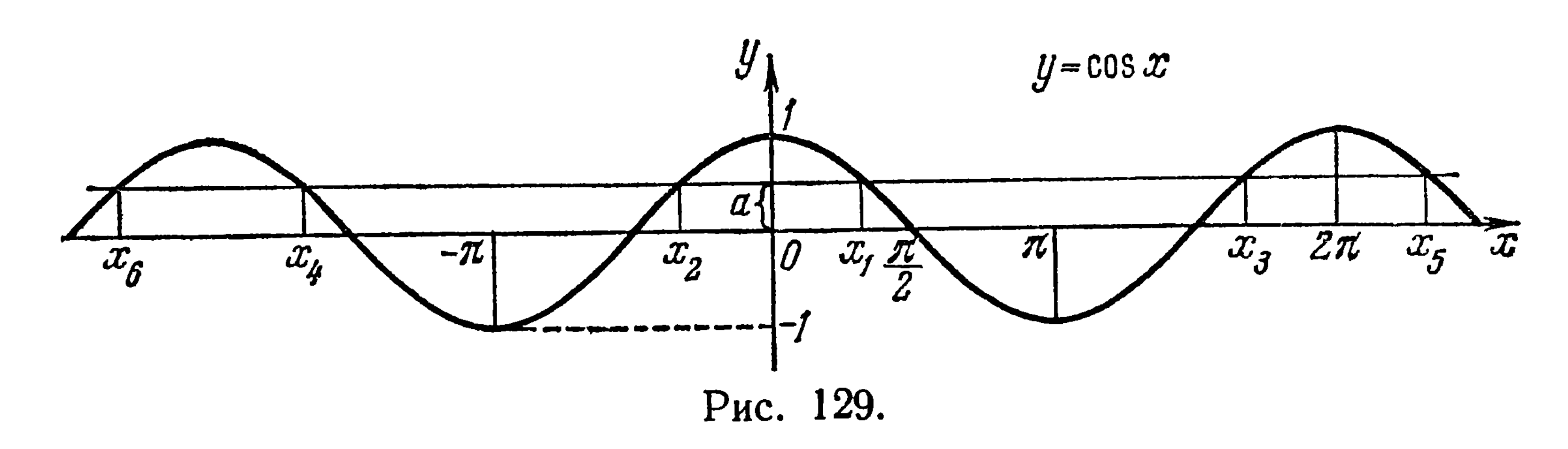


Рис. 129.

видно, что существует бесконечно много значений аргумента x $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, обладающих тем свойством, что $\cos x_i=a$, где $i=1, 2, \ldots$ Для того чтобы мы могли ввести функцию, обратную по отношению к функции $y=\cos x$, нам нужно взять наибольший отрезок оси Ox, на котором она или монотонно возрастает, или монотонно убывает (см. п. 35). Функция $y=\cos x$ монотонно возрастает от -1 до $+1$ на любом отрезке вида $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; она монотонно убывает от $+1$ до -1 на любом отрезке вида $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В качестве отрезка оси Ox, на котором рассматривается функция $y=\cos x$ и обратная к ней функция, обычно берут отрезок $[0, \pi]$. На этом отрезке функция $y=\cos x$ монотонно убывает, принимая все значения от $+1$ до -1. Следовательно, для любого y_0 из отрезка $[-1, 1]$ оси Oy найдется, и притом только одно, значение x_0 из отрезка $[0, \pi]$ такое, что $y_0=\cos x_0$, т. е. для функции $y=\cos x$ на указанном отрезке существует обратная (однозначная) функция, которую условились называть *арккосинусом* и обозначать так: $x=\arccos y$. Меняя, как обычно, обозначения, мы будем писать:

$$y=\arccos x. \tag{131.1}$$

Пример 1. Найти $\alpha=\arccos(-\sqrt{3}/2)$.

Подробно данный пример можно сформулировать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от 0 до π, косинус которого равен $-\sqrt{3}/2$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, косинус которых равен $-\sqrt{3}/2$, например: $5\pi/6$, $7\pi/6$, $-5\pi/6$, $-7\pi/6$ и т. д. Но нас интересует только тот аргумент, который

находится в отрезке $[0, \pi]$. Таким аргументом будет $5\pi/6$. Итак, $\arccos(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$.

Пример 2. Найти $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/2)$.

Решение. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы получим $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

График функции $y = \arccos x$ симметричен с графиком функции $y = \cos x$ относительно биссектрисы I—III координатных углов (см. рис. 21 в п. 35).

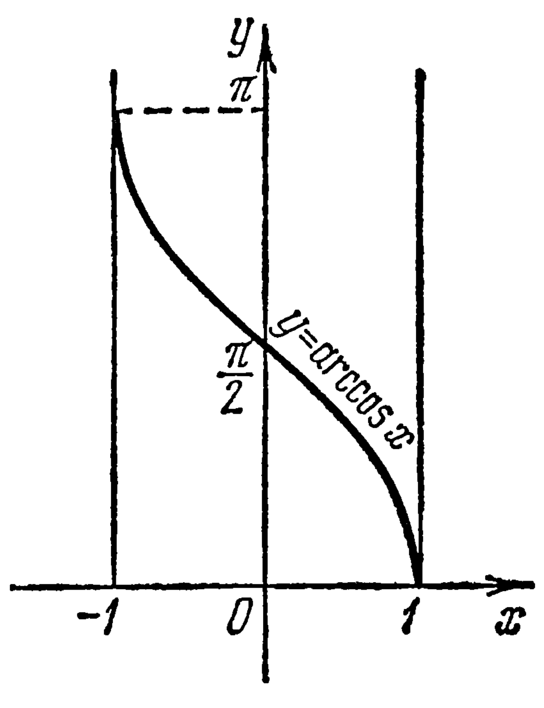


Рис. 130.

Свойства функции $y = \arccos x$ вытекают из соответствующих свойств функции $y = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$ и видны из графика на рис. 130.

Перечислим эти свойства:

1) Область определения: отрезок $[-1, 1]$.

2) Область изменения: отрезок $[0, \pi]$.

3) Функция $y = \arccos x$ ни четная, ни нечетная. Для нее выполняется тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \qquad (131.2)$$

4) Функция $y = \arccos x$ монотонно убывающая.

5) График пересекает ось Ox в точке $(1, 0)$, а ось Oy в точке $(0, \pi/2)$.

6) $\arccos x \geqslant 0$ на всем отрезке $[-1, 1]$.

132. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ (арктангенс). Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. Область определения этой функции — вся ось Ox, за исключением точек вида $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и область изменения значений — вся ось Oy. Об обратной функции (по отношению к функции $y = \operatorname{tg} x$) можно уже говорить для всей оси Oy. Задача нахождения x из уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и здесь имеет бесчисленное множество решений. На рис. 131 видно, что существует бесконечно много значений аргумента x (x_1, x_2, ...) таких, что $\operatorname{tg} x_i = a$, где $i = 1, 2, \ldots$

Для того чтобы получить обратную (однозначную) функцию к функции $y = \operatorname{tg} x$, достаточно рассмотреть какой-либо наибольший интервал оси Ox, на котором она монотонно возрастает. Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, например, на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ и вообще на любом интервале вида $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В качестве интервала оси Ox, на котором рассматривается функция $y = \operatorname{tg} x$ и обратная к ней функция, берут обычно интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. На этом интервале функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, для лю-

бого y_0, лежащего на оси Oy, найдется, и притом только одно, значение x_0 из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ такое, что $y_0 = \operatorname{tg} x_0$, т. е. для функции $y = \operatorname{tg} x$ на указанном интервале существует обратная

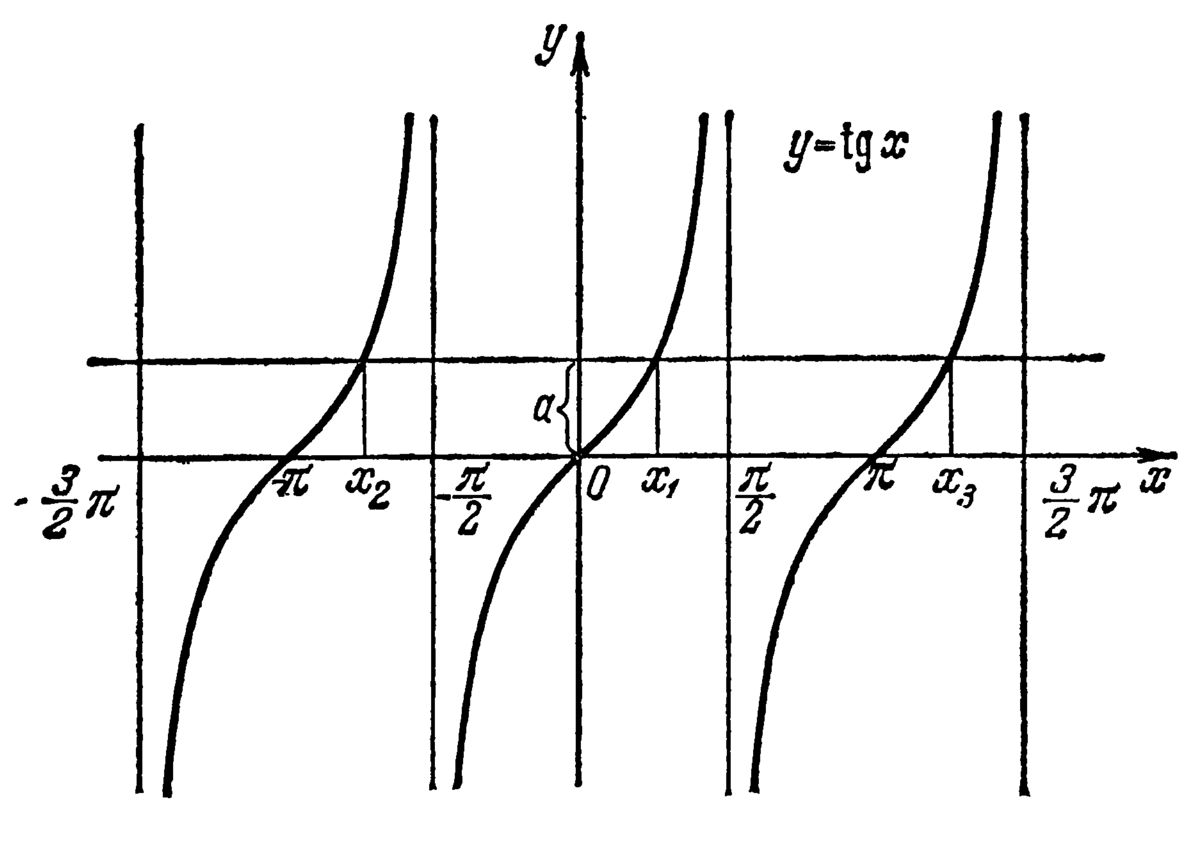


Рис. 131.

(однозначная) функция, которую условились называть *арктангенсом* и обозначать так: $x = \operatorname{arctg} y$. Меняя, как обычно, обозначения, мы будем писать:

$$y = \operatorname{arctg} x. \qquad (132.1)$$

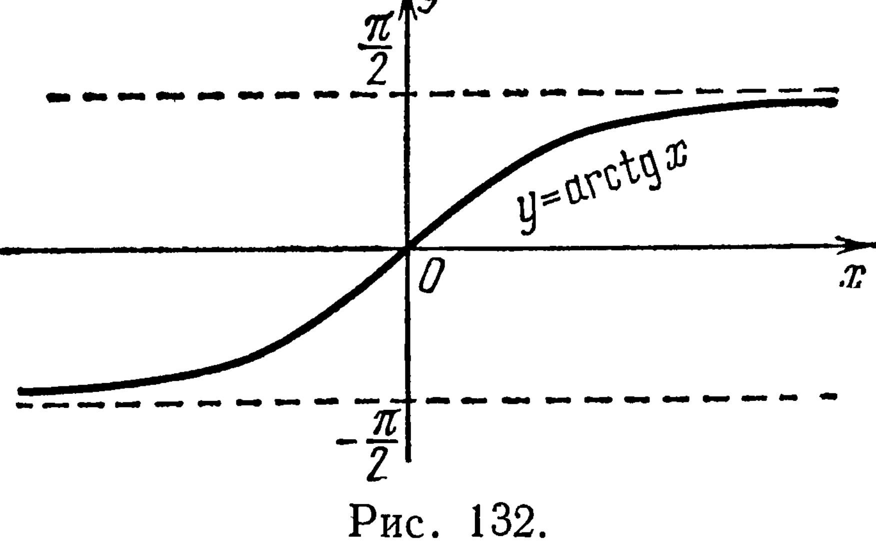


Рис. 132.

Пример 1. Найти $\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)$.

Подробно данный пример можно сформулировать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, тангенс которого равен $\sqrt{3}/3$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, тангенс которых равен $\sqrt{3}/3$, например: $\pi/6$, $7\pi/6$, $-5\pi/6$ и т. д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Таким аргументом будет $\pi/6$. Итак,

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3) = \pi/6.$$

Пример 2. Найти $\alpha = \operatorname{arctg}(-1)$.

Решение. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы получим $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы I—III координатных углов (см. рис. 21 в п. 35).

Свойства функции $y=\operatorname{arctg} x$ вытекают из соответствующих свойств функции $y=\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$ и видны из графика на рис. 132. Перечислим эти свойства:

1) Область определения: x — любое действительное число.
2) Область изменения: интервал $(-\pi/2,\ \pi/2)$.
3) Функция $y=\operatorname{arctg} x$ нечетная: $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$.
4) Функция $y=\operatorname{arctg} x$ монотонно возрастающая.
5) График пересекает оси Ox, Oy в начале координат.
6) $\operatorname{arctg} x<0$ при $-\infty<x<0$ и $\operatorname{arctg} x>0$ при $0<x<+\infty$.
7) Прямые $y=\pi/2$ и $y=-\pi/2$ — горизонтальные асимптоты графика.

133. Функция $y=\operatorname{arcctg} x$ (арккотангенс). Функция $y=\operatorname{ctg} x$ определена на всей оси Ox, за исключением точек вида $x_n=\pi n$, где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ Областью изменения ее значений является вся ось Oy. Так же как и для функций, рассмотренных в пп. 130—132, существует бесконечно много значений аргумента x $(x_1,\ x_2,\ \ldots)$, для которых $\operatorname{ctg} x_i=a$, где $i=1,\ 2,\ \ldots$ (рис. 133).

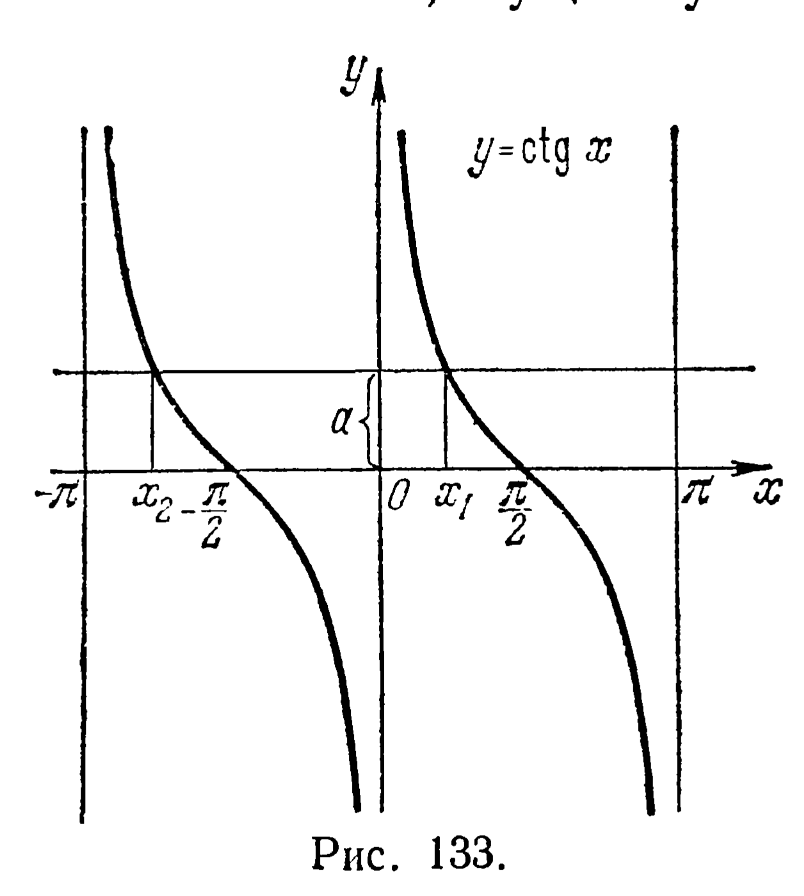


Рис. 133.

В качестве интервала оси Ox, на котором определяется обратная функция по отношению к функции $y=\operatorname{ctg} x$, берут обычно интервал $(0,\ \pi)$. На этом интервале функция $y=\operatorname{ctg} x$ монотонно убывает, принимая все значения от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, для любого y_0, лежащего на оси Oy, найдется, и притом только одно, значение x_0 из интервала $(0,\ \pi)$ такое, что $y_0=\operatorname{ctg} x_0$, а это и значит, что на указанном интервале существует обратная (однозначная) функция, которую называют *арккотангенсом* и обозначают так: $x=\operatorname{arcctg} y$. Меняя обозначение, будем писать:

$$y=\operatorname{arcctg} x. \qquad (133.1)$$

Пример 1. Найти $\alpha=\operatorname{arcctg}(-1/\sqrt{3})$.

Подробно данный пример можно сформулировать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от 0 до π, котангенс которого равен $-1/\sqrt{3}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, котангенс которых равен $-1/\sqrt{3}$, например: $-\pi/6$, $5\pi/6$, $-7\pi/6$ и т. д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится в интервале $(0,\ \pi)$. Таким аргументом будет $5\pi/6$. Итак,

$$\operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3})=5\pi/6.$$

Пример 2. Найти $\alpha = \operatorname{arcctg} 1$.

Решение. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы получим $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен с графиком функции $y = \operatorname{ctg} x$ относительно биссектрисы I—III координатных углов (см. рис. 21 в п. 35). Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$ вытекают из соответствующих свойств функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$ и видны из графика на рис. 134.

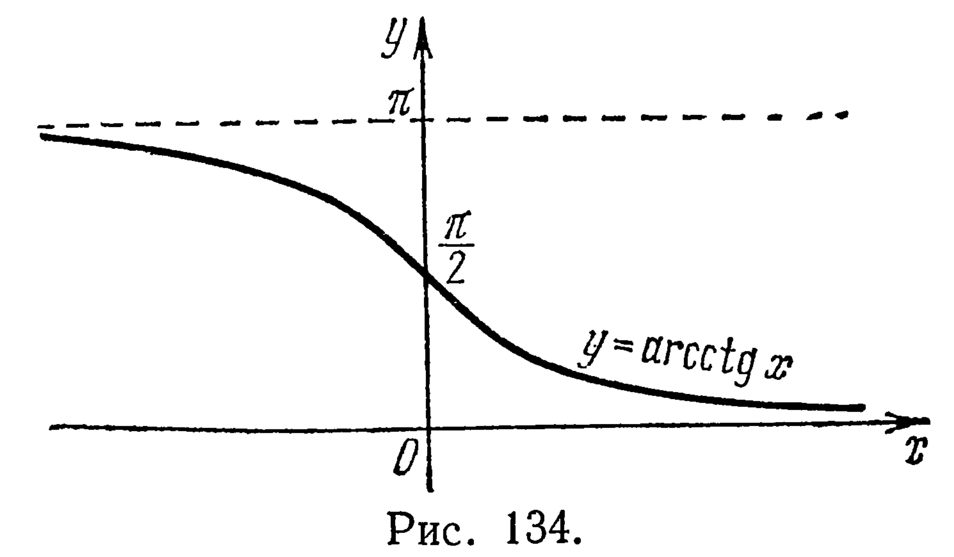


Рис. 134.

Перечислим эти свойства:

1) Область определения: x — любое действительное число.

2) Область изменения: интервал $(0, \pi)$.

3) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ ни четная и ни нечетная. Для нее выполняется тождество

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \qquad (133.2)$$

4) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывающая.

5) График пересекает ось Oy в точке $(0, \pi/2)$. К оси Ox при $x \to +\infty$ он приближается асимптотически (ось Ox является для него горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$). Прямая $y = \pi$ также служит асимптотой графика (при $x \to -\infty$).

6) $\operatorname{arcctg} x > 0$ при любых x.

134. Пример. Построим график функции $y = \arccos(1/x^2)$.

1) Область определения: функция определена для x, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \leqslant 1 \quad \text{или} \quad x^2 \geqslant 1.$$

Последнее неравенство удовлетворяется при $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$.

2) Область изменения значений функции: $0 \leqslant y < \pi/2$, так как $1/x^2 > 0$.

3) Функция четная, так как $y(-x) \equiv y(x)$.

4) Точки пересечения с осями координат:

а) с осью Oy $(x = 0)$ функция не может иметь точек пересечения, так как она определена только при $|x| \geqslant 1$;

б) с осью Ox $(y = 0)$ она пересекается в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ (нули функции), так как $1/x^2 = 1$ лишь при $x = \pm 1$.

5) Наименьшее и наибольшее значения функции в области определения. В силу четности функции достаточно ее исследовать для $x \geqslant 1$. Если $x = 1$, то $y(1) = \arccos 1 = 0$. Если $x \to +\infty$, то $1/x^2 \to 0$ $(1/x^2 > 0)$, следовательно, $\arccos(1/x^2) \to \pi/2$, причем

$\arccos(1/x^2) < \pi/2$. Итак, при $x=1$ (и при $x=-1$) функция принимает наименьшее значение, равное нулю, а при $x \to +\infty$ (и при $x \to -\infty$) стремится к $\pi/2$, оставаясь меньше $\pi/2$. Ни при каком x не выполняется равенство $\arccos(1/x^2) = \pi/2$, т. е. наибольшего значения наша функция не имеет.

6) Интервалы знакопостоянства: функция всюду в области определения неотрицательна, т. е. $\arccos(1/x^2) \geqslant 0$.

Для построения графика функции найдем некоторые опорные его точки, а затем соединим их плавной линией с учетом свойств функции.

Так как функция $y = \arccos(1/x^2)$ четная, то достаточно построить ее график для $x \geqslant 1$ $(1 \leqslant x < +\infty)$, а затем продолжить его симметрично относительно оси Oy для $x \leqslant -1$ $(-\infty < x \leqslant -1)$. Составим таблицу значений функции $y = \arccos(1/x^2)$ (с точностью до 0,01) для некоторых «хороших» значений x с непостоянным шагом h.

x	1,00	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,07$	$\sqrt[4]{2} \approx 1,19$	$\sqrt{2} \approx 1,41$	$x \to +\infty$
$y = \arccos\frac{1}{x^2}$	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,79$	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$	$y \to \frac{\pi}{2}\left(y < \frac{\pi}{2}\right)$

Соединив полученные опорные точки плавной линией и учтя, что прямая $y = \pi/2$ является горизонтальной асимптотой при

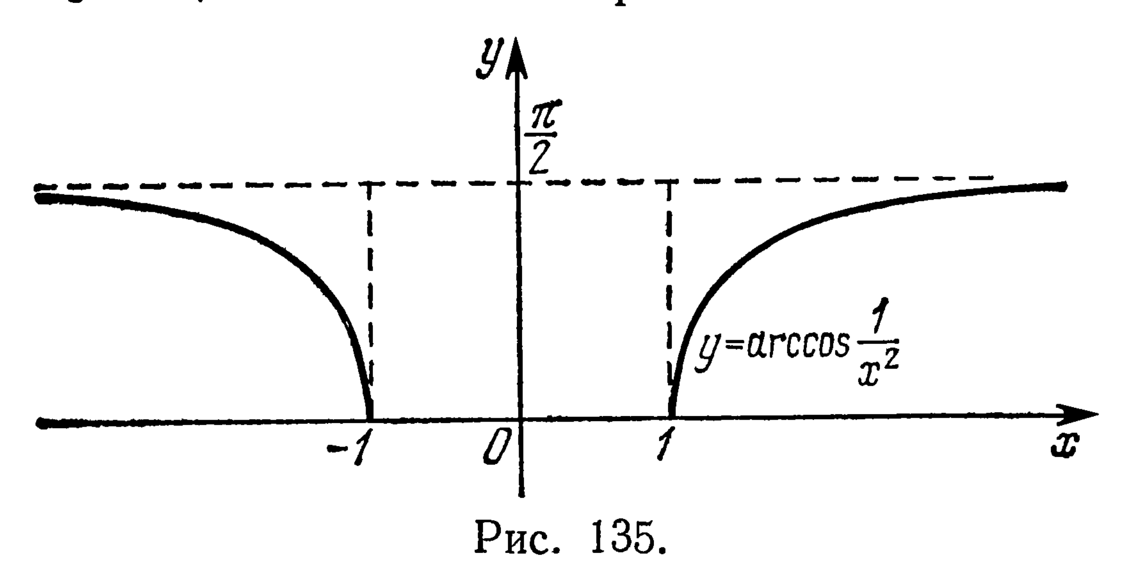


Рис. 135.

$x \to +\infty$, мы получим график функции $y = \arccos(1/x^2)$ на бесконечном полуинтервале $[1, +\infty)$. Продолжив его четным образом на бесконечный полуинтервал $(-\infty, -1]$, мы получим график функции $y = \arccos(1/x^2)$ во всей области ее определения (рис. 135).

Упражнения

Найти значения обратных тригонометрических функций:

1. $\arcsin(\sqrt{3}/2)$. **2.** $\arcsin(-1/2)$. **3.** $\arccos(-1/2)$. **4.** $\arccos(\sqrt{3}/2)$. **5.** $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$. **6.** $\operatorname{arctg} 1$. **7.** $\operatorname{arcctg}(-1)$. **8.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

Построить графики функций:

9. $y = \arcsin(1/x)$. **10.** $y = \arccos(1/x)$. **11.** $y = \arcsin(1/x^2)$. **12.** $y = \arcsin(1/|x|)$. **13.** $y = |\arcsin(1/x)|$.

§ 2. Операции над обратными тригонометрическими функциями

135. Тригонометрические операции. Рассмотрим некоторые простейшие тригонометрические операции над обратными тригонометрическими функциями (первая группа формул).

1) $y=\sin(\arcsin x)$. По определению

$$\sin(\arcsin x)\equiv x, \qquad |x|\leqslant 1. \tag{135.1}$$

Пример 1. $\sin(\arcsin 0{,}93)=0{,}93$.

2) $y=\cos(\arccos x)$. По определению

$$\cos(\arccos x)\equiv x, \qquad |x|\leqslant 1. \tag{135.2}$$

Пример 2. $\cos[\arccos(-0{,}79)]=-0{,}79$.

Следует подчеркнуть, что тождества (135.1) и (135.2) справедливы только в области определения (существования) арксинуса и арккосинуса, т. е. при $|x|\leqslant 1$. Например, нельзя писать $\sin(\arcsin 1{,}2)=1{,}2$, ибо выражение $\arcsin 1{,}2$ не имеет смысла.

На основании предыдущего заметим также, что функции

$$y=x, \qquad y=\sin(\arcsin x), \qquad y=\cos(\arccos x)$$

совпадают только в области определения арксинуса и арккосинуса, т. е. на отрезке $[-1, 1]$ оси Ox. Вне этого отрезка последние две функции просто не существуют.

3) $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. По определению

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\equiv x, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{135.3}$$

Пример 3. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 123)=123$.

4) $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$. По определению

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)\equiv x, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{135.4}$$

Пример 4. $\operatorname{ctg}[\operatorname{arcctg}(-987)]=-987$.

Функции $y=x$, $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ совпадают на всей оси Ox.

5) $y=\sin(\arccos x)$. Положив $\arccos x=\alpha$, получим $\cos\alpha=x$.

На основании формулы (100.3) будем иметь $\sin(\arccos x)=\sin\alpha=$ $=+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=+\sqrt{1-x^2}$, т. е.

$$\sin(\arccos x)=+\sqrt{1-x^2}, \qquad |x|\leqslant 1. \tag{135.5}$$

Мы взяли перед корнем знак «+» потому, что $\alpha=\arccos x$ удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

Пример 5. $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

6) $y=\cos(\arcsin x)$. Положив $\arcsin x=\alpha$, получим $\sin\alpha=x$.

На основании формулы (100.1) будем иметь

$$\cos(\arcsin x)=\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=+\sqrt{1-x^2},$$

т. е.

$$\cos(\arcsin x)=+\sqrt{1-x^2}, \qquad |x|\leqslant 1. \tag{135.6}$$

Мы взяли перед корнем знак «+» потому, что угол $\alpha=\arcsin x$ удовлетворяет неравенствам $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

Пример 6. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=+\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$.

7) На основании тождества $\operatorname{tg}\alpha = 1/\operatorname{ctg}\alpha$ имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0. \tag{135.7}$$

Пример 7. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(1/9)) = 9$.

8) На основании тождества $\operatorname{ctg}\alpha = 1/\operatorname{tg}\alpha$ имеем

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0. \tag{135.8}$$

Пример 8. $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{11}{10}\right) = \frac{10}{11}$.

9) На основании формулы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и предыдущих результатов получим еще формулу

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1. \tag{135.9}$$

Пример 9. $\operatorname{tg}[\arcsin(-1/\sqrt{2})] = \frac{-1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-{}^1/_2}} = -1$.

Аналогично предыдущему, рекомендуем читателю самостоятельно доказать следующие формулы:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty; \tag{135.10}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty; \tag{135.11}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad 0 < |x| \leqslant 1; \tag{135.12}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty; \tag{135.13}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty; \tag{135.14}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad 0 < |x| \leqslant 1; \tag{135.15}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1. \tag{135.16}$$

Пример 10. Вычислить:

$$A = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right), \quad \text{где} \quad |a| \leqslant |b|.$$

Решение. На основании формулы (125.5) имеем

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)}.$$

Знаменатель этой дроби преобразуем по формуле (123.2):

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(\arccos\frac{a}{b}\right)}{2}=\frac{a}{2b}.$$

Окончательно найдем: $A=2b/a$.

С помощью формул (135.1)—(135.16) получим ряд новых соотношений (вторая группа формул).

10) $y=\sin(2\arcsin x)$.

Обозначив $\arcsin x$ через α, будем иметь $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, откуда

$$\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}.$$

Мы воспользовались формулами (135.1) и (135.6). Итак,

$$\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2},\quad \text{где}\quad |x|\leqslant 1. \tag{135.17}$$

Пример 11. $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11) $y=\sin(2\arccos x)$. Имеем

$$\sin(2\arccos x)=2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x)=2x\sqrt{1-x^2},\ |x|\leqslant 1. \tag{135.18}$$

Пример 12. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{5}\right)=2\cdot\frac{1}{5}\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{4}{25}\sqrt{6}$.

12) $y=\cos(2\arccos x)$. Аналогично предыдущему, будем иметь

$$\cos(2\arccos x)=\cos^2(\arccos x)-\sin^2(\arccos x)=$$
$$=x^2-(1-x^2)=2x^2-1,\quad |x|\leqslant 1. \tag{135.19}$$

Рекомендуем читателю рассмотреть другие возможные случаи, аналогичные случаям 10) —12), и вывести соответствующие формулы. Например:

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{1-x^2},\quad |x|\neq 1; \tag{135.20}$$

$$\sin(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty. \tag{135.21}$$

Пример 13. Проверить равенство

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Решение. Вычислим левую и правую части предполагаемого равенства. Обозначим $\operatorname{arctg}(1/7)$ через α, тогда $\operatorname{tg}\alpha=1/7$. Далее, воспользовавшись формулой (122.2), получим

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-1/49}{1+1/49}=\frac{24}{25}.$$

Обозначим $\operatorname{arctg}(1/3)$ через β, тогда $\operatorname{tg}\beta=1/3$. Далее, на основании формул (119.1), (122.1) и (122.2) имеем

$$\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cos 2\beta=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=$$
$$=\frac{4\operatorname{tg}\beta(1-\operatorname{tg}^2\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\beta)^2}=\frac{4\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{9}\right)}{\left(1+\frac{1}{9}\right)^2}=\frac{24}{25}.$$

Следовательно, $\cos(2\operatorname{arctg}(^1/_7)) = \sin(4\operatorname{arctg}(^1/_3))$. Решая пример 13, мы попутно вывели еще две формулы:

$$\cos(2\operatorname{arctg}x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \qquad (135.22)$$

$$\sin(4\operatorname{arctg}x) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \qquad (135.23)$$

Выведем теперь некоторые формулы для тригонометрических функций от половины обратной тригонометрической функции (третья группа формул).

13) $y = \cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$. Обозначив $\arccos x$ через α, будем иметь $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. Так как $\alpha = \arccos x$, то $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, следовательно, $\alpha/2$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \alpha/2 \leqslant \pi/2$, поэтому перед корнем мы должны брать знак «+», и мы имеем

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad \text{где} \quad |x| \leqslant 1. \qquad (135.24)$$

Пример 14. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+{}^1/_2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

14) $y = \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$. Аналогично предыдущему, можно вывести следующую формулу:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}, \quad \text{где} \quad |x| \leqslant 1. \qquad (135.25)$$

Рекомендуем это сделать читателю.

Пример 15. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-{}^1/_2}{2}} = \frac{1}{2}$.

Используя формулы сложения и полученные выше формулы, выведем еще ряд соотношений (четвертая группа формул).

15) $A = \sin(\arcsin x + \arcsin y)$. На основании формул (116.1), (135.1) и (135.6) будем иметь

$$A = \sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Итак,

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \quad \text{где} \quad |x| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |y| \leqslant 1. \qquad (135.26)$$

Пример 16. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{16}{25}} + \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.

16) $A = \sin(\arccos x + \arccos y)$. На основании формул (116.1), (135.5) и (135.2) будем иметь

$$A = \sin(\arccos x + \arccos y) = \sin(\arccos x)\cos(\arccos y) + \cos(\arccos x)\sin(\arccos y) = y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2}.$$

Итак,

$$\sin(\arccos x+\arccos y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}, \quad \text{где} \quad |x|\leqslant 1 \quad \text{и} \quad |y|\leqslant 1. \tag{135.27}$$

Пример 17. $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{4}}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{12}\approx 0{,}62.$

В этой группе формул можно образовать очень много различных соотношений. Запоминать все эти формулы не имеет смысла. В дальнейшем при решении примеров мы в каждом конкретном случае будем выводить ту или иную формулу.

Пример 18. Вычислить: $\sin\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}(-2)\right]$.

Решение. В общем виде наш пример можно записать так:

$$A=\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x-2\operatorname{arcctg} y\right).$$

На основании формул (116.2), (135.24), (135.25), (135.21) и (135.22) будем иметь

$$A=\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x-2\operatorname{arcctg} y\right)=$$
$$=\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)\cos(2\operatorname{arcctg} y)-\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)\sin(2\operatorname{arcctg} y)=$$
$$=\sqrt{\frac{1-x}{2}}\frac{y^2-1}{y^2+1}-\sqrt{\frac{1+x}{2}}\frac{2y}{y^2+1}, \quad \text{где} \quad |x|\leqslant 1, \quad \text{а} \quad y\text{ — любое число.} \tag{135.28}$$

В нашем конкретном случае $x={}^3/_5$ и $y=-2$. Следовательно,

$$\sin\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}(-2)\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=$$
$$=\frac{11}{5\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}\approx 0{,}98.$$

Пример 19. Вычислить: $2\operatorname{tg}\left[\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right]$, где $a>0$.

Решение. В общем виде наш пример можно записать так:

$$A=2\operatorname{tg}(\arccos x-\arccos y).$$

На основании формул (117.3) и (135.12) будем иметь

$$\operatorname{tg}(\arccos x-\arccos y)=\frac{\operatorname{tg}(\arccos x)-\operatorname{tg}(\arccos y)}{1+\operatorname{tg}(\arccos x)\operatorname{tg}(\arccos y)}=$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}}{1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}}=\frac{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}}{xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}, \tag{135.29}$$

где $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ и $xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\neq 0$. В нашем случае $x=1/\sqrt{1+a^2}$

и $y=a/\sqrt{1+a^2}$. Следовательно,

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\frac{1}{1+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\frac{a^2}{1+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Окончательно получаем:

$$2\operatorname{tg}\left[\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right]=2\frac{\frac{a^2}{1+a^2}-\frac{1}{1+a^2}}{\frac{a}{1+a^2}+\frac{a}{1+a^2}}=\frac{a^2-1}{a}.$$

136. Операции сложения (вычитания). Выведем теперь некоторые соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

Теорема 1. *Для всех x из отрезка $[-1, 1]$ имеет место тождество*

$$\arcsin x+\arccos x=\pi/2. \tag{136.1}$$

Доказательство. По определению

$$-\pi/2\leqslant\arcsin x\leqslant\pi/2, \quad 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi \quad \text{и} \quad \sin(\arcsin x)=x.$$

Заметим, что $-\pi/2\leqslant\pi/2-\arccos x\leqslant\pi/2$. По формуле приведения имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

Итак, аргументы $\arcsin x$ и $\pi/2-\arccos x$ заключены в отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, в котором синус монотонно возрастает от -1 до $+1$, и имеют одинаковый синус, равный x. Следовательно, сами аргументы также равны, т. е. $\arcsin x=\pi/2-\arccos x$, откуда и получаем тождество (136.1).

Теорема 2. *Для всех x $(-\infty<x<+\infty)$ имеет место тождество*

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\pi/2. \tag{136.2}$$

Тождество (136.2) доказывается так же, как и тождество (136.1). Рекомендуем читателю провести это доказательство самостоятельно.

Советуем читателю в качестве упражнения проиллюстрировать тождества (136.1) и (136.2) на чертежах, построив на одном из них графики функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$, а на другом — графики функций $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$.

Аналогично предыдущему могут быть получены формулы для $\arcsin x+\arcsin y$, $\arccos x+\arccos y$, $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y$ и т. д. Мы не будем их выводить, а приведем ряд примеров, на которых покажем метод решения таких задач.

Пример 1. Проверить, имеет ли место равенство

$$\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Обозначим $\arcsin(5/13)=\alpha$ и $\arcsin(12/13)=\beta$. Заметим, что $0<\alpha<\pi/2$ и $0<\beta<\pi/2$, следовательно, $0<\alpha+\beta<\pi$. Найдем теперь $\cos(\alpha+\beta)$. Согласно формуле (115.4) и формулам п. 135 имеем

$$\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)-\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)=$$
$$=\left(+\sqrt{1-\frac{25}{169}}\right)\left(+\sqrt{1-\frac{144}{169}}\right)-\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}-\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=0.$$

Итак, $\cos(\alpha+\beta)=0$, причем $0<\alpha+\beta<\pi$. Следовательно, $\alpha+\beta=\pi/2$. Если бы мы знали только, что $\cos(\alpha+\beta)=0$, то отсюда еще нельзя было бы заключить, что $\alpha+\beta=\pi/2$, ибо, например, и $\cos(5\pi/2)=0$. Здесь существенно то, что аргумент $\alpha+\beta$ находится в интервале монотонности косинуса, а в интервале монотонности функция не может принимать одинаковые значения в различных точках интервала.

Пример 2. Проверить, имеет ли место равенство

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{5}{2}\pi.$$

Решение. Обозначим $\arcsin(4/5)=\alpha$, $\arcsin(5/13)=\beta$ и $\arcsin(16/65)=\gamma$. Заметим, что $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$ и $0<\gamma<\pi/2$. Следовательно, $0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi/2$. Поэтому $\alpha+\beta+\gamma$ не может равняться $5\pi/2$. Интересно, что все же $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1$ и $\sin\frac{5}{2}\pi=1$. Проверим неочевидное равенство $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1$:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{63}{65}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{63}{65}+\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{65}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{16}{65}=1.$$

Итак, $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\frac{5\pi}{2}=1$, но $\alpha+\beta+\gamma\neq\frac{5\pi}{2}$.

Рекомендуем читателям доказать, что $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Проверить, имеет ли место равенство

$$\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{77}{85}=\arcsin\frac{8}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right). \qquad (*)$$

Решение. На основании формулы (131.2) $\arccos(-^3/_5)=\pi-\arccos(^3/_5)$. Предполагаемое равенство (*) перейдет в равенство

$$\arcsin\frac{77}{85}-\arcsin\frac{8}{17}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{3}{5}. \qquad (**)$$

Воспользовавшись формулой (136.1), получим

$$\arcsin\frac{77}{85}-\arcsin\frac{8}{17}=\arcsin\frac{3}{5}. \qquad (***)$$

Обозначим $\arcsin(77/85)=\alpha$, $\arcsin(8/17)=\beta$. Заметим, что

$$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad 0<\arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}.$$

Если мы докажем теперь, что $\sin(\arcsin(77/85)-\arcsin(8/17))=3/5$, то будет

доказано равенство (***), а тем самым и предполагаемое равенство (*):

$$\sin\left(\arcsin\frac{77}{85}-\arcsin\frac{8}{17}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{77}{85}\right)\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)-$$

$$-\cos\left(\arcsin\frac{77}{85}\right)\sin\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)=\frac{77}{85}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}-\frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{77}{85}\right)^2}=$$

$$=\frac{77}{85}\cdot\frac{15}{17}-\frac{8}{17}\cdot\frac{36}{85}=\frac{1155-288}{17\cdot 85}=\frac{3}{5}.$$

Итак, $\sin(\arcsin(77/85)-\arcsin(8/17))=3/5$. Следовательно, справедливо и равенство (*).

Пример 4. Доказать, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}. \qquad (*)$$

Решение. Обозначим $\alpha_1=\operatorname{arctg}(^1/_3)$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}(^1/_5)$, $\alpha_3=\operatorname{arctg}(^1/_7)$ и $\alpha_4=\operatorname{arctg}(^1/_8)$. Заметим, что каждое из α_i, $i=1, 2, 3, 4$, заключено в пределах $0<\alpha_i<\pi/4$. Следовательно,

$$0<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4<\pi.$$

Если нам удастся доказать теперь, что $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=1$, то предполагаемое равенство (*) будет доказано, ибо единственный аргумент в интервале $(0, \pi)$, тангенс которого равен 1, есть $\pi/4$. Заметим, что

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{4}{7}$$

и

$$\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{3}{11}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)+\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}{1-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}=1.$$

Следовательно, равенство (*) имеет место.

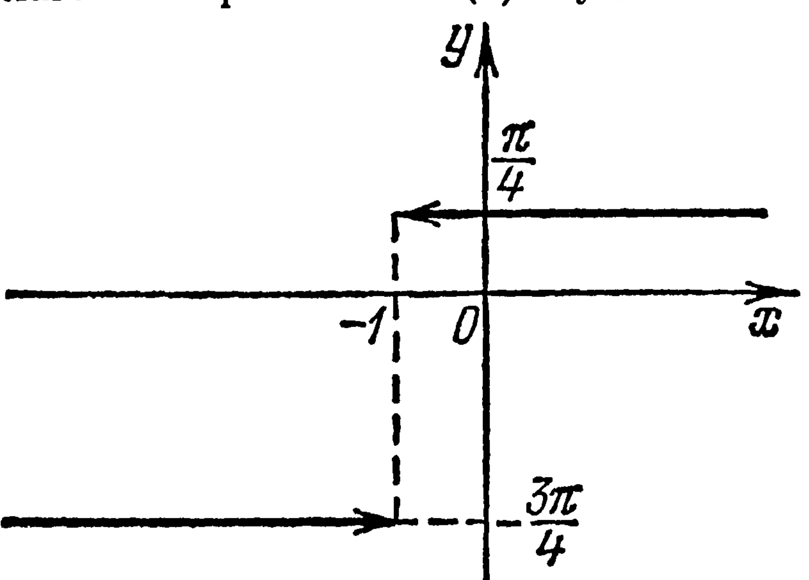


Рис. 136.

Пример 5. Исследовать функцию $y=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ и построить ее график.

Решение. Функция определена всюду, кроме $x=-1$. Обозначим $\alpha=\operatorname{arctg}x$ и $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$. Заметим, что $-\pi/2<\alpha<\pi/2$ и $-\pi/2<\beta<$ $<\pi/2$; следовательно, $-\pi<\alpha+\beta<\pi$. Теперь найдем

$$\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}}=1.$$

Итак, мы имеем $-\pi<y<\pi$ и $\operatorname{tg}y=1$, а это возможно, если $y=\pi/4$ или $y=-3\pi/4$. Равенство $y=-3\pi/4$ может иметь место только тогда, когда одновременно $\operatorname{arctg}x<0$ и $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}<0$, а эти последние неравенства

выполняются, если одновременно $x<0$ и $\frac{1-x}{1+x}<0$. Система неравенств

$$\begin{cases} x<0, \\ \frac{1-x}{1+x}<0 \end{cases}$$

удовлетворяется, если $x<-1$. Если же $x>-1$, то $y=\pi/4$. Итак,

$$y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases} \pi/4, & \text{если } x>-1, \\ -3\pi/4, & \text{если } x<-1. \end{cases}$$

График исследуемой функции изображен на рис. 136.

Упражнения

1. Вычислить: а) $\sin(\arccos(^4/_5))$; б) $\cos(\arcsin(^1/_3))$; в) $\cos(\arcsin(-^2/_3))$; г) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$; д) $\operatorname{tg}(\arccos(^1/_4))$; е) $\cos(\operatorname{arctg}(-^1/_2))$; ж) $\operatorname{ctg}(\arccos(^1/_5))$; з) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}+\frac{3\pi}{4}\right]-\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}-\frac{3\pi}{4}\right]$, где $0<|a|\leqslant|b|$.

2. Вычислить:

а) $\sin(2\arcsin(-\sqrt{3}/2))$; б) $\sin(2\arccos(^1/_4))$; в) $\cos(2\arccos(-^1/_6))$; г) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(-^4/_5))$; д) $\sin(2\operatorname{arctg}\sqrt{7})$; е) $\cos(2\operatorname{arctg}(-\sqrt{11}))$.

3. Проверить, имеют ли место равенства:

а) $\sin(2\operatorname{arctg}(^1/_2))=\cos(2\operatorname{arctg}(^1/_3))$; б) $\sin(4\operatorname{arctg}(^1/_3))=\sin(4\operatorname{arctg}(^1/_2))$.

4. Вычислить:

а) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; б) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

5. Доказать тождества:

а) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$, где $|x|\leqslant 1$ и $x\neq 0$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, где $|x|\leqslant 1$.

6. Вычислить:

а) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

б) $\sin\left[\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right]+\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5}\right)$;

в) $\frac{1}{2}-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

7. Вычислить:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{5}{13}\right)$; б) $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}+\arccos\frac{1}{5}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}-\arccos\frac{5}{13}\right)$; г) $\sin^2\left[\operatorname{arctg} 2-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$; д) $\sin\left(\arcsin\frac{16}{65}+\arcsin\frac{63}{65}\right)$; е) $\cos\left(\arccos\frac{8}{17}+\arccos\frac{15}{17}\right)$.

8. Доказать следующие тождества:

а) $\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, где $|x|\leqslant 1$ и $|y|\leqslant 1$; б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y)=\frac{x+y}{1-xy}$, если $xy\neq 1$.

9. Проверить, имеют ли место равенства:

а) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$; б) $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)+\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)=\pi$; в) $\arcsin\frac{15}{17}+\arccos\frac{36}{85}+\arccos\frac{8}{17}+\arcsin\frac{77}{85}=\pi$; г) $\operatorname{arcctg} 2+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arcctg}\frac{3}{2}=\operatorname{arctg} 5$; д) $2\operatorname{arctg}(-7+5\sqrt{2})+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; е) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})^2$; ж) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{5}{4}\pi$; з) $\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\frac{\pi}{3}$, если $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

10. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; б) $y=\arcsin\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}$; в) $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(1-x))$.

§ 3. Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями

137. Функция $y=\arcsin(\sin x)$. Исследуем функцию $y=\arcsin(\sin x)$ и построим ее график.

1) Область определения (существования): функция определена для всех x $(-\infty<x<+\infty)$. Напомним еще раз, что x — число, а $\sin x$ — тригонометрическая функция числового аргумента.

2) Область изменения функции: из определения арксинуса следует, что $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$.

3) Сформулируем словесно правило, определяющее y по заданному x: каждому значению аргумента x $(-\infty<x<+\infty)$ ставится в соответствие значение функции y из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$, т. е. $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$, такое, что $\sin y=\sin x$.

Пример 1. $y=\arcsin(\sin(\pi/3))=\pi/3$. Здесь $x=\pi/3$ и $y=\pi/3$, ибо $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$.

Пример 2. $y=\arcsin(\sin(2\pi/3))=\pi/3$. Здесь $x=2\pi/3$, а $y=\pi/3$, так как $\sin(\pi/3)=\sin(2\pi/3)$ и $-\pi/2<\pi/3\leqslant\pi/2$. Ошибкой являлось бы утверждение, что $\arcsin(\sin 2\pi/3)=2\pi/3$, ибо аргумент $2\pi/3$ не попадает в отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$.

4) Функция нечетна. В самом деле,

$$\sin(-x)=-\sin x \quad \text{и} \quad \arcsin(-u)=-\arcsin u.$$

Следовательно,

$$\arcsin[\sin(-x)]=-\arcsin(\sin x).$$

5) Функция периодическая с периодом 2π, так как $\sin x$ — периодическая функция с основным периодом 2π.

6) График функции $y=\arcsin(\sin x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

а) При $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ имеем

$$y=\arcsin(\sin x)=x,$$

ибо $\sin y=\sin x$ и $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$.

б) При $\pi/2\leqslant x\leqslant\pi$ получим

$$y=\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(\pi-x)]=\pi-x,$$

ибо $\sin y=\sin(\pi-x)=\sin x$ и $0\leqslant\pi-x\leqslant\pi/2$.

Итак,

$$y=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \pi - x, & \text{если} \quad \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Построив график функции $y=\arcsin(\sin x)$ на отрезке $[0, \pi]$, мы его продолжаем симметрично относительно начала координат на отрезок $[-\pi, 0]$, учитывая нечетность данной функции. График функции, построенный уже на отрезке $[-\pi, \pi]$, мы, используя периодичность данной функции, продолжаем на всю числовую ось. График функции $y=\arcsin(\sin x)$ изображен на рис. 137.

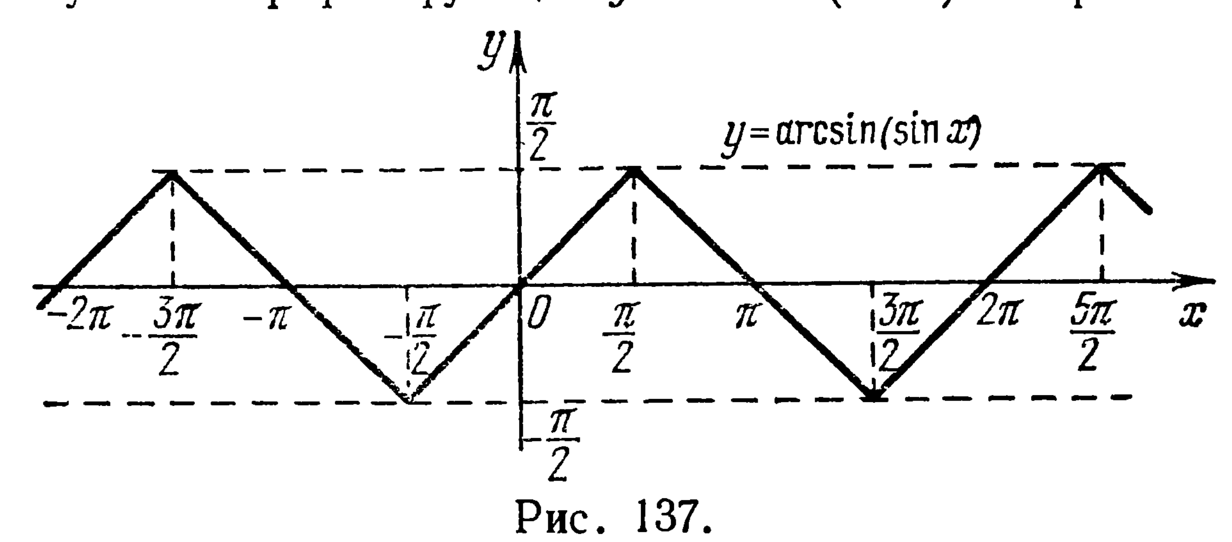


Рис. 137.

Пример 3. Найти $\alpha=\arcsin(\sin 2)$.

Решение. Требуется найти угол α, лежащий в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, синус которого равен $\sin 2$. Заметим, что если угол x удовлетворяет неравенствам $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то равенство $\arcsin(\sin x)=x$ справедливо. В противном же случае последнее равенство не имеет места. В нашем же случае $\pi/2 < 2 < \pi$. Применив формулу приведения, получим $\sin 2=\sin(\pi-2)$. Теперь уже угол $\pi-2$ удовлетворяет неравенствам $-\pi/2 < \pi-2 \leqslant \pi/2$, и поэтому можно писать:

$$\arcsin[\sin(\pi-2)]=\pi-2.$$

Следовательно, $\alpha=\arcsin(\sin 2)=\pi-2$.

Пример 4. Вычислить: $\arcsin\{\cos[2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}+1)]\}$.

Решение. Воспользовавшись формулой $\cos(2\,\mathrm{arctg}\,x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, будем иметь

$$\cos[2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}+1)]=\frac{1-(\sqrt{2}+1)^2}{1+(\sqrt{2}+1)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

После этого получим

$$\arcsin\{\cos[2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}+1)]\}=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

138. Функция $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$. Исследуем функцию $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$ и построим ее график.

1) Область определения (существования): функция определена для всех x, за исключением $x_n=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) Область изменения функции: из определения арктангенса следует, что $-\pi/2 < y < \pi/2$.

3) Каждому значению x из области определения данной функции ставится в соответствие значение функции y, находящееся в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, такое, что $\mathrm{tg}\,y=\mathrm{tg}\,x$.

Пример 1. $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\pi/6))=\pi/6$. Здесь $x=\pi/6$ и $y=\pi/6$, ибо $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Пример 2. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(7\pi/6))=\pi/6$. Здесь $x=7\pi/6$, а $y=\pi/6$, ибо $\operatorname{tg}(\pi/6)=\operatorname{tg}(7\pi/6)$ и $-\pi/2<\pi/6<\pi/2$. Ошибкой являлось бы утверждение, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(7\pi/6))=7\pi/6$, так как аргумент $7\pi/6$ не попадает в интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

4) Функция нечетна, так как $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg}(-u)=-\operatorname{arctg} u$. Следовательно, $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-x)]=-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

5) Функция периодична с периодом π, так как $\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с периодом π.

6) График функции $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ на интервале $(0, \pi/2)$. В левом конце интервала $(0, \pi/2)$, т. е. при $x=0$, функция определена и равна 0, так как $y(0)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0)=\operatorname{arctg} 0=0$. В правом же конце интервала $(0, \pi/2)$, т.е. при $x=\pi/2$, функция не определена, ибо при $x=\pi/2$ не существует $\operatorname{tg} x$. Следовательно, функция $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ определена на полуоткрытом отрезке $[0, \pi/2)$, т. е. при

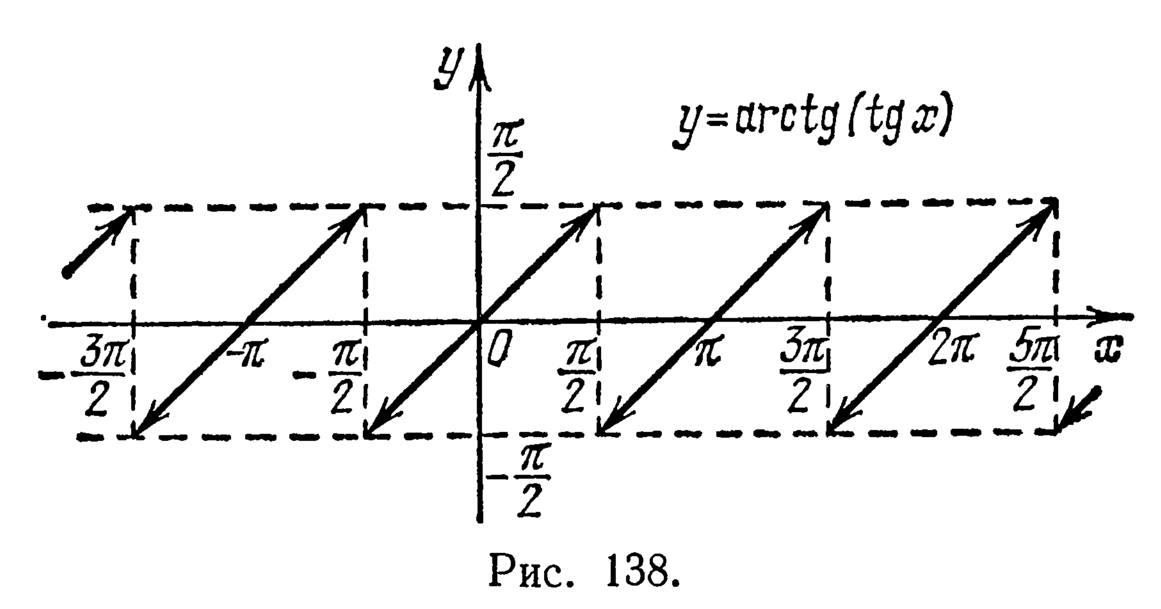


Рис. 138.

$0 \leqslant x<\pi/2$. На этом полуоткрытом отрезке $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$. При $x \to \pi/2$ $(x<\pi/2)$ $\operatorname{tg} x \to +\infty$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \to \pi/2$. График функции $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ изображен на рис. 138.

Упражнения

Построить графики функций:

1. $y=\arccos(\cos x)$. **2.** $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Найти:

3. $\arcsin(\sin 1)$. **4.** $\arcsin(\sin 3)$. **5.** $\arcsin(\sin 4)$. **6.** $\arcsin(\sin 5)$. **7.** $\arcsin(\sin 6)$. **8.** $\arcsin(\sin 7)$.

Вычислить:

9. $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)\right]$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

10. $\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{9}+\operatorname{arcctg}\frac{4}{5}\right)\right]$.

11. $\arccos\left[\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right)\right]$.

12. $\arcsin\left[\cos 2\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{11}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\right]$.

13. $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

14. $\arccos\{\cos[2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)]\}$.

Глава XII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

В этой главе мы рассмотрим некоторые уравнения, а также простейшие системы уравнений, содержащие неизвестную под знаком тригонометрических функций. Такие уравнения называются *тригонометрическими уравнениями.*

Приведем некоторые примеры тригонометрических уравнений и их систем:

1) $2\sin x - 1 = 0$; 2) $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

3) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$; 4) $\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ x + y = \alpha; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \sqrt{3}, \\ x + y + z = \pi; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 3/2, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3}/2. \end{cases}$

Решение различных типов тригонометрических уравнений большей частью основано на сведении их к некоторым простейшим уравнениям, которые мы рассмотрим ниже. При этом остаются в силе общие правила, относящиеся к решению уравнений. В частности, данное уравнение не всегда приводится к простейшей форме с помощью одних лишь равносильных преобразований. Поэтому следует проверить найденные решения, подставляя их в исходное уравнение.

Тригонометрические уравнения слишком разнообразны для того, чтобы пытаться дать их общую классификацию или общий метод решения. Мы можем указать лишь способы решения некоторых типов таких уравнений.

§ 1. Уравнения, разрешенные относительно одной из тригонометрических функций

При решении различных тригонометрических уравнений мы будем часто приходить к некоторым простейшим уравнениям, решения которых следует запомнить. Приведем эти уравнения. Для того чтобы можно было дать геометрическую

иллюстрацию к этим уравнениям, будем считать x углом в радианной мере.

139. Уравнение $\sin x = a$. Уравнение

$$\sin x = a \qquad (139.1)$$

имеет решение при $|a| \leqslant 1$. Для вывода общей формулы, которая заключает в себе все корни нашего уравнения, воспользуемся рис. 127. Допустим, что мы нашли какой-то корень x_1 уравнения $\sin x = a$:

$$\sin x_1 = a.$$

Тогда, в силу периодичности функции $\sin x$, имеем

$$\sin(x_1 + 2k\pi) = \sin x_1 = a,$$

т. е. и числа вида $x_1 + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют уравнению (139.1). Заметим еще, что и

$$\sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a,$$

т. е. $\pi - x_1$ также удовлетворяет уравнению (139.1). Следовательно, и числа вида $\pi - x_1 + 2k\pi$ также удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, зная одно какое-то значение x_1, удовлетворяющее уравнению $\sin x = a$, мы можем получить две серии значений аргумента, удовлетворяющих этому же уравнению:

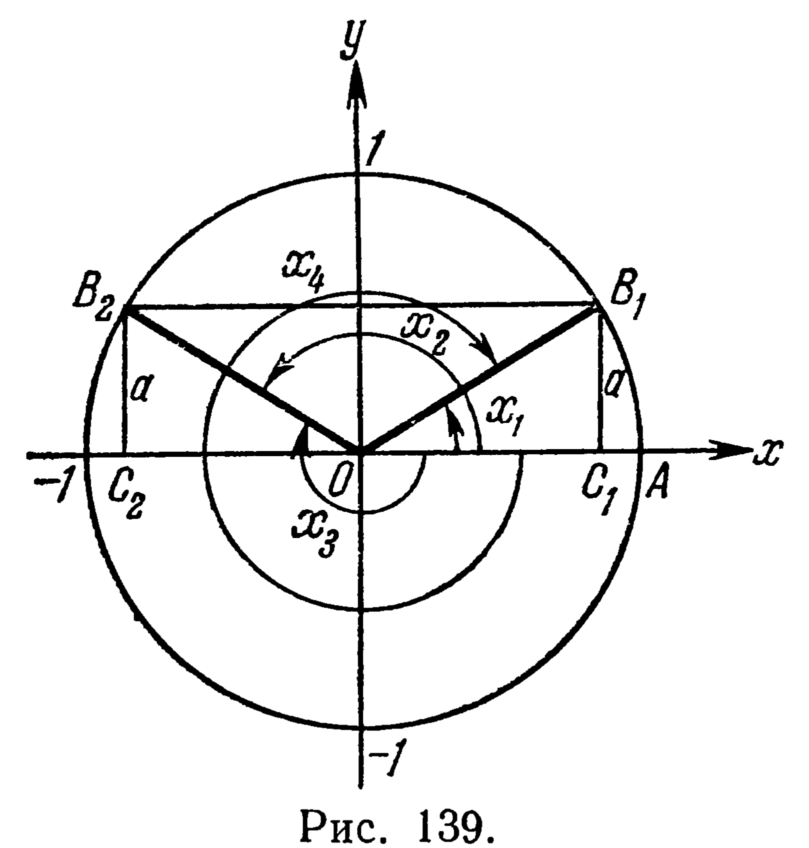


Рис. 139.

$$2k\pi + x_1, \qquad (139.2)$$

$$(2k+1)\pi - x_1, \qquad (139.3)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В качестве x_1 будем, как правило, брать $\arcsin a$.

Объединив две серии (139.2) и (139.3) корней данного уравнения $\sin x = a$ одной формулой, мы будем записывать в дальнейшем его общее решение (совокупность всех корней) в виде

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \qquad (139.4)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $-\pi/2 \leqslant \arcsin a \leqslant \pi/2$.

Поясним формулу (139.4) и другим способом, с помощью рис. 139. Известно, что $\sin x = a$ (на рис. 139 $OA = 1$, $B_1C_1 = B_2C_2 = a > 0$).

Уравнению (139.1) удовлетворят углы:

а) положительные: $x_1 + 2k\pi$ и $x_2 + 2k\pi$ ($k = 0, +1, +2, \ldots$),

б) отрицательные: $x_3 + 2k\pi$ и $x_4 + 2k\pi$ ($k = 0, -1, -2, \ldots$).

Все эти углы можно задать одной формулой (139.4), и, обратно, любой угол, полученный по формуле (139.4), есть угол либо вида а), либо вида б). Проверим, например, обратное утверждение для положительных углов.

Если $n=2k\geqslant 0$ (четное число), то из (139.4) получаем

$$x=\underbrace{\arcsin a}_{x_1}+2k\pi=x_1+2k\pi;$$

если же $n=2k+1\geqslant 0$ (нечетное число), то из (139.4) получаем

$$x=-\arcsin a+(2k+1)\pi=\underbrace{\pi-\arcsin a}_{x_2}+2k\pi=x_2+2k\pi.$$

Аналогичную проверку рекомендуем читателю сделать самостоятельно и для отрицательных углов.

Пример 1. $\sin x={}^1/_2$.

Решение. $x=n\pi+(-1)^n\arcsin({}^1/_2)$. Так как $\arcsin{}^1/_2=\pi/6$, то $x=n\pi+(-1)^n\pi/6$.

Пример 2. $\sin x=-\sqrt{3}/2$.

Решение. $x=n\pi+(-1)^n\arcsin\left(-\sqrt{3}/2\right)$. Так как $\arcsin\left(-\sqrt{3}/2\right)=-\pi/3$, то $x=n\pi+(-1)^{n+1}\pi/3$.

Замечание. При выводе формулы (139.4) мы воспользовались рис. 127, на котором $0<a<1$ и $0<x_1<\pi/2$. Очевидно, что при помощи этой формулы получаются все корни уравнения $\sin x=a$. Формула (139.4) остается в силе и тогда, когда $-1<a<0$, а также при $a=0$, 1 или -1. Однако эти последние случаи удобней рассмотреть особо.

Допустим, что $a=1$ или $a=-1$. Корни уравнения $\sin x=1$ можно записать так:

$$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi=\frac{\pi}{2}(4n+1), \tag{139.5}$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а корни уравнения $\sin x=-1$ можно записать так:

$$x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi=\frac{\pi}{2}(4n-1), \tag{139.6}$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Допустим теперь, что $a=0$. Корни уравнения $\sin x=0$ можно записать так:

$$x=n\pi. \tag{139.7}$$

Рекомендуем читателю получить формулы (139.5), (139.6) и (139.7), пользуясь общим правилом (139.4).

140. Уравнение $\cos x=a$. Уравнение

$$\cos x=a \tag{140.1}$$

имеет решение при $|a|\leqslant 1$. Для вывода общей формулы корней уравнения (140.1) воспользуемся рис. 128. Допустим, что мы нашли какое-нибудь решение x_1 уравнения (140.1): $\cos x_1=a$.

Тогда в силу периодичности $\cos(x_1+2n\pi)=\cos x_1=a$, т. е. и числа вида $x_1+2n\pi$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют уравнению $\cos x=a$. В силу четности косинуса $\cos(-x_1)=\cos x_1=a$; применив еще свойство периодичности, мы получим, что числа вида $-x_1+2n\pi$ также удовлетворяют уравнению $\cos x=a$. (На рис. 128 мы видим, что $x_2=-x_1$.) Следовательно, зная одно какое-либо значение x_1, удовлетворяющее уравнению $\cos x=a$, мы можем получить две серии значений аргумента, удовлетворяющих этому же уравнению:

$$2n\pi+x_1, \tag{140.2}$$
$$2n\pi-x_1, \tag{140.3}$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В качестве x_1 будем, как правило, брать $\arccos a$.

Объединив две серии (140.2) и (140.3) корней уравнения $\cos x=a$ одной формулой, мы будем писать в дальнейшем его общее решение (совокупность всех корней) в виде

$$x=2n\pi\pm\arccos a, \tag{140.4}$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $0\leqslant\arccos a\leqslant\pi$.

Рекомендуем читателю пояснить формулу (140.4) с помощью рисунка, аналогичного рис. 139.

Пример 1. $\cos x=\sqrt{3}/2$.

Решение. $x=2n\pi\pm\arccos(\sqrt{3}/2)=2n\pi\pm\pi/6$.

Пример 2. $\cos x=-{}^1/_2$.

Решение. $x=2n\pi\pm\arccos(-{}^1/_2)=2n\pi\pm 2\pi/3$.

Пример 3. $\cos x=0{,}995$.

Решение. $x=2n\pi\pm\arccos 0{,}995\approx\pm 0{,}1+2\pi n$ (см. приложение II).

Замечание. При выводе формулы (140.4) мы воспользовались рис. 128, на котором $0<a<1$ и $0<x_1<\pi/2$. Очевидно, что при помощи этой формулы получаются все корни уравнения $\cos x=a$. Рекомендуем читателю доказать, что формулой (140.4) можно пользоваться и во всех остальных случаях ($-1<a<0$, $a=0$, $a=-1$ и $a=1$), если учесть, что $\arccos 1=0$, $\arccos(-1)=\pi$ и $\arccos 0=\pi/2$. Но все-таки в этих частных случаях ($a=-1$, $a=0$ и $a=1$) проще пользоваться другими формулами.

Уравнение $\cos x=-1$ имеет корни:

$$x=\pi+2n\pi=(2n+1)\pi, \quad \text{где} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{140.5}$$

Уравнение $\cos x=1$ имеет корни:

$$x=2n\pi, \quad \text{где} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{140.6}$$

Уравнение $\cos x=0$ имеет корни:

$$x=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad \text{где} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{140.7}$$

141. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a \tag{141.1}$$

имеет решение при любом a $(-\infty < a < +\infty)$. Воспользуемся рис. 129 для вывода общей формулы, которая заключает в себе все корни уравнения (141.1). Допустим, что мы нашли какое-нибудь решение x_1 уравнения (141.1), т. е. $\operatorname{tg} x_1 = a$. Тогда, в силу периодичности, $\operatorname{tg}(x_1 + n\pi) = \operatorname{tg} x_1 = a$, т. е. и числа вида $x_1 + n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x = a$. Следовательно, зная одно какое-то значение x_1, удовлетворяющее уравнению $\operatorname{tg} x = a$, мы можем получить общее решение (совокупность всех корней) в виде

$$x = n\pi + x_1. \tag{141.2}$$

В качестве x_1 будем, как правило, брать $\operatorname{arctg} a$. Итак, общее решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ выражается формулой

$$x = n\pi + \operatorname{arctg} a, \tag{141.3}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $-\pi/2 < \operatorname{arctg} a < \pi/2$.

Рекомендуем читателю пояснить формулу (141.3) с помощью чертежа.

Пример 1. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. $x = n\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = n\pi + \pi/3$.

Пример 2. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}/3$.

Решение. $x = n\pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3) = n\pi - \pi/6$.

Пример 3. $\operatorname{tg} x = -1{,}9648$.

Решение. $x = n\pi + \operatorname{arctg}(-1{,}9648) = n\pi - \operatorname{arctg}(1{,}9648) \approx \approx n\pi - 1{,}1$ (см. приложение II).

142. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$. Уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a \tag{142.1}$$

имеет решение при любом a $(-\infty < a < +\infty)$. Для вывода общей формулы корней уравнения (142.1) воспользуемся рис. 130. Допустим, что мы нашли какое-нибудь решение x_1 уравнения (142.1), т. е. $\operatorname{ctg} x_1 = a$. Тогда, в силу периодичности, $\operatorname{ctg}(x_1 + n\pi) = \operatorname{ctg} x_1 = a$, т. е. и числа вида $x_1 + n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют уравнению $\operatorname{ctg} x = a$. Следовательно, зная одно какое-то значение x_1, удовлетворяющее уравнению $\operatorname{ctg} x = a$, мы можем получить общее решение в виде

$$x = n\pi + x_1. \tag{142.2}$$

В качестве x_1 будем, как правило, брать $\operatorname{arcctg} a$. Итак, общее решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ выражается формулой

$$x = n\pi + \operatorname{arcctg} a, \tag{142.3}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$.

Рекомендуем читателю пояснить формулу (142.3) с помощью чертежа.

Пример 1. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Решение. $x = n\pi + \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = n\pi + \pi/6$.

Пример 2. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}/3$.

Решение. $x = n\pi + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}/3) = n\pi + 2\pi/3$.

Пример 3. $\operatorname{ctg} x = -28{,}64$.

Решение. $x = n\pi + \operatorname{arcctg}(-28{,}64)$. Воспользовавшись формулой $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, будем иметь $\operatorname{arcctg}(-28{,}64) = \pi - \operatorname{arcctg} 28{,}64 \approx \pi - 0{,}0349$ (см. приложение I). Следовательно, $x \approx n\pi + \pi - 0{,}0349 = (n+1)\pi - 0{,}0349$.

143. Некоторые дополнения. Если в уравнениях $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ известно, что x — угол в градусной мере, то общие решения нужно записывать по-другому.

Для уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, нужно писать:

$$x = (-1)^n \arcsin a + 180°n, \qquad (143.1)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $-90° \leqslant \arcsin a \leqslant 90°$.

Для уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, нужно писать:

$$x = \pm \arccos a + 360°\, n, \qquad (143.2)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $0° \leqslant \arccos a \leqslant 180°$.

Для уравнения $\operatorname{tg} x = a$, где a — любое число, нужно писать:

$$x = 180°n + \operatorname{arctg} a, \qquad (143.3)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $-90° < \operatorname{arctg} a < 90°$.

Для уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, где a — любое число, нужно писать:

$$x = 180°n + \operatorname{arcctg} a, \qquad (143.4)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $0° < \operatorname{arctg} < 180°$.

Хотелось бы предупредить о недопустимых записях при решении тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = +{}^1/_2$.

а) В п. 139 мы получили общее решение данного уравнения в виде $x = n\pi + (-1)^n \pi/6$, где под x можно понимать как отвлеченное число, так и число радиан.

Общее решение этого уравнения, если под x понимать число градусов, можно писать и так:

$$x = 180°n + (-1)^n 30°.$$

б) *Нельзя, однако, писать*

$$x = 180°n + (-1)^n \pi/6 \quad \textit{или} \quad x = n\pi + (-1)^n 30°.$$

Разберем примеры уравнений, непосредственно сводящихся к уже рассмотренным.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$.

Решение. $\sin x = 1/\sqrt{2}$, откуда согласно (143.1) имеем $x = 180°n + (-1)^n 45°$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 3. Решить уравнение $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

Решение. $\cos x = -\sqrt{3}/2$, откуда согласно (140.4) имеем $x = 2n\pi \pm 5\pi/6$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 4. Решить уравнение $3\sin x - 4 = 0$.

Решение. Из нашего уравнения получаем равносильное уравнение $\sin x = {}^4/_3$, которое решений не имеет, ибо не выполняется условие $|\sin x| \leqslant 1$. Следовательно, первоначальное уравнение также не имеет решений.

Пример 5. Решить уравнение $3\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$.

Решение. $\mathrm{tg}\,x = -{}^1/_3$, откуда согласно (141.3) имеем $x = n\pi + \mathrm{arctg}(-{}^1/_3)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, или $x = n\pi - \mathrm{arctg}({}^1/_3)$.

Замечание. Ответ можно записать так:

$$x = 180°n + \mathrm{arctg}(-{}^1/_3) \quad \text{или} \quad x = 180°n - \mathrm{arctg}({}^1/_3),$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 6. Решить уравнение $3\,\mathrm{ctg}\,x + 2 = 0$.

Решение. $\mathrm{ctg}\,x = -{}^2/_3$, откуда согласно (142.3) имеем $x = n\pi + \mathrm{arcctg}(-{}^2/_3)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, или $x = (n+1)\pi - \mathrm{arcctg}({}^2/_3)$.

Пример 7. Решить уравнение $2\sin 5x + 1 = 0$.

Решение. Записав уравнение в виде $\sin 5x = -{}^1/_2$, найдем отсюда сначала промежуточный аргумент $5x = \pi n + (-1)^{n+1}\pi/6$, откуда получим общее решение данного уравнения $x = \pi n/5 + (-1)^{n+1}\pi/30$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Упражнения

Решить уравнения:

1. $\sin x = \sqrt{3}/2$. 2. $\sin x = -{}^1/_2$. 3. $\cos x = {}^1/_2$. 4. $\cos x = -\sqrt{2}/2$. 5. $\mathrm{tg}\,x = \sqrt{3}/3$. 6. $\mathrm{tg}\,x = -\sqrt{3}$. 7. $\mathrm{ctg}\,x = \sqrt{3}/3$. 8. $\mathrm{ctg}\,x = -\sqrt{3}$. 9. $\cos x = 0{,}9801$. 10. $\mathrm{tg}\,x = -0{,}8423$. 11. $\mathrm{ctg}\,x = -2{,}904$. 12. $2\sin x + 1 = 0$. 13. $2\cos x - 1 = 0$. 14. $2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0$. 15. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x - 2 = 0$. 16. $\sqrt{3} + 2\cos 7x = 0$. 17. $2\cos 6x + 1 = 0$. 18. $2\sin 8x + 1 = 0$.

§ 2. Способ приведения к одной функции одного и того же аргумента

144. Сущность способа. В пп. 139—142 мы получили решения уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\,x = a$ и $\mathrm{ctg}\,x = a$. Во многих случаях решение тригонометрических уравнений сводится к решению основных элементарных уравнений после выполнения ряда алгебраических действий.

Так, пусть имеется уравнение, левая часть которого содержит x только под знаком *одной* тригонометрической функции, например:

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0,$$
$$\operatorname{tg}^4 x + a\operatorname{tg}^2 x + b = 0,$$
$$a\cos^3 x - b\cos x = 0 \text{ и т. д.}$$

Во всех этих случаях задача решения уравнения распадается на две:

1) Решение алгебраического уравнения относительно новой неизвестной $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \cos x$.

2) Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

Пример. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0. \qquad (*)$$

Решение. 1) Положив $\sin x = t$, приходим к алгебраическому уравнению (в данном случае к квадратному уравнению) относительно новой неизвестной t:

$$2t^2 + 5t - 3 = 0. \qquad (**)$$

Решив уравнение (**), получим $t_1 = -3$ и $t_2 = 1/2$.

2) Задача решения уравнения (*) свелась к решению двух тригонометрических уравнений:

$$\text{а) } \sin x = -3 \quad \text{и} \quad \text{б) } \sin x = 1/2. \qquad (***)$$

Уравнение $\sin x = -3$ решений не имеет. Общее решение уравнения $\sin x = 1/2$ имеет вид

$$x = n\pi + (-1)^n \pi/6. \qquad (****)$$

Так как при переходе от тригонометрического уравнения (*) к двум тригонометрическим уравнениям (***) мы нигде не теряли и не получали посторонних корней, то решение (****) является решением первоначального уравнения (*).

В большинстве случаев, однако, приходится исходное уравнение еще преобразовывать так, чтобы оно приобрело нужный вид:

$$f(\sin x) = 0, \quad f(\cos x) = 0 \quad \text{или} \quad f(\operatorname{tg} x) = 0.$$

В п. 145 показаны приемы таких преобразований.

145. Некоторые типы уравнений, приводящихся к уравнениям относительно функции одного аргумента.

1) Рассмотрим уравнение типа

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0, \qquad (145.1)$$

где a, b и c — какие-то действительные числа. Изучим случай, когда $a \neq 0$. Разделив обе части уравнения (145.1) на $\cos^2 x$, придем к следующему уравнению, содержащему только $t = \operatorname{tg} x$:

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (145.2)$$

Заметим, что уравнения (145.1) и (145.2) будут равносильны, ибо мы предполагаем, что $\cos x \neq 0$. (Те значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями уравнения (145.1) при $a \neq 0$.) Далее следует найти значения $t = \operatorname{tg} x$ из уравнения (145.2) и, если они окажутся действительными, отыскать соответствующие серии решений x.

Пример 1. Решить уравнение $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. (Те значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, ибо при этом $\sin^2 x \neq 0$, следовательно, потери корней не происходит.) Получим уравнение $5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{3 \pm 7}{10}$.

а) $\operatorname{tg} x_1 = 1$, $x_1 = \pi n + \pi/4$;

б) $\operatorname{tg} x_2 = -{}^2/_5$, $x_2 = \pi n + \operatorname{arctg}(-{}^2/_5)$.

Ответ. $x_1 = \pi n + \pi/4$ и $x_2 = \pi n + \operatorname{arctg}(-{}^2/_5) = \pi n - \operatorname{arctg}({}^2/_5)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Замечание. Уравнение типа

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d, \qquad (145.3)$$

где $a \neq d$, сводится к уравнению типа (145.1), если его записать сначала так:

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1},$$

а потом так:

$$(a-d)\sin^2 x + b\sin x \cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

Пример 2. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 8\cos^2 x = -2$.

Решение. Запишем данное уравнение так:

$$2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 8\cos^2 x = -2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

После этого будем иметь

$$4\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. (Те значения x, для которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения.) Получим уравнение

$$4\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 6 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} x_1 = 2$ и $\operatorname{tg} x_2 = -{}^3/_4$. Решив последние уравнения, получим решения первоначального уравнения:

$$x_1 = n\pi + \operatorname{arctg} 2 \quad \text{и} \quad x_2 = n\pi + \operatorname{arctg}(-{}^3/_4) = n\pi - \operatorname{arctg}({}^3/_4).$$

2) Рассмотрим уравнение типа

$$a\sin^2 x + b\cos x + c = 0, \qquad (145.4)$$

где a, b и c — какие-то действительные числа. Пусть $a \neq 0$. Заменив $\sin^2 x$ через $1-\cos^2 x$, мы придем к уравнению

$$a\cos^2 x - b\cos x - (c+a) = 0 \qquad (145.5)$$

или

$$at^2 - bt - (c+a) = 0, \quad \text{где} \quad t = \cos x. \qquad (145.6)$$

Из уравнения (145.6) находим возможные значения для $t = \cos x$; естественно, что они будут иметь смысл лишь в случае $|t| \leqslant 1$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Решение. Заменяя $\sin^2 x$ через $1-\cos^2 x$, придем к уравнению $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, откуда $\cos x = 1$ и $\cos x = -{}^1/_2$. Уравнение $\cos x = 1$ имеет решение $x_1 = 2n\pi$, а уравнение $\cos x = -{}^1/_2$ — решение $x_2 = 2n\pi \pm 2\pi/3$. Совокупность значений x_1 и x_2 является решением данного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0.$$

Решение. Заменив $\sin^2 x$ через $1-\cos^2 x$, придем к уравнению

$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0,$$

откуда $\cos x = {}^1/_2$ и $\cos x = -{}^3/_2$. Последнее уравнение не имеет решений, ибо не выполнено условие $|\cos x| \leqslant 1$. Мы получаем одну серию решений данного уравнения: $x = 2n\pi \pm \pi/3$.

3) Рассмотрим уравнение типа

$$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0, \qquad (145.7)$$

где a, b и c — какие-то действительные числа. В общем виде рекомендуем читателю рассмотреть его решение самостоятельно. Мы же ограничимся рассмотрением примеров.

Пример 5. Решить уравнение

$$12\cos^2 x + \sin x - 11 = 0.$$

Решение. Заменив $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, придем к уравнению

$$12\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

откуда $\sin x = {}^1/_3$ и $\sin x = -{}^1/_4$. Оба последних уравнения имеют соответственно решения $x_1 = \pi n + (-1)^n \arcsin({}^1/_3)$ и $x_2 = \pi n + (-1)^{n+1}\arcsin({}^1/_4)$. Совокупность значений x_1 и x_2 является множеством всех решений данного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

Решение. Заменив $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, придем к уравнению

$$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0,$$

откуда $\sin x_1 = -{}^1/_2$ и $\sin x_2 = {}^4/_3$. Последнее уравнение не имеет решения, ибо не выполнено условие $|\sin x_2| \leqslant 1$. Мы получаем одну серию решений первоначального уравнения:

$$x = \pi n + (-1)^{n+1} \pi/6.$$

4) Рассмотрим уравнение типа

$$b \sin x + c \cos x = 0, \tag{145.8}$$

где $b \neq 0$.

Деля обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим

$$b \operatorname{tg} x + c = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = -c/b.$$

Следовательно,

$$x = n\pi + \operatorname{arctg}(-c/b) = n\pi - \operatorname{arctg}(c/b),$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Заметим, что, предположив $\cos x \neq 0$, мы не потеряли корней, ибо если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3} \cos x$, получим $\operatorname{tg} x = -1/\sqrt{3}$, откуда $x = \pi n - \pi/6$.

5) Если в уравнение входят тригонометрические функции от различных аргументов, то и в этом случае иногда представляется возможным выразить их все через одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента.

Пример 8. Решить уравнение

$$\cos 2x + \cos^2 x = 0.$$

Решение. Заменив $\cos^2 x$ через $(1 + \cos 2x)/2$, придем к уравнению

$$\cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0, \quad \text{или} \quad 3 \cos 2x = -1,$$

откуда $\cos 2x = -{}^1/_3$.

Следовательно, $2x = 2n\pi \pm \arccos(-{}^1/_3)$ и

$$x = n\pi \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 9. Решить уравнение $\sin 2x = \cos^2 x$.

Решение. Заменив $\sin 2x$ через $2 \sin x \cos x$, придем к уравнению $2 \sin x \cos x = \cos^2 x$ или $\cos x (2 \sin x - \cos x) = 0$. Последнее уравнение распадается на два:

$$\text{а) } \cos x = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } 2 \sin x - \cos x = 0.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Второе уравнение после деления на $\sin x \neq 0$ дает $\operatorname{ctg} x = 2$, откуда $x_2 = \pi n + \operatorname{arcctg} 2$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Решениями первоначального уравнения и будут значения x_1 и x_2. Заметим, что в нашем случае деление обеих частей уравнения б) на $\sin x$ не привело к потере корней, ибо те значения x, при которых $\sin x$ обращается в нуль, не являются корнями первоначального уравнения.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{8}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 2 и, заменив $2 \sin x \cos x$ на $\sin 2x$, получим $\sin 2x \cos 2x = {}^1/_4$. С последним уравнением поступим опять так же, получим $\sin 4x = {}^1/_2$, откуда $4x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. Окончательно имеем

$$x = \frac{\pi n}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}.$$

Решение. Заметим, что

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{1 + \cos x}{2}}{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

Подставив найденное значение для $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$ в исходное уравнение, получим $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$. Далее имеем $(1 + \cos x)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{1 - \cos x}\right) = 0$. Последнее уравнение распадается на два:

$$\text{а) } 1 + \cos x = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{1 - \cos x} = 0.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1 = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Второе уравнение запишем в виде $\frac{1 - 2 \cos x}{\cos x (1 - \cos x)} = 0$. Приравняв нулю числитель $(1 - 2 \cos x)$, получим корни второго уравнения: $x_2 = 2\pi n \pm \pi/3$.

146. Способ разложения на множители.

1) Если в уравнении, приведенном к виду $f(x) = 0$, его левая часть $f(x)$ разлагается на множители, то, как указано в п. 54, следует приравнять каждый из этих множителей к нулю. Получится несколько отдельных уравнений; корни каждого из них

будут корнями основного уравнения, если только они входят в о. д. з. каждого из множителей левой части уравнения.

Все полученные решения объединяются в одну совокупность решений первоначального уравнения. Заметим, что этот способ мы уже фактически применяли при решении примеров 9 и 11 из п. 145.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x \operatorname{ctg} 2x = 0$.

Решение. Согласно предыдущему будем искать отдельно решения двух уравнений: а) $\sin x = 0$ и б) $\operatorname{ctg} 2x = 0$. Первое уравнение имеет корни $x_1 = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Второе уравнение имеет корни $x_2 = \frac{\pi}{4}(2n+1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Проверка показывает, что решениями первоначального уравнения будет лишь совокупность значений $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, а значения $x_1 = \pi n$ не удовлетворяют данному уравнению, ибо при $x_1 = \pi n$ теряет смысл второй множитель $\operatorname{ctg} 2x$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin 7x - \cos 4x = \sin x.$$

Решение. Запишем это уравнение следующим образом:

$$(\sin 7x - \sin x) - \cos 4x = 0.$$

Применив формулу (125.2), получим

$$2 \sin 3x \cos 4x - \cos 4x = 0,$$

откуда

$$\cos 4x (2 \sin 3x - 1) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения:

$$\text{а) } \cos 4x = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } 2 \sin 3x - 1 = 0.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1 = \frac{2n+1}{8}\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Второе уравнение имеет корни $x_2 = \pi n/3 + (-1)^n \pi/18$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Все найденные значения x_1 и x_2 являются корнями заданного уравнения.

2) Рассмотрим уравнения типа:

$$\text{а) } \sin \alpha x = \sin \beta x; \quad \text{б) } \cos \alpha x = \cos \beta x; \quad \text{в) } \sin \alpha x = \cos \beta x,$$

где α и β — любые действительные числа, отличные от нуля, причем $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \neq -\beta$. Покажем прием решения такого типа уравнений.

а)
$$\sin \alpha x = \sin \beta x. \tag{146.1}$$

Запишем это уравнение в виде $\sin \alpha x - \sin \beta x = 0$. Применив к левой части формулу (125.2), будем иметь

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} x \cos \frac{\alpha + \beta}{2} x = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x=0 \quad \text{и} \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}x=0.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$x_1=\frac{2\pi}{\alpha-\beta}n \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\pi(2n+1)}{\alpha+\beta} \qquad (n=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

Эти же решения будут и решениями уравнения (146.1).

б)

$$\cos\alpha x=\cos\beta x. \qquad (146.2)$$

Решите это уравнение самостоятельно с помощью формулы (125.4) и убедитесь, что его решения имеют вид

$$x_1=\frac{2\pi}{\alpha+\beta}n \quad \text{и} \quad x_2=\frac{2\pi}{\alpha-\beta}n \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Решите самостоятельно также уравнение $\cos\alpha x=-\cos\beta x$.

в)

$$\sin\alpha x=\cos\beta x. \qquad (146.3)$$

Запишем это уравнение в виде $\sin\alpha x-\cos\beta x=0$. Одну из функций, например $\cos\beta x$, заменим по формуле приведения на $\sin(\pi/2-\beta x)$. Уравнение (146.3) примет вид $\sin\alpha x-\sin(\pi/2-\beta x)=0$, откуда получаем

$$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Решения этих уравнений имеют соответственно вид

$$x_1=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}(4n+1) \text{ и } x_2=\frac{\pi}{2(\alpha-\beta)}(4n+1) \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Заметим, что полученные формулы решений запоминать не следует (нужно только понять сам прием).

Пример 3. Решить уравнение $\sin 7x=\sin 3x$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\sin 7x-\sin 3x=0$. Применив к левой части формулу (125.2), будем иметь

$$2\sin 2x\cos 5x=0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\sin 2x=0 \quad \text{и} \quad \cos 5x=0.$$

Решения этих уравнений будут иметь вид

$$x_1=\frac{\pi}{2}n \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\pi}{10}(2n+1) \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Все эти решения являются решениями данного уравнения.

147. Решение рациональных тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$. Допустим, что функции $\sin x$ и $\cos x$ входят в тригонометрическое уравнение только рационально. Такие тригонометрические уравнения назовем *рациональными тригонометрическими уравнениями* (см. п. 37). Если все члены такого уравнения перенесены в его левую часть, то в общем виде его можно записать так:

$$R(\sin x,\ \cos x)=0, \qquad (147.1)$$

где R — символ совокупности рациональных операций, которые нужно произвести над $\sin x$ и $\cos x$.

Приведем примеры рациональных тригонометрических уравнений, а также тригонометрических уравнений, которые таковыми не являются.

1) Уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

является рациональным тригонометрическим уравнением, так как

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

2) Уравнение

$$\sqrt[3]{2-\operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg} x}=3$$

не является рациональным тригонометрическим уравнением, ибо в число операций, которые производятся над тригонометрическими функциями, содержащими аргумент x, входит не рациональная операция — извлечение кубического корня.

3) Уравнение

$$\cos x+\sin x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x}$$

является рациональным тригонометрическим уравнением.

4) Уравнение

$$\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$$

не является рациональным тригонометрическим уравнением, ибо в число операций, которые производятся над тригонометрическими функциями, содержащими аргумент x, входят не рациональные операции — операция взятия синуса от $\pi\cos x$ и операция взятия косинуса от $\pi\sin x$.

Теорема. *Рациональное уравнение*

$$R(\sin x,\ \cos x)=0 \qquad (147.1)$$

с помощью тригонометрической подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \qquad (147.2)$$

приводится к рациональному уравнению

$$R_1(t)=0 \qquad (147.3)$$

относительно новой неизвестной t.

Доказательство. Имеем уравнение $R(\sin x,\ \cos x)=0$. Введем новую неизвестную t с помощью подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$. Согласно формулам п. 122 имеем

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Подставив эти выражения в (147.1), получим

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=0. \qquad (147.4)$$

Обозначив через R_1 новую совокупность всех рациональных операций, которые нужно проделать теперь уже над t, мы придем к уравнению $R_1(t)=0$.

Подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=t$ обычно называют *универсальной тригонометрической подстановкой.*

Следует заметить, что указанный выше общий способ не всегда является самым лучшим, ибо при решении уравнения $R_1(t)=0$ относительно новой неизвестной t могут встретиться технические трудности ничуть не меньшие тех, которые стояли при решении уравнения (147.1) Рекомендуется сначала поискать какой-либо специальный прием решения, который применим к данному конкретному уравнению, и если такой прием не удается найти, то следует применить общий способ.

Заметим, что, применяя общий способ—подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=t$, мы исключаем из рассмотрения те значения неизвестной x, при которых $\operatorname{tg}(x/2)$ не имеет смысла, т. е. значения $x=(2n+1)\pi$, но эти значения могут являться корнями первоначального рационального тригонометрического уравнения. Поэтому при решении рациональных тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$ нужно обязательно проверить, не являются ли значения $x=(2n+1)\pi$ корнями первоначального уравнения (147.1).

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1. \qquad (147.5)$$

Решение. Сделав универсальную подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=t$, получим $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Подставив значение $\cos x$ в уравнение (147.5), придем к рациональному относительно t уравнению $t^3-2t^2+t=0$. Решив последнее уравнение, будем иметь $t_1=0$ и $t_2=t_3=1$.

Приходим к двум уравнениям:

$$\text{а) } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1.$$

Первое уравнение имеет корни

$$x_1=2\pi n, \quad \text{где} \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Второе уравнение имеет корни

$$x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad \text{где} \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Заметим, что значения $x_3=(2n+1)\pi$ не являются корнями данного уравнения (147.5). Итак, уравнение (147.5) имеет следующие серии решений:

$$x_1=2\pi n \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad \text{где} \quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1. \tag{147.6}$$

Решение. С помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}(3x/2)=t$ получим уравнение, рациональное относительно t:

$$2\sqrt{3}t-1+t^2=1+t^2,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{3x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$x_1=\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{9}(6n+1).$$

Проверим теперь, не являются ли значения $x_2=\frac{\pi}{3}(2n+1)$ корнями первоначального уравнения (147.6). (Напомним, что при этих значениях теряет смысл функция $\operatorname{tg}(3x/2)=t$.) Подставив $x_2=\frac{\pi}{3}(2n+1)$ в уравнение (147.6), получим

$$\sqrt{3}\underbrace{\sin(2n+1)\pi}_{0}-\underbrace{\cos(2n+1)\pi}_{-1}=1, \quad 1=1.$$

Следовательно, значения $x_2=\frac{\pi}{3}(2n+1)$ являются корнями уравнения (147.6).

Итак, решениями уравнения (147.6) являются

$$x_1=\frac{\pi}{9}(6n+1) \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\pi}{3}(2n+1) \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Упражнения

Решить уравнения:

1. $2\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$. **2.** $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$. **3.** $2\sin^2 x-\cos x-1=0$. **4.** $2\sin^2 x+5\cos x+1=0$. **5.** $35\cos^2 x-\sin x-29=0$. **6.** $30\cos^2 x-29\sin x-23=0$. **7.** $8\cos^2 x+2\sin x+7=0$. **8.** $6\sqrt{3}\sin x+4\cos x=7$. **9.** $3\sin x+\cos x=0$. **10.** $\cos 2x-\sin^2 x=0$. **11.** $\cos 3x=\cos x$. **12.** $\sin 2x=\sin^2 x$. **13.** $\sin x+\cos x=1+\sin 2x$. **14.** $2-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+\cos 2x+\sin 2x\operatorname{tg} x-1$. **15.** $\sin 4x\operatorname{tg} x=0$. **16.** $\sin 9x-\cos 5x=\sin x$. **17.** $\sin 9x-\sin 8x=0$. **18.** $\cos 10x-\cos 7x=0$. **19.** $\sin 6x=\cos 3x$.

Решить уравнения с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$:

20. $\sin x+\operatorname{tg}(x/2)=-2$. **21.** $2\sin x-\cos x=1$. **22.** $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$.

§ 3. Некоторые частные приемы решения тригонометрических уравнений и систем

148. Введение вспомогательного аргумента. Рассмотрим уравнение

$$a\sin x+b\cos x+c=0, \qquad (148.1)$$

где $|a|+|b|\neq 0$. Запишем его в виде

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)+c=0,$$

а затем положим

$$A=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$$

(см. п. 127). Уравнение (148.1) примет вид

$$A\sin(x+\varphi)+c=0, \quad \text{или} \quad \sin(x+\varphi)=-\frac{c}{A}. \qquad (148.2)$$

Последнее уравнение имеет решение, если $|-c/A|\leqslant 1$, т. е. если $|c|\leqslant A$ или $c^2\leqslant a^2+b^2$.

Допустим, что $c^2\leqslant a^2+b^2$; тогда общее решение уравнения (148.2) имеет вид

$$x+\varphi=\pi n+(-1)^n\arcsin(-c/A),$$

а общее решение уравнения (148.1) запишется так:

$$x=\pi n+(-1)^n\arcsin(-c/A)-\varphi \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

где φ — аргумент (вспомогательный), который находится из условий $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$ и $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sin x-2\cos x=1-\sqrt{3}. \qquad (148.3)$$

Решение. Запишем уравнение (148.3) в виде

$$2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=1-\sqrt{3}.$$

Положим $1/\sqrt{2}=\cos\varphi$ и $-1/\sqrt{2}=\sin\varphi$. Уравнение (148.3) примет вид

$$2\sqrt{2}\sin(x+\varphi)=1-\sqrt{3},$$

или

$$\sin(x+\varphi)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \qquad (148.4)$$

Последнее уравнение имеет решение, ибо $-1<\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}<0$. В качестве φ можно, например, взять $-\pi/4$. Уравнение (148.4) имеет решение $x+\varphi=\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, откуда получим общее решение нашего уравнения в виде

$$x=\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4},$$

или

$$x=\frac{\pi}{4}(4n+1)+(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=1. \qquad (148.5)$$

Решение. Запишем уравнение (148.5) в виде

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\right)=1.$$

Положим $\sqrt{3}/2=\cos\varphi$ и $-{}^1/_2=\sin\varphi$. Уравнение (148.5) примет вид

$$\sin(3x+\varphi)=\frac{1}{2}. \qquad (148.6)$$

Последнее уравнение имеет решение, ибо $0<{}^1/_2<1$. В качестве φ можно, например, взять $-\pi/6$. Уравнение (148.6) имеет решение

$$3x+\varphi=\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}=\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6},$$

откуда получим общее решение уравнения (148.5) в виде

$$x=\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}[(6n+1)+(-1)^n].$$

Решение уравнения (148.5) другим способом приведено в п. 147. Рекомендуем читателю убедиться в том, что множества решений этого уравнения, полученные в пп. 147 и 148, совпадают.

149. Преобразование произведения в сумму или разность. Рассмотрим уравнения:

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \sin \gamma x \sin \delta x, \quad (149.1)$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \cos \gamma x \cos \delta x, \quad (149.2)$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \cos \gamma x \cos \delta x, \quad (149.3)$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \sin \gamma x \cos \delta x, \quad (149.4)$$

где α, β, γ и δ — какие-то постоянные коэффициенты. Если числа α, β, γ и δ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\alpha + \beta = \pm (\gamma + \delta) \quad (149.5)$$

или

$$\alpha - \beta = \pm (\gamma - \delta), \quad (149.6)$$

то уравнения (149.1), (149.2) могут быть решены с помощью приема, основанного на переходе от произведений тригонометрических функций к полусуммам или к полуразностям. Для уравнения (149.3) условия (149.5), (149.6) заменяются условием

$$\alpha - \beta = \pm (\gamma + \delta). \quad (149.7)$$

Для уравнения же (149.4) эти условия заменяются условиями

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta, \quad \alpha + \beta = \gamma - \delta, \quad \alpha - \beta = \gamma + \delta \quad \text{или} \quad \alpha - \beta = \gamma - \delta. \quad (149.8)$$

Рассмотрим, например, уравнение (149.1). Применив к левой и правой частям этого уравнения формулу (123.3), придем к уравнению

$$\frac{\cos (\alpha - \beta) x - \cos (\alpha + \beta) x}{2} = \frac{\cos (\gamma - \delta) x - \cos (\gamma + \delta) x}{2}, \quad (149.9)$$

или

$$\cos (\alpha - \beta) x - \cos (\alpha + \beta) x = \cos (\gamma - \delta) x - \cos (\gamma + \delta) x. \quad (149.10)$$

Если, например, в уравнении (149.1) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, то (149.10) приобретает вид

$$\cos (\alpha - \beta) x = \cos (\gamma - \delta) x. \quad (149.11)$$

Уравнения типа (149.11) разобраны в п. 146.

Пример. Решить уравнение

$$\sin 3x \sin 9x = \sin 5x \sin 7x. \quad (149.12)$$

Решение. Применив к левой и правой частям уравнения (149.12) формулу (123.3), получим

$$\frac{\cos 6x - \cos 12x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 12x}{2},$$

или

$$\cos 6x = \cos 2x. \quad (149.13)$$

Перенеся $\cos 2x$ в левую часть уравнения и применив формулу для разности косинусов, получим уравнение

$$-2\sin 4x \sin 2x = 0, \qquad (149.14)$$

распадающееся на два уравнения:

$$\text{а) } \sin 4x = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \sin 2x = 0.$$

Общее решение первого уравнения: $x_1 = n\pi/4$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Общее решение второго уравнения: $x_2 = n\pi/2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Так как при $n = 2k$ мы имеем $x_1 = k\pi/2$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) (совокупность решений x_1 содержит совокупность решений x_2), то общее решение уравнения (149.12) можно записать в виде

$$x = \frac{n\pi}{4} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Рекомендуем читателю самостоятельно рассмотреть уравнения (149.2), (149.3) и (149.4).

150. Переход к функциям удвоенного аргумента. Рассмотрим уравнения

$$\sin^2 \alpha x + \sin^2 \beta x = \sin^2 \gamma x + \sin^2 \delta x \qquad (150.1)$$

и

$$\cos^2 \alpha x + \cos^2 \beta x = \cos^2 \gamma x + \cos^2 \delta x, \qquad (150.2)$$

где α, β, γ и δ — какие-то постоянные числа. Если числа α, β, γ и δ удовлетворяют некоторым условиям, то уравнения (150.1) и (150.2) легко могут быть решены с помощью приема, основанного на выражении квадратов тригонометрических функций через тригонометрические функции удвоенного аргумента. Рассмотрим, например, уравнение (150.1). Применив к его левой и правой частям формулу (121.3), придем к уравнению

$$\frac{1-\cos 2\alpha x}{2} + \frac{1-\cos 2\beta x}{2} = \frac{1-\cos 2\gamma x}{2} + \frac{1-\cos 2\delta x}{2},$$

или

$$\cos 2\alpha x + \cos 2\beta x = \cos 2\gamma x + \cos 2\delta x. \qquad (150.3)$$

Сказанное об уравнении (150.1) относится и к уравнению (150.2), ибо оно сводится в точности к уравнению (150.3). В самом деле, применив формулу (121.2), получим

$$\frac{1+\cos 2\alpha x}{2} + \frac{1+\cos 2\beta x}{2} = \frac{1+\cos 2\gamma x}{2} + \frac{1+\cos 2\delta x}{2},$$

или

$$\cos 2\alpha x + \cos 2\beta x = \cos 2\gamma x + \cos 2\delta x. \qquad (150.3)$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

Решение. Действуя аналогично предыдущему, получим

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2},$$

или

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x.$$

Перейдя в последнем уравнении к произведениям по формуле (125.3), получим

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x,$$

или

$$\cos x(\cos 3x - \cos 7x) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

а) $\cos x = 0$,

$$x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1), \qquad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

б) $\cos 3x - \cos 7x = 0$, или $2\sin 5x \sin 2x = 0$,

$$x_2 = \frac{n\pi}{5} \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{n\pi}{2}, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Мы получили три серии решений первоначального уравнения. Заметим, что серия решений, записанных с помощью формулы $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, входит в серию решений $x_3 = \frac{n\pi}{2}$ — она получается из последней при нечетном n. Следовательно, окончательно имеем

$$x_1 = n\pi/2 \text{ и } x_2 = n\pi/5, \qquad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(мы изменили обозначение x_3 на x_1).

Мы не делаем проверки полученных решений, так как равносильность соответствующих уравнений нигде не была нарушена.

Замечание. Аналогичным приемом при определенных условиях могут быть решены и следующие уравнения:

$$\sin^2 \alpha x + \cos^2 \beta x = \sin^2 \gamma x + \cos^2 \delta x, \qquad (150.4)$$

$$\sin^2 \alpha x - \cos^2 \beta x = \sin^2 \gamma x - \sin^2 \delta x, \qquad (150.5)$$

$$\sin^2 \alpha x + \sin^2 \beta x + \sin^2 \gamma x + \sin^2 \delta x = 2, \qquad (150.6)$$

$$\cos^2 \alpha x + \cos^2 \beta x + \cos^2 \gamma x + \cos^2 \delta x = 2 \qquad (150.7)$$

и т. д.

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos\frac{4}{3}x + \sin^2\frac{3}{2}x + 2\sin^2\frac{5}{6}x = \cos^2\frac{3}{2}x.$$

Решение. Перенеся $\sin^2(3x/2)$ в правую часть уравнения, заменим $\cos^2(3x/2) - \sin^2(3x/2)$ на $1 - 2\sin^2(3x/2)$, а $2\sin^2(5x/6)$ на $1 - \cos(5x/3)$. После этого придем к уравнению

$$\cos\frac{4}{3}x + 1 - \cos\frac{5}{3}x = 1 - 2\sin^2\frac{3}{2}x,$$

или

$$\cos\frac{4}{3}x-\cos\frac{5}{3}x=-2\sin^2\frac{3}{2}x,\quad 2\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{6}x=2\sin^2\frac{3}{2}x,$$

$$\sin\frac{3}{2}x\left(\sin\frac{1}{6}x-\sin\frac{3}{2}x\right)=0,\quad 2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{5}{6}x\sin\frac{2}{3}x=0.$$

Последнее уравнение распадается на три:

а) $\sin\frac{3}{2}x=0,\quad x_1=\frac{2}{3}n\pi;$

б) $\cos\frac{5}{6}x=0,\quad x_2=\frac{3\pi}{5}(2n+1);$

в) $\sin\frac{2}{3}x=0,\quad x_3=\frac{3}{2}n\pi.$

Итак, мы получили три серии решений первоначального уравнения:

$$x_1=\frac{2}{3}n\pi,\quad x_2=\frac{3\pi}{5}(2n+1)\quad \text{и}\quad x_3=\frac{3}{2}n\pi\qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Мы не делаем проверки полученных решений, так как нигде не нарушали равносильности уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=a, \tag{150.8}$$

где a — действительное число.

Воспользовавшись формулой

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-{}^1/_2\sin^2 2x,$$

перепишем уравнение (150.8) в виде

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=a, \tag{150.9}$$

или

$$\sin^2 2x=2(1-a). \tag{150.10}$$

Последнее уравнение имеет решение, если $0\leqslant 2(1-a)\leqslant 1$, т. е. если ${}^1/_2\leqslant a\leqslant 1$. В этом случае уравнение (150.10) распадается на два простейших уравнения:

$$\sin 2x=\sqrt{2(1-a)}\quad \text{и}\quad \sin 2x=-\sqrt{2(1-a)}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}. \tag{150.11}$$

Решение. Воспользовавшись формулой (119.5), придем к уравнению

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{5}{8},$$

откуда получим $\sin^2 2x = {}^3/_4$. Последнее уравнение, а следовательно и исходное уравнение, будет иметь общее решение в виде

$$x = \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi n}{2} \pm \frac{\pi}{6} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{9}. \tag{150.12}$$

Решение. Воспользовавшись формулой (119.5), придем к уравнению

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{9},$$

из которого получим $\sin^2 2x = 16/9$. Последнее уравнение, а следовательно, и уравнение (150.12), решения не имеет, ибо не выполнено условие $|\sin 2x| \leqslant 1$. В этом случае $a = {}^1/_9$ и не выполнено условие ${}^1/_2 \leqslant a \leqslant 1$, необходимое для существования решения уравнения (150.12).

Замечание. Примеры 3 и 4 можно было решать, используя формулы (121.3) и (121.2). В этом случае мы бы имели

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2 2x}{2}.$$

Вместо уравнения (150.11) мы получили бы

$$\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 2x}{2} = \frac{5}{8}, \quad \text{или} \quad \cos^2 2x = \frac{1}{4}.$$

Вместо же уравнения (150.12) мы получили бы уравнение $\cos^2 2x = -{}^7/_9$, которое решения не имеет.

151. Решение уравнения типа $\operatorname{tg}\alpha x + \operatorname{tg}\beta x = \operatorname{tg}\gamma x + \operatorname{tg}\delta x$. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x. \tag{151.1}$$

Решение. Применив формулу (125.5) для суммы тангенсов, получим новое уравнение:

$$\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x}.$$

Перенесем все члены уравнения в левую часть:

$$\frac{\sin 5x\,(\cos 2x \cos 3x - \cos x \cos 4x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0. \tag{151.2}$$

Преобразуем числитель, воспользовавшись формулой (123.2):

$$\frac{\sin 5x\left(\frac{1}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos 3x\right)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0,$$

или

$$\frac{\sin 5x\,(\cos x - \cos 3x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0.$$

Заменив разность косинусов по формуле (125.4), будем иметь

$$\frac{2\sin 5x \sin 2x \sin x}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0. \tag{151.3}$$

Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения (151.3), получаем

$$\sin x \sin 2x \sin 5x = 0. \tag{151.4}$$

Последнее уравнение распадается на три уравнения, которые дают следующие три серии решений:

1) $\sin x = 0$, $x = n\pi$;
2) $\sin 2x = 0$, $x = n\pi/2$;
3) $\sin 5x = 0$, $x = n\pi/5$.

Заметим, что первая серия решений $x = n\pi$ входит во вторую $x = n\pi/2$ при четных n, т. е. при $n = 2m$. Поэтому общее решение уравнения (151.4) состоит из двух серий:

$$x = n\pi/2 \quad \text{и} \quad x = n\pi/5.$$

Проверка. Заметим следующее:

1) уравнения (151.1) и (151.3) эквивалентны, поэтому мы можем делать проверку полученных решений, подставляя их в уравнение (151.3);

2) проверку решений можно делать в общем виде, а можно, используя нечетность и периодичность функций, входящих в уравнение (151.3), делать проверку только тех решений, которые попали в отрезок оси Ox, равный половине периода (в нашем случае период равен π и в качестве такого отрезка можно, например, взять отрезок $[0, \pi/2]$). Продемонстрируем оба способа проверки. (Будем проверять решения, подставляя их в уравнение (151.3), эквивалентное уравнению (151.1).)

а) Проверяем решения в общем виде.

1. $x = n\pi/2$. Вычислим $\dfrac{\sin\frac{5n\pi}{2}\sin n\pi \sin\frac{n\pi}{2}}{\cos\frac{n\pi}{2}\cos n\pi \cos\frac{3n\pi}{2}\cos 2n\pi}$. Дробь не имеет смысла при нечетном n $(n = 2m+1)$, ибо тогда $\cos(n\pi/2) = 0$. При четном же n $(n = 2m)$ она обращается в нуль. Следовательно, в качестве решений уравнения (151.1) нужно оставить следующую серию решений: $x = m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2. $x = \dfrac{n\pi}{5}$. Вычислим $\dfrac{\sin n\pi \sin\frac{2n\pi}{5}\sin\frac{n\pi}{5}}{\cos\frac{n\pi}{5}\cos\frac{2n\pi}{5}\cos\frac{3n\pi}{5}\cos\frac{4n\pi}{5}}$. Дробь обращается в нуль при любом n. (Знаменатель дроби ни при каком n в нуль не обращается.)

Итак, объединяя полученные результаты, получим окончательно, что уравнение (151.3), а следовательно и первоначаль-

ное уравнение (151.1), имеет две серии решений: $x_1=m\pi$ и $x_2=m\pi/5$, которые можно объединить в одну серию $x=k\pi/5$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). (При $k=5m$ первая серия решений составляет часть второй серии.)

б) Проверяем отдельные решения, лежащие в отрезке $[0, \pi/2]$.

Из серии $x=n\pi/2$ в отрезок $[0, \pi/2]$ попадают следующие значения x: 0 и $\pi/2$.

Из серии $x=n\pi/5$ в отрезок $[0, \pi/2]$ попадают следующие значения x: 0, $\pi/5$ и $2\pi/5$.

Переходим к проверке этих значений. (Будем проверять решения, подставляя их в уравнение (151.3), эквивалентное уравнению (151.1).)

1) $x=0$. Тогда $0/1=0$. Следовательно, $x=0$ — корень нашего уравнения.

2) $x=\pi/2$. При этом значении $x\cos x$ (и $\cos 3x$) обращается в нуль, и левая часть уравнения теряет смысл. Следовательно, $x=\pi/2$ не является корнем уравнения (151.1).

3) $x=\pi/5$. Имеем $\dfrac{0}{\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}=0$. Следовательно, $x=\pi/5$ — корень уравнения (151.1).

4) $x=\dfrac{2\pi}{5}$. Получаем $\dfrac{0}{\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}}=0$. Следовательно, $x=2\pi/5$ — корень уравнения (151.1).

Итак, из серий предполагаемых решений $x=n\pi/2$ и $x=n\pi/5$ исключаются значения $\pi/2$, $-\pi/2$ и вообще значения вида $\frac{\pi}{2}(2m+1)$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Объединяя полученные результаты, найдем окончательно, что уравнение (151.3), а следовательно, и первоначальное уравнение (151.1), имеет две серии решений: $x_1=m\pi$ и $x_2=m\pi/5$, которые можно объединить в одну серию $x=k\pi/5$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Заметим, что решить это уравнение удалось благодаря определенному соотношению между аргументами тангенсов ($x+4x=2x+3x$). Поэтому большой общности наш прием, как и сходные приемы, показанные ранее в пп. 149, 150, не имеет.

152. Применение подстановок $\sin x \pm \cos x = y$. Если в тригонометрическое уравнение входят только выражения $\sin x+\cos x$ и $\sin 2x$ или $\sin x-\cos x$ и $\sin 2x$, то, применив подстановку $\sin x+\cos x=y$ или $\sin x-\cos x=y$, можно получить уравнение относительно y.

Пример. Решить уравнение

$$\cos x-\sin x-\sin x\cos x=0. \qquad (152.1)$$

Решение. Введем новую неизвестную y, положив

$$\cos x-\sin x=y. \qquad (152.2)$$

Возведя обе части равенства (152.2) в квадрат, получим $\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x = y^2$, откуда будем иметь

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - y^2). \qquad (152.3)$$

Подставив (152.2) и (152.3) в (152.1), получим уравнение относительно y:

$$y^2 + 2y - 1 = 0. \qquad (152.4)$$

Корни уравнения (152.4):

$$y_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{и} \quad y_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

Возвращаясь к тригонометрическим функциям, получаем два уравнения:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} - 1, \qquad (152.5)$$

$$\cos x - \sin x = -\sqrt{2} - 1, \qquad (152.6)$$

которые решаются так:

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} - 1$,

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2} - 1,$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}. \qquad (152.7)$$

Так как $\left|\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right| < 1$, то уравнение (152.7) имеет решение

$$x_1 = 2n\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\cos x - \sin x = -\sqrt{2} - 1$.

Действуя аналогично предыдущему, придем к уравнению

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}. \qquad (152.8)$$

Уравнение (152.8) решения не имеет, так как

$$-\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} < -1.$$

Итак, уравнение (152.1) имеет решение

$$x = 2n\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

153. Системы тригонометрических уравнений. Напомним, что *решением* системы n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такая совокупность n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, которая обладает тем свойством, что, будучи подставлена в каждое из

уравнений системы, обратит его в верное числовое равенство. В этом определении слово «решение» нужно понимать не как слово, определяющее процесс действий, которое мы производим над системой уравнений, а как слово, заменяющее слово «корень» («ответ») в случае одного уравнения с одной неизвестной. Заметим, что возможны следующие случаи:

1) система не имеет решения,

2) система имеет конечное число решений,

3) система имеет бесконечное множество решений.

Перейдем теперь к рассмотрению систем тригонометрических уравнений, ограничиваясь отдельными примерами.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1, \\ x+y=\pi/3. \end{cases} \tag{153.1}$$

Решение. Левую часть первого из уравнений системы преобразуем в произведение:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Воспользовавшись тем, что $x+y=\pi/3$, мы от системы (153.1) перейдем к эквивалентной ей системе

$$\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2}=1, \\ x+y=\pi/3. \end{cases} \tag{153.2}$$

Первое из уравнений системы (153.2) дает $x-y=4\pi n$. Мы приходим к бесконечному множеству систем

$$\begin{cases} x-y=4\pi n, \\ x+y=\pi/3, \end{cases} \tag{153.3}$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Зафиксируем какое-либо n и решим систему (153.3). Получим решение $x_n=2n\pi+\pi/6$, $y_n=\pi/6-2\pi n$. Так как n может меняться и принимать бесконечное множество значений $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то и система (153.1) имеет бесконечное множество решений

$$(2n\pi+\pi/6,\ \pi/6-2n\pi).$$

Проверка. Проверим, что решением данной системы является любая пара чисел вида $x_n=2n\pi+\pi/6$ и $y_n=\pi/6-2n\pi$. Подставив соответственно значения x_n и y_n вместо значений x и y в каждое из уравнений системы (153.1), придем к очевидным равенствам

$$\begin{cases} \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \\ 2n\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-2n\pi=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Итак, система (153.1) имеет бесконечное множество решений (x_n, y_n), где $x_n = 2n\pi + \pi/6$ и $y_n = \pi/6 - 2n\pi$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = -1{,}2, \\ x + y = \pi/3. \end{cases} \tag{153.4}$$

Решение. Действуя аналогично предыдущему, придем к системе, эквивалентной данной:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1{,}2, \\ x + y = \pi/3. \end{cases} \tag{153.5}$$

Эта система не имеет решений, так как $\left|\cos \frac{x-y}{2}\right|$ не может быть больше 1.

Ответ. Данная система уравнений не имеет решений.

Замечание 1. Примеры 1 и 2 являются частными случаями системы

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = b. \end{cases} \tag{153.6}$$

Система (153.6) сводится к эквивалентной системе

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \\ x + y = b. \end{cases} \tag{153.7}$$

Последняя система (153.7) может иметь бесчисленное множество решений, а может не иметь ни одного. Рекомендуем читателю в общем виде провести самостоятельно исследование различных случаев.

Замечание 2. Систему (153.6) можно было бы решать и методом подстановки, например, так: а) y выразить через x из второго уравнения, т. е. написать $y = b - x$; б) $y = b - x$ подставить в первое уравнение системы (153.6) и записать его так: $(1 - \cos b) \sin x + \sin b \cos x = a$. В этом случае данная система (153.6) заменилась бы эквивалентной ей системой

$$\begin{cases} (1 - \cos b) \sin x + \sin b \cos x = a, \\ x + y = b. \end{cases} \tag{153.8}$$

Замечание 3. Аналогично предыдущему решаются и системы

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a, \\ x \pm y = b \end{cases} \tag{153.9}$$

или

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a, \\ x \pm y = b. \end{cases} \tag{153.10}$$

Замечание 4. Система вида

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \qquad (153.11)$$

(и аналогичные ей) сводится к рассмотренным выше системам, если воспользоваться формулами приведения, положив, например, $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ или $\cos y = \sin(\pi/2 - y)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ x + y = b. \end{cases} \qquad (153.12)$$

Решение. Левую часть первого уравнения преобразуем по формуле

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

и используем второе уравнение. После указанных преобразований система (153.12) заменится эквивалентной ей системой

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 2a + \cos b, \\ x + y = \end{cases} \qquad (153.13)$$

Эта система имеет решение, если $|2a + \cos b| \leqslant 1$. В этом случае имеем

$$\begin{cases} x - y = 2n\pi \pm \arccos(2a + \cos b), \\ x + y = b, \end{cases}$$

откуда получаем совокупность решений (x_n, y_n), где

$$x_n = \pi n + \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos(2a + \cos b)$$

и

$$y_n = \frac{b}{2} - \pi n \mp \arccos(2a + \cos b).$$

Замечание 5. Аналогично решаются системы

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x \pm y = b \end{cases} \qquad (153.14)$$

или

$$\begin{cases} \cos x \sin y = a, \\ x \pm y = b. \end{cases} \qquad (153.15)$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = a, \\ x + y = b. \end{cases} \qquad (153.16)$$

Решение. Воспользовавшись формулами

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2}$$

(ср. с формулой (121.2)), получим систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = 2(a-1), \\ 2x + 2y = 2b. \end{cases} \tag{153.17}$$

Система (153.17) решается так же, как система из примера 1.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 2, \\ x + y = \pi/3. \end{cases} \tag{153.18}$$

Решение. Первое уравнение запишем в виде пропорции:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{2}{1}.$$

Предполагаем пока, что $\operatorname{tg} y \neq 0$. Образуем теперь производную пропорцию:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{2-1}{2+1}.$$

Пусть $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \neq 0$. Из последней пропорции получаем

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{1}{3}.$$

Предполагаем, что $\cos x \cos y \neq 0$. Воспользовавшись вторым уравнением данной системы, придем к системе

$$\begin{cases} \sin(x-y) = \sqrt{3}/6, \\ x + y = \pi/3. \end{cases} \tag{153.19}$$

Решая первое уравнение, получим

$$x - y = \pi n + (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}/6).$$

Мы приходим к бесконечному множеству систем

$$\begin{cases} x - y = \pi n + (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}/6), \\ x + y = \pi/3, \end{cases} \tag{153.20}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Решая каждую из систем (153.20), получим

$$\begin{cases} x_n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}, \\ y_n = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi n}{2} - (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{cases} \tag{153.21}$$

Проверим теперь, являются ли решения (153.21) решениями первоначальной системы. Второе уравнение данной системы обращается сразу в справедливое равенство $x_n + y_n = \pi/3$, $\pi/3 = \pi/3$. Подставим теперь x_n и y_n в первое уравнение системы (153.18),

получим

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}+(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right]\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\pi n}{2}-(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right]=2.$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. $n=2m$ — четное число. Имеем

$$A=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+m\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=$$
$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}.$$

Обозначим $\alpha=\arcsin(\sqrt{3}/6)$. Следовательно,

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad\text{и}\quad\cos\alpha=+\sqrt{1-\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}.$$

Напомним, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. В нашем случае имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}/6}{1+\sqrt{33}/6}=\frac{\sqrt{3}}{6+\sqrt{33}}=2\sqrt{3}-\sqrt{11}.$$

Тогда

$$A=\frac{\sqrt{3}/3+2\sqrt{3}-\sqrt{11}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{11})}=\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{11}}{\sqrt{33}-3}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2},$$

$$B=\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{6}-m\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right]=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=$$
$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{11})}{\frac{\sqrt{3}}{3}-(2\sqrt{3}-\sqrt{11})}=$$
$$=\frac{9-\sqrt{33}}{3\sqrt{11}-5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь имеем $AB=2$, т. е. $\operatorname{tg}x_n\operatorname{ctg}y_n=2$.

Случай II. $n=2m+1$ — нечетное число. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\pi m+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=$$
$$=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогичным путем получим

$$\operatorname{ctg} y_{2m+1}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x_{2m+1} \operatorname{ctg} y_{2m+1}=2$. Итак, решения (153.21) являются решениями данной системы.

Исследуем теперь особые случаи, которые мы временно исключили из рассмотрения.

1) Корни уравнения $\operatorname{tg} y=0$, т. е. числа вида $y_n=n\pi$, не могут входить в решения нашей системы, ибо $\operatorname{ctg} n\pi$ не существует. Следовательно, предположив, что $\operatorname{tg} y \neq 0$, мы не потеряли решений данной системы.

2) Мы предположили также, что $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y \neq 0$. Если бы могло выполняться равенство $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=0$, то мы имели бы $\operatorname{tg} x= =-\operatorname{tg} y$, но $\operatorname{tg} x=2 \operatorname{tg} y$. Мы пришли к противоречию, ибо у нас $\operatorname{tg} y \neq 0$. Следовательно, предположив, что $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y \neq 0$, мы не потеряли решений данной системы.

3) Мы предположили также, что $\cos x \cos y \neq 0$. Допустим теперь, что $\cos x \cos y=0$. Это возможно, если, например:

а) $\cos x=0$. Но в этом случае не имеет смысла $\operatorname{tg} x$, входящий в первое уравнение данной системы.

б) $\cos y=0$. Но это тоже невозможно, ибо в противном случае мы имели бы $\operatorname{ctg} y=0$, а мы должны иметь $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y=2$.

Следовательно, предположив, что $\cos x \cos y \neq 0$, мы не потеряли решений данной системы.

Итак, система (153.18) имеет бесконечное множество решений $(x_n,\ y_n)$, где

$$x_n=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}+(-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$$

и

$$y_n=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi n}{2}+(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}\sin x+\sin y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x+\cos y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right. \tag{153.22}$$

Левые части уравнений преобразуем в произведения; получим новую систему, эквивалентную данной:

$$\left\{\begin{array}{l}2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right. \tag{153.23}$$

Предположив, что $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\neq 0$, поделим почленно первое уравнение системы (153.23) на второе. Получим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=1, \qquad (153.24)$$

из которого находим

$$\frac{x+y}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4}. \qquad (153.25)$$

Подставим (153.25) в первое уравнение системы (153.23):

$$2\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Заметим, что $\sin(n\pi+\pi/4)=(-1)^n\sin(\pi/4)=(-1)^n\sqrt{2}/2$. После этого будем иметь

$$\cos\frac{x-y}{2}=(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \qquad (153.26)$$

Решив уравнение (153.26), получим

$$\frac{x-y}{2}=2k\pi\pm\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \qquad (153.27)$$

Для отыскания x и y нужно теперь решить бесконечное множество систем

$$\left\{\begin{aligned} &x+y=2\pi n+\frac{\pi}{2},\\ &x-y=4k\pi\pm 2\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}\right. \qquad (153.28)$$

которые получаются при различных комбинациях n и k (n и k независимо друг от друга могут принимать значения $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Считая n и k фиксированными, решим систему (153.28). Сложив два уравнения системы (153.28), получим

$$2x=2\pi n+4k\pi+\frac{\pi}{2}\pm 2\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

откуда

$$x=\pi n+2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, будем иметь

$$2y=2\pi n-4k\pi+\frac{\pi}{2}\mp 2\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

откуда

$$y=\pi n-2k\pi+\frac{\pi}{4}\mp\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Итак, система (153.22) имеет бесчисленное множество решений $(x_{n,k}\ y_{n,k})$, где

$$\begin{cases} x_{n,k}=\pi n+2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ y_{n,k}=\pi n-2k\pi+\frac{\pi}{4}\mp\arccos(-1)^n\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{cases} \qquad (153.29)$$

Замечание 6. Предположив, что $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\neq 0$, мы не потеряли решений системы (153.22), ибо те x и y, при которых $\cos\frac{x+y}{2}=0$ или $\cos\frac{x-y}{2}=0$, не являются решениями системы (153.23), а следовательно, и решениями эквивалентной ей системы (153.22).

Замечание 7. Можно показать, что $\arccos\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{12}$. После этого формулы (153.29) можно несколько упростить. Например, для четных n $(n=2m)$ будем иметь

$$\begin{cases} x_{2m,k}=2\pi m+2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}, \\ y_{2m,k}=2\pi m-2k\pi+\frac{\pi}{4}\mp\frac{\pi}{12}, \end{cases} \qquad (153.30)$$

где $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Замечание 8. В заключение укажем некоторые частные решения системы (153.22). Положив, например, в (153.30) $m=0$ и $k=0$, получим

$$x_{0,0}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}, \quad y_{0,0}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

и

$$\bar{x}_{0,0}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}, \quad \bar{y}_{0,0}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}.$$

Замечание 9. Система (153.22) является частным случаем системы

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=a, \\ \cos x+\cos y=b. \end{cases} \qquad (153.31)$$

Рекомендуем читателю самостоятельно решить и провести исследование различных случаев системы (153.31).

Упражнения

Решить уравнения:

1. $2\sin x+2\cos x=1+\sqrt{3}$. **2.** $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. **3.** $\sin x+\cos x=-1$. **4.** $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$. (Сравнить с ответом, который получился при решении этого же уравнения (упражнение 22 к § 2) способом, указанным в § 2 настоящей главы.) **5.** $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=1$. **6.** $\sin 5x\sin 11x=\sin 7x\sin 9x$.

7. $\sin 6x \sin 2x = \sin 13x \sin 9x$. **8.** $\cos 6x \cos 12x = \cos 8x \cos 10x$. **9.** $\cos 7x \cos 3x = \cos 14x \cos 10x$. **10.** $\sin 8x \sin 4x = \cos x \cos 3x$. **11.** $\sin 12x \sin 7x = \cos 10x \cos 5x$. **12.** $\sin 9x \cos 4x = \sin 15x \cos 2x$. **13.** $\sin 10x \cos 5x = \sin 8x \cos 7x$. **14.** $\sin 11x \cos 6x = \sin 9x \cos 4x$. **15.** $\sin^4 x + \cos^4 x = {}^7/_8$. **16.** $\sin^4 x + \cos^4 x = {}^1/_8$.

17. $\cos^2 2x + \cos^2 3x = \cos^2 x + \cos^2 4x$.

18. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 9x = 2$.

19. $\sin^6 x + \cos^6 x = 0{,}25$. **20.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

21. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$. **22.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.

23. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.

Решить следующие системы уравнений:

24. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi/2. \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} \sin x + \sin y = -{}^3/_2, \\ x + y = \pi/2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \cos x + \cos y = {}^3/_2, \\ x - y = 60^\circ. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x + y = b. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = 0{,}75, \\ x - y = 60^\circ. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 3, \\ x + y = \pi/6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \sin x + \sin y = (\sqrt{3} + 2)/2, \\ \cos x + \cos y = {}^1/_2. \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} \sin x + \sin y = {}^1/_2, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3}/2. \end{cases}$

§ 4. Решение тригонометрических неравенств

154. Простейшие тригонометрические неравенства. При решении тригонометрических неравенств мы будем использовать свойства монотонности и графики соответствующих тригонометрических функций, а также тот факт, что основной период функций $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π, а основной период функции $\operatorname{tg} x$ равен π.

I. Неравенство вида

$$\sin x \geqslant a. \qquad (154.1)$$

Если $a > 1$, то неравенство (154.1) не имеет решений, а если $a \leqslant -1$, то неравенству (154.1) удовлетворяет любое x. Поэтому интерес представляют случаи, когда

$$0 < a \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 < a \leqslant 0.$$

Рассмотрим один из случаев.

1) Решить неравенство

$$\sin x \geqslant a, \quad \text{где} \quad 0 < a \leqslant 1.$$

Решение. Рассмотрим отрезок $[0, 2\pi]$ оси Ox. На рис. 127 (стр. 319) видно, что неравенству $\sin x \geqslant a$ удовлетворяют все x, лежащие в отрезке $[x_1, x_3]$. Так как $x_1 = \arcsin a$ и $x_3 = \pi - \arcsin a$, то решение данного неравенства на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет вид

$$\arcsin a \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin a.$$

Учитывая, что функция $y=\sin x$ периодическая, с периодом, равным 2π, мы получаем, что $\sin x \geqslant a$ во всех отрезках вида

$$[2n\pi+\arcsin a,\ (2n+1)\pi-\arcsin a], \quad \text{где} \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

II. Неравенство вида

$$\sin x \leqslant a. \tag{154.2}$$

Если $a \geqslant 1$, то неравенству (154.2) удовлетворяет любое x, а если $a < -1$, то неравенство (154.2) не имеет решений. Поэтому интерес представляют случаи, когда

$$0 < a < 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant a \leqslant 0.$$

Рассмотрим один из случаев.

2) Решить неравенство

$$\sin x \leqslant a, \quad \text{где} \quad 0 < a < 1.$$

Решение. Рассмотрим отрезок $[x_2, x_3]$ длины 2π (рис. 127 на стр. 319). Видно, что данному неравенству $\sin x \leqslant a$ удовлетворяют все x, лежащие в отрезке $[x_2, x_1]$. Заметим, что $x_1 = \arcsin a$, а $x_2 = -\pi - \arcsin a$. Следовательно, на отрезке $[x_2, x_3]$ решение данного неравенства имеет вид

$$-\pi-\arcsin a \leqslant x \leqslant \arcsin a.$$

Учитывая, что функция $y=\sin x$ периодическая, с периодом, равным 2π, мы получаем, что $\sin x \leqslant a$ во всех отрезках вида

$$[(2n-1)\pi-\arcsin a,\ 2n\pi+\arcsin a], \quad \text{где} \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

III. Неравенство вида

$$\cos x \geqslant a. \tag{154.3}$$

Если $a > 1$, то неравенство (154.3) не имеет решений, а если $a \leqslant -1$, то неравенству (154.3) удовлетворяет любое x. Поэтому интерес представляют случаи, когда

$$0 < a \leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 < a \leqslant 0.$$

Рассмотрим один из случаев.

3) Решить неравенство

$$\cos x \geqslant a, \quad \text{где} \quad 0 < a \leqslant 1.$$

Решение. Рассмотрим отрезок $[-\pi, \pi]$ оси Ox. На рис. 129 (стр. 321) видно, что неравенству $\cos x \geqslant a$ удовлетворяют все x, лежащие в отрезке $[x_2, x_1]$. Так как $x_1 = \arccos a$ и $x_2 = -\arccos a$, то решение данного неравенства на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$-\arccos a \leqslant x \leqslant \arccos a.$$

Учитывая, что функция $y=\cos x$ периодическая, с периодом, равным 2π, мы получаем, что $\cos x \geqslant a$ во всех отрезках вида

$$2n\pi-\arccos a \leqslant x \leqslant 2n\pi+\arccos a, \quad \text{где} \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

IV. Неравенство вида

$$\cos x \leqslant a. \qquad (154.4)$$

Если $a \geqslant 1$, то неравенству (154.4) удовлетворяет любое x, а если $a < -1$, то неравенство (154.4) не имеет решений. Поэтому интерес представляют случаи, когда

$$0 < a < 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant a \leqslant 0.$$

Рассмотрим один из случаев.

4) Решить неравенство

$$\cos x \leqslant a, \quad \text{где} \quad 0 < a < 1.$$

Решение. Рассмотрим отрезок $[0, 2\pi]$ оси Ox. На рис. 129 (стр. 321) видно, что данному неравенству $\cos x \leqslant a$ удовлетворяют все x, лежащие в отрезке $[x_1, x_3]$. Так как $x_1 = \arccos a$ и $x_3 = 2\pi - \arccos a$, то решение данного неравенства на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет вид

$$\arccos a \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos a.$$

Учитывая, что функция $y = \cos x$ периодическая, с периодом, равным 2π, мы получаем, что $\cos x \leqslant a$ во всех отрезках вида

$$[2n\pi + \arccos a, \ 2(n+1)\pi - \arccos a], \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

V. Неравенство вида

$$\operatorname{tg} x \geqslant a. \qquad (154.5)$$

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, то неравенство (154.5) имеет решение при любом a. Рассмотрим пример.

5) Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x \geqslant a, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Решение. Рассмотрим отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ оси Ox. На рис. 131 (стр. 323) видно, что данному неравенству $\operatorname{tg} x \geqslant a$ удовлетворяют все x, заключенные в пределах

$$x_1 \leqslant x < \pi/2.$$

(При $x = \pi/2$ не существует $\operatorname{tg} x$.) Так как $x_1 = \operatorname{arctg} a$, то решение неравенства (154.5) на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ имеет вид

$$\operatorname{arctg} a \leqslant x < \pi/2.$$

Учитывая, что функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, с периодом, равным π, мы получаем, что $\operatorname{tg} x \geqslant a$ всюду, где

$$n\pi + \operatorname{arctg} a \leqslant x < n\pi + \pi/2,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

VI. Неравенство вида

$$\operatorname{tg} x \leqslant a. \qquad (154.6)$$

Так как функция $y=\operatorname{tg} x$ принимает значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, то неравенство (154.6) имеет решение при любом a.

Рассмотрим пример.

6) Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x \leqslant a, \quad \text{где} \quad a > 0.$$

Решение. Рассмотрим отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ оси Ox. На рис. 131 (стр. 323) видно, что данному неравенству $\operatorname{tg} x \leqslant a$ удовлетворяют все x, заключенные в пределах $-\pi/2 < x \leqslant x_1$. Так как $x_1 = \operatorname{arctg} a$, то решение неравенства (154.6) на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ имеет вид $-\pi/2 < x \leqslant \operatorname{arctg} a$.

Таким образом, неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant a$ удовлетворяется во всех интервалах вида

$$(k\pi - {}^{\pi}/_{2}, \ k\pi + \operatorname{arctg} a).$$

155. Примеры тригонометрических неравенств, сводящихся к простейшим.

Пример 1. Решить неравенство

$$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 \geqslant 0.$$

Решение. Обозначив $\sin x$ через t, придем к следующему квадратному неравенству:

$$4t^2 - 8t + 3 \geqslant 0.$$

Это неравенство удовлетворяется при $t \leqslant {}^1/_2$ и $t \geqslant {}^3/_2$. Поэтому все решения первоначального неравенства должны удовлетворять либо неравенству $\sin x \leqslant {}^1/_2$, либо неравенству $\sin x \geqslant {}^3/_2$.

Неравенство $\sin x \leqslant {}^1/_2$ имеет следующее решение:

$$2n\pi - \frac{7}{6}\pi \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{6},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Неравенство же $\sin x \geqslant {}^3/_2$ решений не имеет.

Следовательно, решение первоначального неравенства совпадает с решением неравенства $\sin x \leqslant {}^1/_2$.

Пример 2. Решить неравенство

$$2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 < 0.$$

Решение. Обозначив $\cos 2x$ через t, придем к следующему квадратному неравенству:

$$2t^2 - t - 1 < 0.$$

Это неравенство имеет место при $-{}^1/_2 < t < 1$. Возвращаясь к $\cos 2x$, получим неравенства

$$-{}^1/_2 < \cos 2x < 1.$$

Обозначив $2x$ через z, получим неравенства

$$-{}^1/_2 < \cos z < 1.$$

На отрезке $[-\pi, \pi]$ последние неравенства имеют следующие решения:

$$-\frac{2}{3}\pi < z < 0 \quad \text{и} \quad 0 < z < \frac{2}{3}\pi.$$

На всей же числовой прямой Oz эти неравенства имеют решения

$$2n\pi - \frac{2}{3}\pi < z < 2n\pi \quad \text{и} \quad 2n\pi < z < 2n\pi + \frac{2}{3}\pi.$$

Возвращаясь к неизвестной x, получим

$$n\pi - \frac{\pi}{3} < x < n\pi \text{ и } n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Рекомендуем читателю построить график $y = \cos x$ и решить графически неравенства $-1/2 < \cos x < 1$.

Пример 3. Решить неравенство $|\operatorname{tg} x| > 4/3$.

Решение. Рассмотрим отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ оси Ox. На рис. 140 видно, что данному неравенству $|\operatorname{tg} x| > 4/3$ удовлетворяют все x, заключенные в пределах

$$-\pi/2 < x < -x_0 \quad \text{и} \quad x_0 < x < \pi/2$$

($\operatorname{tg} x$ не существует при $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$). Так как $x_0 = \operatorname{arctg}(4/3)$, то решение данного неравенства на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ имеет вид

$$-\pi/2 < x < -\operatorname{arctg}(4/3)$$

и

$$\operatorname{arctg}(4/3) < x < \pi/2.$$

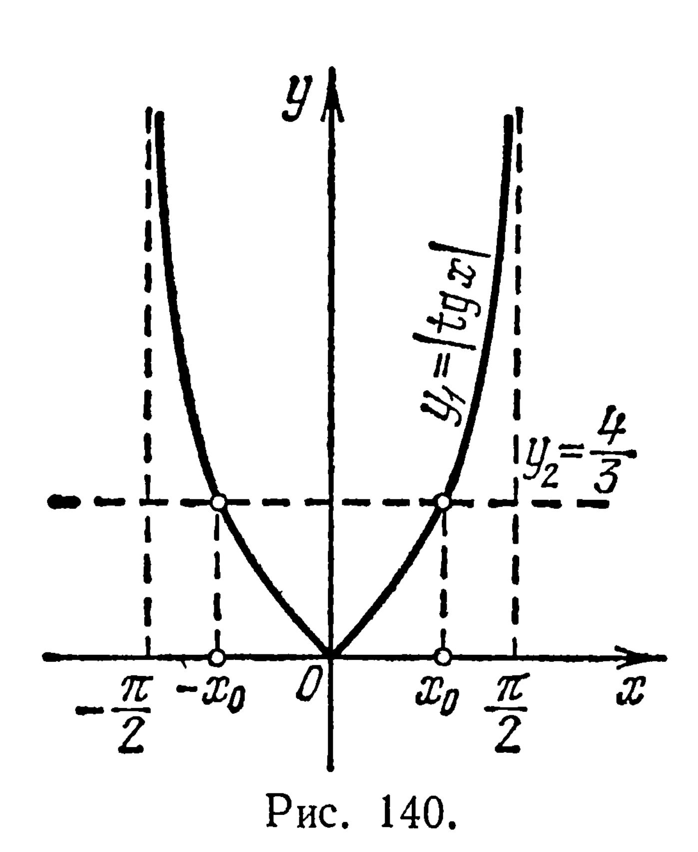


Рис. 140.

Учитывая, что функция $y = |\operatorname{tg} x|$ периодическая, с периодом, равным π, мы получаем, что $|\operatorname{tg} x| > 4/3$ всюду, где

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \quad \text{и} \quad n\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} < x < n\pi + \frac{\pi}{2},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Упражнения

Решить неравенства:

1. $\sin x > 1/2$. **2.** $\sin x \leqslant \sqrt{3}/2$. **3.** $\cos x > -1/2$. **4.** $\cos x < \sqrt{3}/2$. **5.** $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}/3$. **6.** $\operatorname{tg} x < 2/3$. **7.** $6\cos^2 x - 11\cos x + 4 > 0$. **8.** $6\sin^2 2x + 5\sin 2x + 1 \leqslant 0$. **9.** $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1/5$. **10.** $|\operatorname{tg} 4x| > 1/2$.

Часть вторая

ГЕОМЕТРИЯ

Глава XIII

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Точка, прямая, плоскость. Фигуры и тела

156. Точка. Прямая. Луч. Отрезок. Некоторые простейшие понятия геометрии, такие, как *точка*, *прямая* и *плоскость*, не могут быть определены с помощью иных, более простых понятий; они являются отправным пунктом при изложении геометрии.

На наших чертежах точки обозначаются прописными, а прямые — строчными буквами латинского алфавита.

Кроме прямых рассматриваются также *кривые* линии (например, окружность). Линия (прямая или кривая) состоит из бесчисленного множества точек. Понятны выражения: «точка A лежит на линии a» или «линия a проходит через точку A».

Прямая обладает следующими свойствами. Через две различные точки проходит единственная прямая. Как следствие, две прямые могут иметь не более одной общей точки. Две различные прямые, имеющие общую точку, пересекаются в ней. Поскольку две точки определяют прямую, проходящую через них, то прямую также можно обозначать так: прямая AB, прямая PQ.

P M N Q a

Рис. 141.

Точка M, лежащая на прямой a (рис. 141), разбивает ее на две части. Каждая из этих частей называется *полупрямой* или *лучом*. Точка M служит началом каждого из этих лучей. Две точки M и N разбивают прямую на три части: два луча MP и NQ и отрезок MN. Сформулируем определения понятий луча и отрезка. *Лучом* называется часть прямой, ограниченная одной из ее точек. *Отрезком* называется часть прямой, заключенная между двумя ее точками. Без доказательства принимается свойство: *если на прямой даны три различные точки, то из них одна и только одна лежит между двумя другими, т. е. принадлежит отрезку, ограниченному ими.*

157. Плоскость. Фигуры и тела. Легко представить себе поверхность как границу тела: плоская поверхность стола, сферическая поверхность мяча, цилиндрическая поверхность трубы. Но такое представление неполно. Возьмем тонкую замкнутую проволоку изогнутой формы и опустим ее в мыльную пену. Если мы ее осторожно извлечем из пены, то увидим, что просвет в проволочном «кольце» затянут тончайшей мыльной пленкой. Правильно представлять себе поверхность именно как такую пленку (но лишенную всякой толщины).

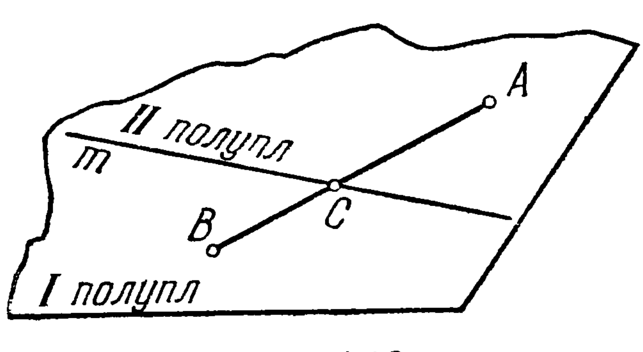


Рис. 142.

Важнейшая и простейшая поверхность — *плоскость*. Напомним основные свойства плоскости. Прямая, две точки которой лежат в плоскости, вся лежит в этой плоскости (т. е. все ее точки лежат в плоскости). Следовательно, если прямая не лежит в плоскости, то она может иметь с ней не более одной общей точки (точка пересечения прямой и плоскости). Через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость (и притом только одну). Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, можно провести плоскость, и притом единственную. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом единственную. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую, проходящую через эту точку (линия пересечения двух плоскостей), либо совпадают целиком.

Прямая m, лежащая в плоскости, разбивает ее на две части — полуплоскости (рис. 142); точки этой прямой и только они являются общими точками обеих полуплоскостей. Если A — точка одной полуплоскости, а B — другой, то отрезок AB пересекает границу m полуплоскостей в некоторой точке C, лежащей между A и B.

Плоскости задаются тремя точками и обозначаются часто так: плоскость ABC или PQR и т. д. Иногда бывает удобнее обозначать плоскость одной буквой греческого алфавита (мы используем строчные буквы второй половины алфавита: λ, μ, ν, ...).

Под *фигурой* обычно понимают некоторое сочетание определенным образом расположенных в одной плоскости (а иногда и в пространстве) элементов: точек, прямых, лучей, отрезков (иногда и плоскостей).

Под *телом* понимают обычно часть пространства, ограниченную какой-либо замкнутой поверхностью. Так, конус — тело, ограниченное конической поверхностью с боков и плоским круглым основанием снизу. Куб — тело, ограниченное шестью квадратными гранями, и т. д.

Курс геометрии традиционно подразделяется на планиметрию и стереометрию; в планиметрии рассматриваются свойства различных фигур (треугольников, многоугольников, окружностей), лежащих в одной плоскости. В стереометрии изучаются свойства пространственных фигур и тел.

158. Угол. Рассмотрим в плоскости два луча OA и OB (рис. 143), исходящих из одной точки O. Эти два луча разбивают плоскость на две области — одна из них заштрихована на рис. 143, другая оставлена светлой. Каждая из них называется углом со сторонами OA и OB и вершиной O; таким образом, *углом* называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом.

Не исключено, что оба луча лежат на одной прямой, продолжая

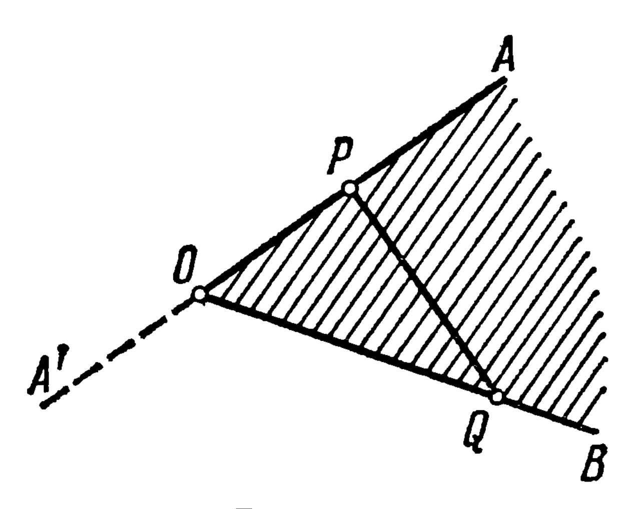


Рис. 143.

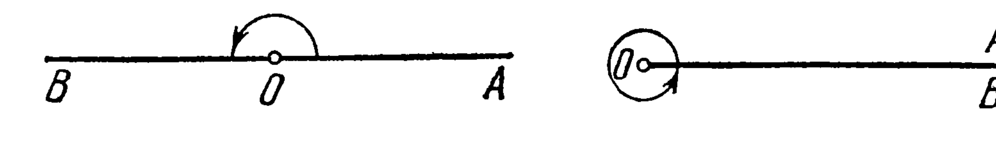


Рис. 144. Рис. 145.

друг друга (рис. 144) или сливаясь (рис. 145). В первом случае каждый из углов, образуемый ими, совпадает с полуплоскостью и получает название *развернутого угла*. Во втором случае один из углов исчезает (сводится к лучу) и называется в силу этого *нулевым* углом, второй же имеет название *полного* угла — он занимает всю плоскость.

Из двух углов на рис. 143 один (заштрихованный) содержится в развернутом угле, образованном одной из сторон (например, OA) и ее продолжением OA'.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под углом между лучами OA и OB, обозначенным $\angle AOB$ или, короче, $\angle O$, понимают тот из углов, который содержится в развернутом угле, т. е. например, заштрихованный угол на рис. 143. Любой отрезок PQ, соединяющий точки на сторонах угла, целиком принадлежит этому углу.

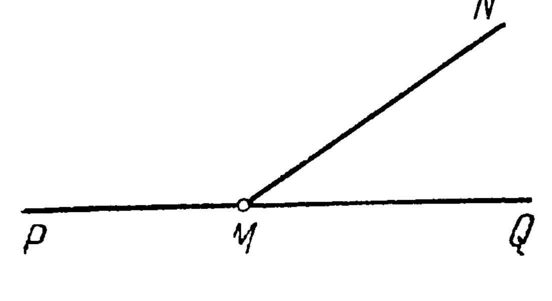


Рис. 146.

Луч, исходящий из точки M на границе полуплоскости (рис. 146) и лежащий в этой полуплоскости, разбивает её на два угла: $\angle PMN$ и $\angle QMN$. Такие два угла называются *смежными*. Они имеют общую сторону MN, другие же их стороны продолжают друг друга.

Рассмотрим две пересекающиеся прямые AB и CD (рис. 147). Они разбивают плоскость на четыре области: I, II, III, IV. Каждая из этих областей называется углом, *образованным*

прямыми AB и *CD*. Говоря точнее, угол *I* образован лучами *OB* и *OD*, угол *II* — лучами *OA* и *OD*, угол *III* — лучами *OA* и *OC* и угол *IV* — лучами *OC* и *OB*. При этом углы *I* и *III* (или *II* и *IV*), стороны которых продолжают друг друга, называются *вертикальными углами*. Иначе можно сказать, что вертикальные углы — это углы, смежные с одним и тем же углом.

Под углом *AOB* между двумя отрезками *OA* и *OB* с общим началом *O* понимается угол, образованный лучами *OA* и *OB*

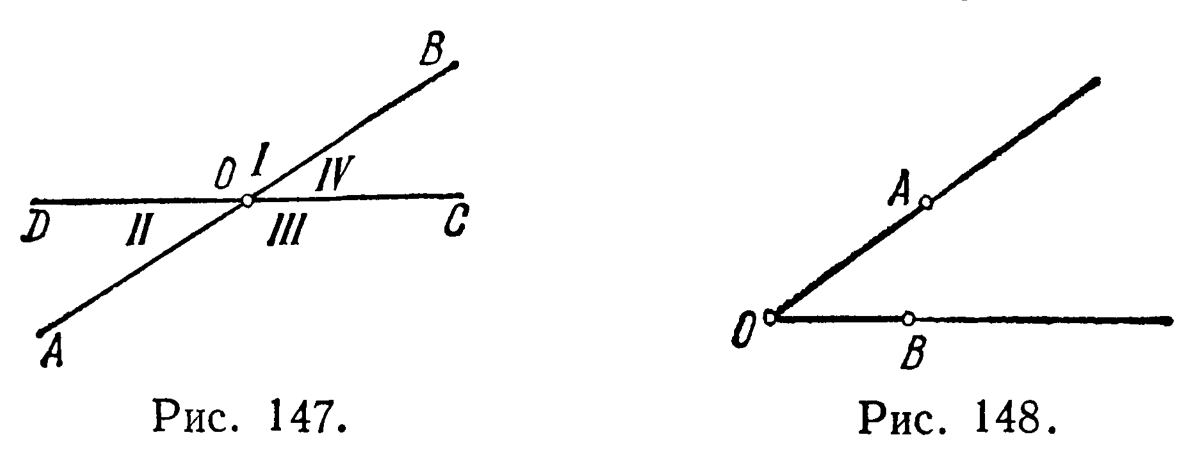


Рис. 147. Рис. 148.

с одной и той же вершиной, содержащими данные отрезки (рис. 148). Мы обозначаем углы указанием их сторон: $\angle AOB$, $\angle LMN$ и т. д., или, если исключены недоразумения, одной буквой — наименованием вершины угла: $\angle O$, $\angle M$ и т. д., или специальной буквой (греческой строчной из первой половины алфавита): α, β, γ, ..., или, наконец, курсивной цифрой: *1*, *2*, ...

159. Ломаная линия. Многоугольник. Рассмотрим несколько отрезков, например *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, расположенных так, что начало каждого последующего отрезка помещается в конце предыдущего (рис. 149, *а*); фигура, образованная такими

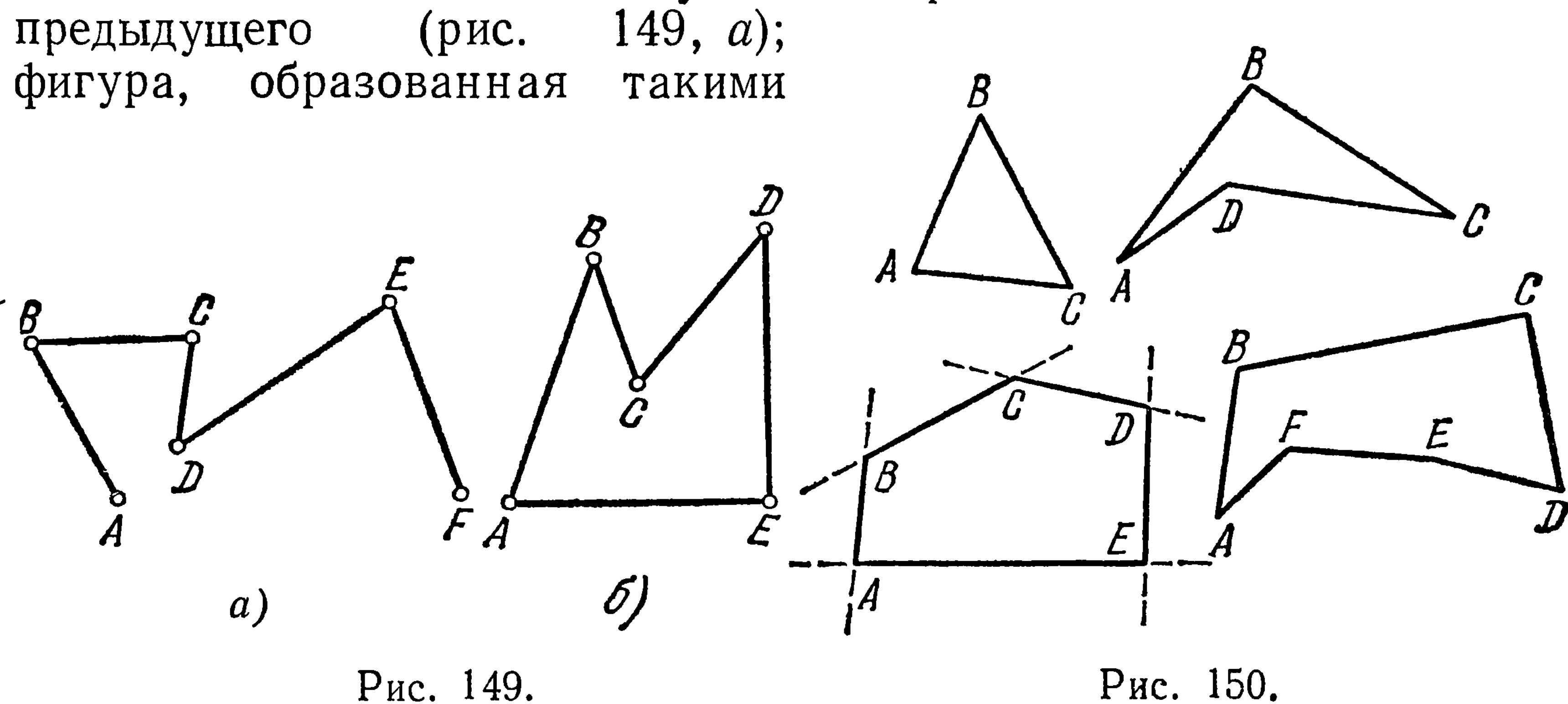


Рис. 149. Рис. 150.

отрезками, называется *ломаной линией*, отрезки же — ее *звеньями* или *сторонами*. Обычно подразумевается, что два соседних отрезка не лежат на одной прямой. Если начало первого отрезка совпадает с концом последнего, то ломаная называется *замкнутой* (рис. 149, *б*).

Замкнутая ломаная, состоящая из n звеньев, называется *n-угольником*. На рис. 150 приведены примеры треугольника, четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника.

Продлим стороны многоугольника. Многоугольник называется *выпуклым*, если он целиком расположен по одну сторону от любой из прямых, на которых лежат его стороны.

На рис. 150 треугольник и пятиугольник выпуклые, а четырехугольник и шестиугольник нет. Ясно, что всякий треугольник выпуклый. В курсе геометрии мы будем изучать треугольники и некоторые виды четырехугольников и многоугольников; при этом всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под многоугольником понимается выпуклый многоугольник.

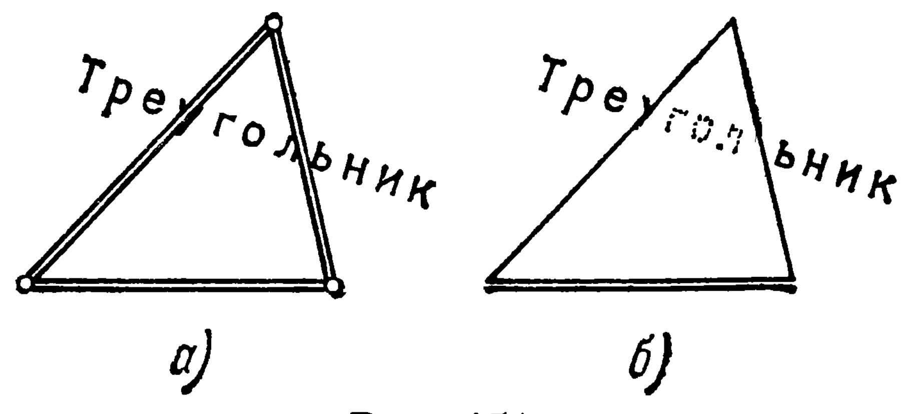


Рис. 151.

Всякий многоугольник разбивает плоскость на две области: внешнюю и внутреннюю; часто под словом «многоугольник» приходится понимать также часть плоскости, ограниченную данной замкнутой линией, включая и эту границу. Так, треугольником можно назвать и проволочную фигуру (рис. 151, *а*), и пластинку (рис. 151, *б*).

Незамкнутую ломаную $ABCD$ мы назовем *выпуклой*, если при дополнении ее до многоугольника $ABCD$ присоединением замыкающего звена DA получается выпуклый многоугольник, как,

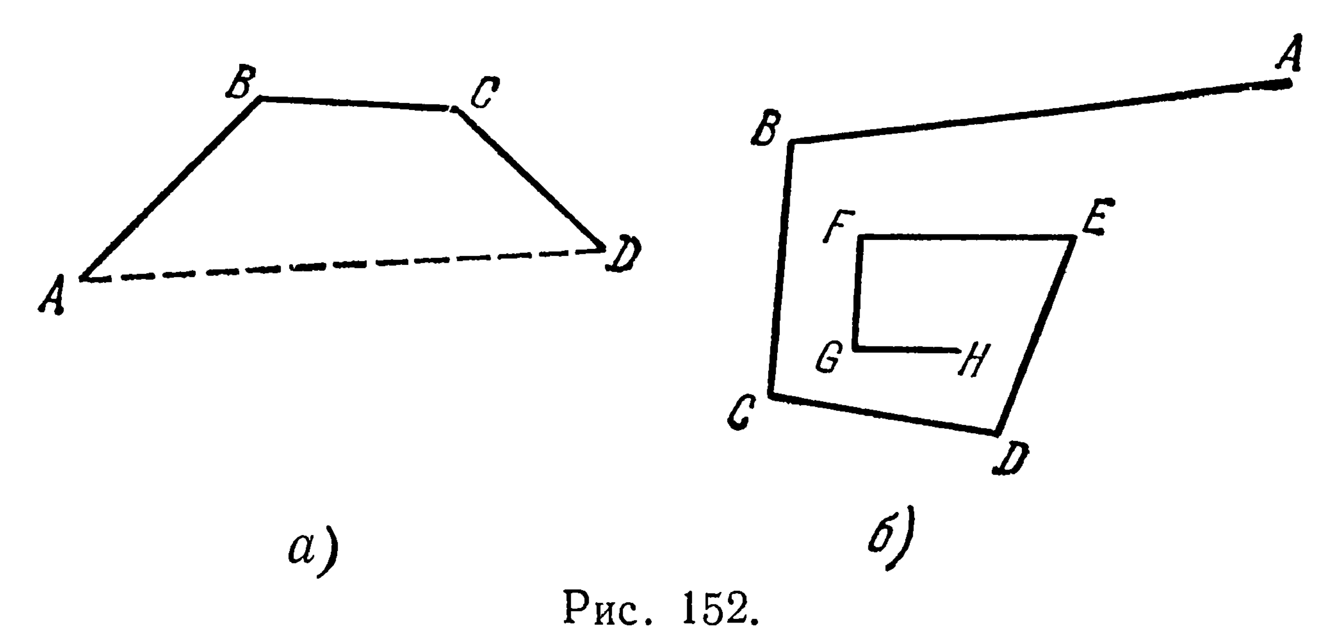


Рис. 152.

например, для ломаной на рис. 152, *а*. Это определение исключает из числа выпуклых ломаных «спиральную» ломаную на рис. 152, *б*.

Отдельные отрезки (звенья), образующие многоугольник, называются его *сторонами*, концы этих отрезков—*вершинами* многоугольника. *Внутренними углами* многоугольника называются углы, образованные парами его сторон, исходящими из общей вершины. Выпуклый многоугольник целиком принадлежит

каждому из своих внутренних углов, как показано для угла A на рис. 153. Ясно, что n-угольник имеет n сторон и столько же вершин. Углы, смежные с внутренними углами многоугольника, называются его *внешними углами*. На рис. 153 показаны внешние углы четырехугольника.

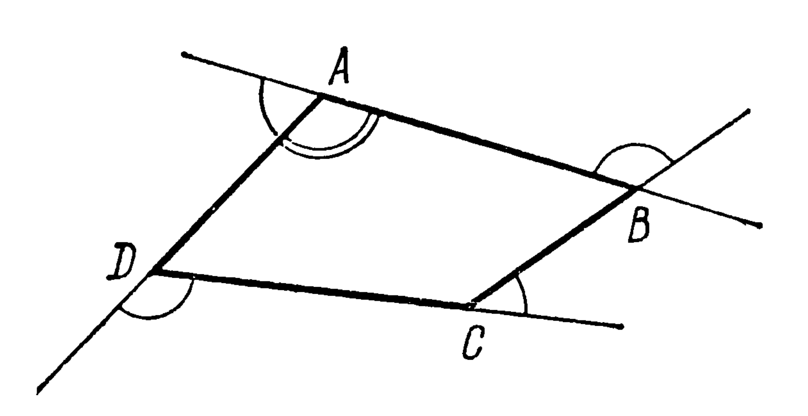


Рис. 153.

160. Равенство фигур. Движение. В этом пункте мы не ограничиваемся плоскостью, а рассматриваем пространство. Основные понятия геометрии имеют абстрактный, идеализированный характер: точка не имеет никакой протяженности, линия лишена толщины и т. д. Это не мешает нам понимать, что материальными прообразами абстрактных понятий геометрии могут являться такие осязаемые вещи, как маленький стальной шарик, тонкий стержень, шлифованная поверхность стекла и т. п. Эти предметы материальной природы превращаются в идеализированные понятия геометрии путем отвлечения от физических и химических свойств; но если эти свойства не имеют значения для геометрии, изучающей, хотя и в абстрактном математическом виде, пространственные формы материального мира, то одно из свойств физических тел — их твердость, способность сохранять свои размеры и форму, находит отражение в геометрии, в идее движения.

Твердое физическое тело можно перемещать в пространстве, причем ни размеры, ни форма тела не претерпевают никакого изменения. Эту способность тел двигаться, т. е. занимать в пространстве различные положения, взятую отвлеченно от понятий, относящихся к временно́му течению процесса движения (скорость, ускорение), допускают в отношении геометрических фигур и тел. Поэтому такие выражения, как «переместим отрезок AB в положение $A'B'$», «совместим угол α с углом β» и т. д., следует понимать, представляя себе отрезок как твердый, хотя и не имеющий толщины, стержень, угол — как твердый сектор плоскости и т. д.

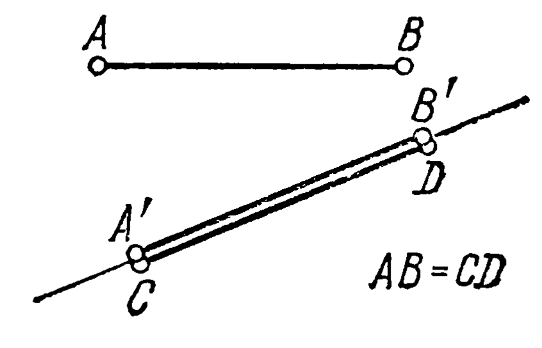


Рис. 154.

Рассмотрим два отрезка AB и CD (рис. 154). Переместим отрезок AB так, чтобы его конец A совпал с концом C отрезка CD и чтобы оба отрезка оказались на одном луче с началом в точке C. Отрезок AB займет положение $A'B'$. Если при этом он совпадет с отрезком CD, то говорят, что отрезки AB и CD равны. Итак, равенство отрезков определяется возможностью их совмещения. Очевидный смысл имеют понятия большего и мень-

шего отрезка. Так же определяется и проверяется равенство двух углов: чтобы выяснить, равны ли углы $\angle DNC$ и $\angle BOA$ (рис. 155), совместим сторону ND угла DNC со стороной OB угла BOA так, чтобы оба угла располагались в одной полуплоскости относительно своей общей стороны. Если при этом вторые стороны углов совпадут, то углы считаются равными. На рис. 155

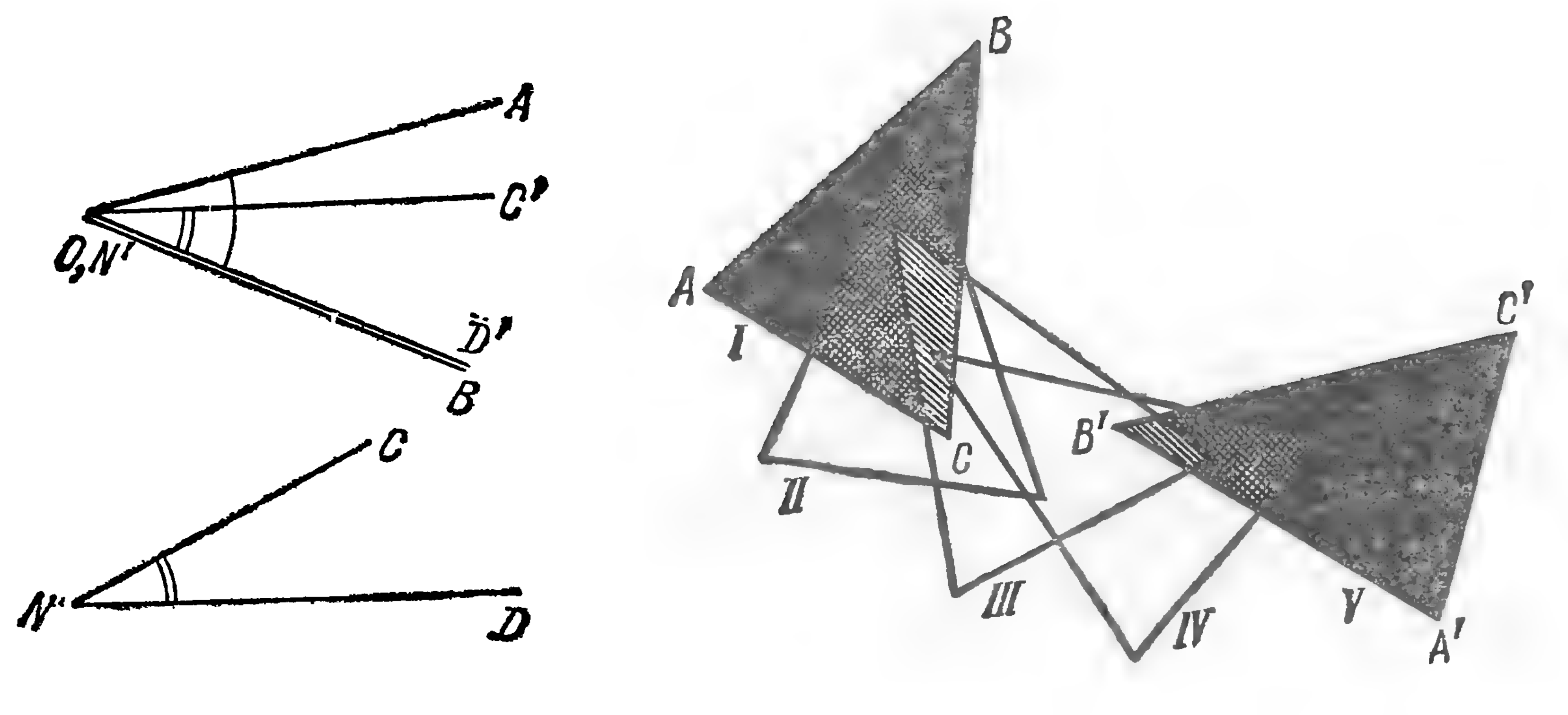


Рис. 155. Рис. 156.

$\angle DNC$ оказывается меньше $\angle BOA$, так как при наложении его на $\angle BOA$ сторона $N'C'$ проходит внутри угла BOA.

Две плоские фигуры, например два треугольника (рис. 156), считаются равными, если их можно совместить так, что они совпадут. На рис. 156 показан ряд положений треугольника ABC в процессе его движения с целью совмещения с треугольником $A'B'C'$.

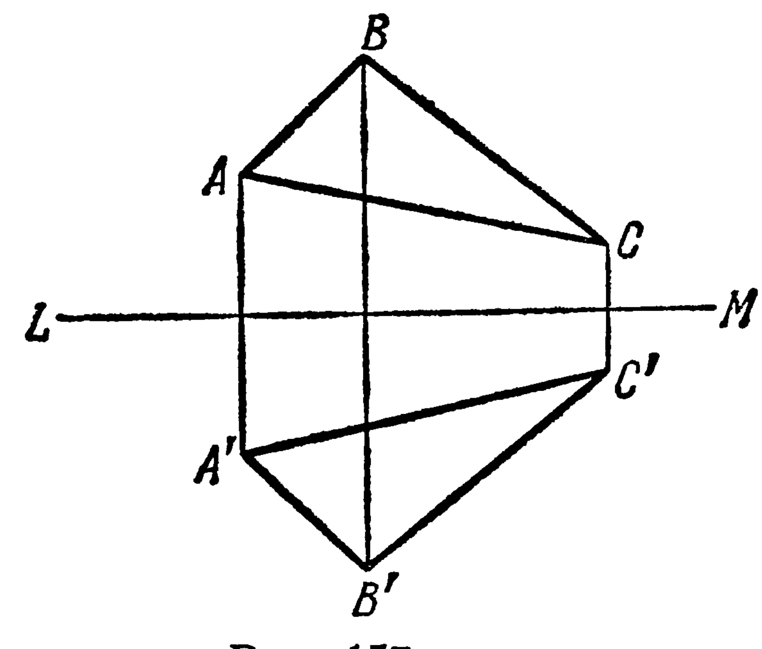


Рис. 157.

Два треугольника на рис. 157 расположены так, что один из них как бы является отражением другого в «зеркале» LM: вершины A, A'; B, B'; C, C' расположены симметрично относительно LM, т. е. так, что прямая LM перпендикулярна к отрезкам AA', BB', CC' и делит каждый из них пополам. Треугольники ABC и $A'B'C'$ также можно совместить; для этого следует перегнуть плоскость по линии LM (как складывают пополам лист бумаги). При этом вершины треугольников попарно совместятся, треугольники ABC и $A'B'C'$ — равные. Заметим, что их нельзя совместить, пользуясь лишь движением любого из них в самой плоскости чертежа (наподобие того, как это сделано на рис. 156).

161. Равенство тел. В принципе равенство пространственных фигур и тел определяется так же, как и равенство плоских фигур, т. е. посредством их совмещения, но здесь имеются две особенности. Первая состоит в том, что для совмещения пространственных фигур (тел) приходится их представлять себе проницаемыми. Так, два совершенно одинаковых деревянных кубика на рис. 158 нельзя совместить физически, они не могут «войти» друг в друга. Два геометрических куба мы беспрепятственно совмещаем (рис. 159). Ведь геометрический куб—лишь пространственная форма куба, «место», занимаемое физическим кубом в пространстве.

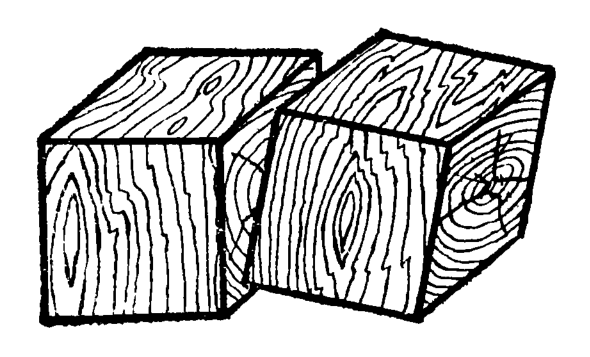



Рис. 158.

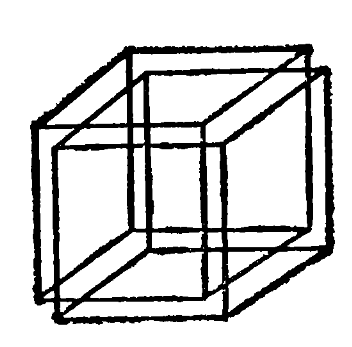


Рис. 159.

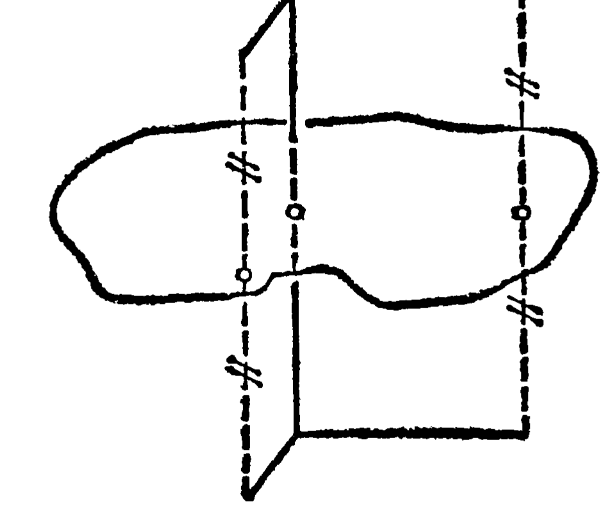


Рис. 160.

Вторая особенность связана с симметричным расположением тел. Два симметрично расположенных треугольника на рис. 157 мы совместили, выведя один из них из плоскости, в которой он был расположен; две симметрично расположенные относительно некоторой плоскости пространственные фигуры совместить движением уже не удается, подобно тому как не удается совместить левую и правую перчатки. Так, на рис. 160 изображена фигура, образованная тремя взаимно перпендикулярными отрезками, имеющими длины 1 *см*, 2 *см*, 3 *см*, и фигура, симметричная ей относительно плоскости («зеркала»). Сделав модели таких фигур из проволоки, читатель легко убедится, что совместить их невозможно, несмотря на то что они, в сущности, «одинаковые». Две такие фигуры, которые могут быть получены друг из друга зеркальным отражением, в геометрии также считают равными, даже если их и нельзя совместить.

§ 2. Измерение геометрических величин

162. Сложение отрезков. Длина отрезка. Введенное в п. 160 движение фигур позволило нам сравнивать между собой отрезки или углы, установить между данными отрезками отношения $=, <, >$ (равенство или неравенство). Можно также ввести действия сложения и вычитания отрезков. Так, пусть даны отрезки AB и CD. Приложим CD к AB так, чтобы CD составил

продолжение AB (рис. 161). Тогда отрезок AD' или любой отрезок, равный ему, мы назовем *суммой* отрезков AB и CD.

Разность отрезков определяется аналогичным образом: на большем отрезке от одного из его концов откладываем меньший

Рис. 161.

Рис. 162.

Рис. 163.

отрезок, оставшийся отрезок называется *разностью*. На рис. 162 отрезок $B'D$ (или любой равный ему) будет разностью отрезков CD и AB.

Для суммы и разности применяются обычные обозначения:

$$AB+CD=AD' \text{ (рис. 161)}, \qquad CD-AB=B'D \text{ (рис. 162)},$$

и справедливы обычные законы сложения и вычитания:

$$AB+CD=CD+AB, \quad AB+(CD-EF)=(AB+CD)-EF;$$

если $AB>CD$, то $AB+EF>CD+EF$ и т. д.

Отрезки можно умножать на целые положительные числа. Так, $CF=AB+AB+AB=3AB$ (рис. 163). Тем самым определяется и деление отрезка на натуральное число: $\frac{CF}{3}=AB$ — это отрезок AB такой, что $3AB=CF$. Понятно и обозначение типа $AK=\frac{2}{3}CF$. Это отрезок, который получается, если разделить CF на три равные части и взять две из них.

Определение понятия длины отрезка состоит в указании процесса ее измерения; при этом измерение длины отрезка основано

Рис. 164.

Рис. 165.

на выборе некоторой единицы длины: какой-либо отрезок OE (рис. 164) принимается за масштаб, т. е. за единицу измерения. Его длина объявляется равной единице. Пусть AB — любой другой отрезок. Откладываем единичный отрезок на AB столько раз (может быть, и нуль раз!), сколько он поместится на AB целиком. На рис. 164 масштабный отрезок уложился в AB ровно 6 раз. Поэтому длину AB считаем равной 6 единицам длины OE. В отрезке CD (рис. 165) масштабный отрезок укладывается 3 раза, но не может быть уложен 4 раза. Для измерения остатка

MD берем отрезок, составляющий ровно одну десятую часть масштабного отрезка (т. е. укладывающийся в нем ровно десять раз без остатка). Этой десятой долей единицы длины измеряем остаток MD; в нашем случае MD составил 7 десятых единицы длины и образовался еще некоторый остаток, который придется уже измерять одной сотой долей масштабного отрезка. Такой процесс измерения продолжается бесконечно, если только на некотором этапе доля 10^{-k} масштабного отрезка не уложится в очередном остатке ровно целое число раз. Таким образом, получается некоторая конечная или бесконечная десятичная дробь, т. е. действительное число, которое и принимают за *длину отрезка* при выбранном масштабном отрезке. На практике, конечно, длины задаются с известной степенью точности.

Обратно, если известна длина отрезка, например $AB = 3{,}47$, то, имея масштабный отрезок, можно построить и отрезок заданной длины: сначала откладываем на некоторой прямой a масштабный отрезок 3 раза, затем его десятую долю 4 раза и т. д. В случае бесконечной десятичной дроби мы можем провести построение с той или иной степенью точности.

Из алгебры нам известно, что все действительные числа подразделяются на рациональные (выражаемые конечными или периодическими дробями) и иррациональные, выражаемые бесконечными непериодическими дробями (п. 6). Соответственно и длина отрезка, представимая десятичной дробью, может быть (при данной единице длины!) рациональной или иррациональной.

Определенные в геометрической форме действия сложения, вычитания, умножения на число находятся в полном согласии с арифметическими действиями над длинами отрезков. Так,

$$\text{длина } (AB + CD) = \text{длина } AB + \text{длина } CD$$

и т. д. Слово «длина» в таких случаях в дальнейшем опускается. Действие умножения на число распространяется и на иррациональные множители. Так, $\sqrt{2}\,AB$ — это отрезок, длина которого в $\sqrt{2}$ раз больше длины отрезка AB.

Отношением двух отрезков мы назовем отношение их длин. Так как по определению длина $OE = 1$, то численно

$$\text{длина } AB = \frac{\text{длина } AB}{\text{длина } OE} \quad \text{или, короче,} \quad \frac{AB}{OE}$$

— длина отрезка равна его отношению к единичному отрезку.

Если вместо данной единицы длины OE выбрать новую $OE' = \lambda OE$, то численно длина любого отрезка AB будет выражаться отношением $\frac{AB}{OE'} = \frac{AB}{\lambda OE}$, т. е. изменится в λ раз. Например, если $OE = 1$ *м*, $OE' = 0{,}01 OE = 1$ *см*, то отрезок $AB = 5OE = 5$ *м* будет теперь равен $500 OE' = 500$ *см*.

Отношение двух отрезков не зависит от выбора масштаба.

163. Общая мера двух отрезков. В арифметике изучаются два вида дробей: десятичные и обыкновенные. Изложенный выше метод измерения длины отрезка приводил к выражению этой длины в виде десятичной дроби. При этом не представляется существенным, выражается ли длина измеряемого отрезка рациональным или иррациональным числом. Другой подход к измерению отрезков основан на понятии общей меры двух отрезков и исторически связан с открытием существования иррациональных чисел. При этом понятие общей меры двух отрезков аналогично понятию н. о. д. двух чисел, а сам процесс отыскания общей меры есть алгоритм Евклида (изложенный в п. 4 применительно к задаче отыскания н. о. д.).

Сформулируем определение: *общей мерой двух* (или *нескольких*) *отрезков* называется наибольший из таких отрезков, которые укладываются в каждом из данных целое число раз.

Пусть, например, даны два отрезка AB и CD. Если найдется такой отрезок, который уложится m раз в AB и n раз в CD, то, приняв его за масштабный отрезок, мы выразим длины AB и CD целыми числами m и n. При любом другом масштабе длины AB и CD будут находиться в отношении $m:n$, т. е. отношение их будет рациональным. Обратно, если отношение длин двух отрезков рационально, то оно представимо несократимой дробью $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$. Тогда отрезок, составляющий $(1/m)$-ю долю AB (или $(1/n)$-ю долю CD), будет общей мерой AB и CD. Итак, отрезки имеют общую меру тогда и только тогда, когда отношение их рационально. Такие отрезки называются *соизмеримыми*, отрезки же с иррациональным отношением длин — *несоизмеримыми*.

Процесс отыскания общей меры двух отрезков проводится так: меньший из двух отрезков укладывается на большем столько раз, сколько он в нем поместится; если остатка не образовалось, то меньший отрезок сам служит общей мерой данной пары отрезков. Если имеется остаток KD, то, коль скоро общая мера данных отрезков существует, она будет общей мерой отрезка AB и этого остатка. Поэтому остаток укладываем в AB возможно большее число раз, новый остаток — в прежнем и т. д. Если после конечного числа шагов предыдущий остаток разделится на последующий, то этот последний остаток и будет общей мерой AB и CD.

Пример. Найти общую меру данных двух отрезков AB и CD (рис. 166).

Решение. Отрезок AB уложился в CD два раза. Остаток MD уложился в AB ровно пять раз. Таким образом, этот остаток содержится в AB пять раз, а в CD — одиннадцать.

Данные два отрезка соизмеримы, их общей мерой служит отрезок MD, а длины относятся, как $5:11$.

В случае несоизмеримых отрезков процесс отыскания общей меры не может привести к результату и продолжается бесконечно.

Приведем пример пары отрезков, для которых алгоритм Евклида продолжается бесконечно. Рассмотрим для этой цели равнобедренный треугольник ABC (рис. 167) с острым углом

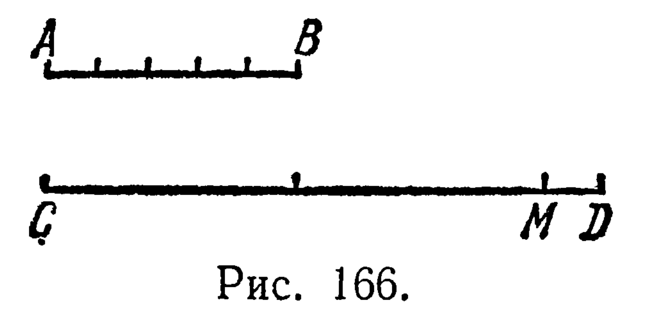


Рис. 166.

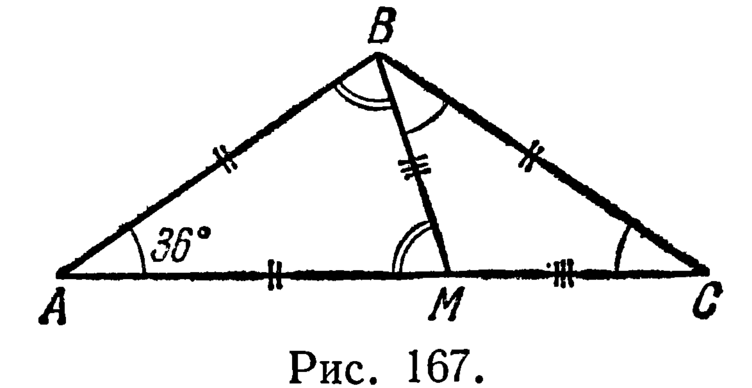


Рис. 167.

при основании, равным 36°, докажем несоизмеримость его основания и боковой стороны. Тупой угол при вершине будет равен 108°, так как сумма углов всякого треугольника равна 180° (см. п. 184). Его основание AC больше боковой стороны AB, но меньше удвоенной боковой стороны: $AB < AC < 2AB$ (любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон, п. 184). Поэтому сторона AB уложится на AC один раз и останется остаток MC. Заметим, что углы AMB и ABM равны $\frac{180-36}{2}=72°$, и потому угол MBC содержит $108-72=36°$. Значит, в треугольнике CMB углы при вершинах B и C равны 36° и треугольник CMB равнобедренный, в точности с теми же углами, что и исходный. В соответствии с порядком действий при определении общей меры двух отрезков нам следует теперь отрезок MC откладывать на $AB=BC$. Ввиду того, что к треугольнику CMB применимы те же рассуждения, что и к исходному, MC уложится на BC один раз и вновь образуется остаток; так как мы все время будем приходить к треугольникам с теми же углами (подобным данному, см. п. 207), то процесс будет продолжаться бесконечно.

Другим известным примером пары несоизмеримых отрезков служит диагональ квадрата и его сторона.

Рис. 168.

164. Сравнительная длина отрезков и ломаных. Пусть даны две точки M и N (рис. 168). Отрезок MN прямой, соединяющей эти точки, является кратчайшим путем, ведущим из M в N. Всякий иной путь, например представленный ломаной $MABN$, имеет заведомо бо́льшую длину: $MA+AB+BN > MN$. Свойство прямой быть кратчайшей из линий, соединяющих две точки, мы принимаем без доказательства.

Рассмотрим теперь две различные ломаные, соединяющие точки M и N (рис. 169). Пусть ломаная $MABN$ — выпуклая в том смысле, что она вместе с отрезком NM образует выпуклый многоугольник $MABN$. Пусть, далее, ломаная $MCDN$ (не обязательно выпуклая) охватывает указанный многоугольник. Ломаную $MCDN$ мы называем по этой причине *объемлющей*, ломаную $MABN$ — *объемлемой*. Тогда справедлива

Теорема. *Объемлющая ломаная $MCDN$ длиннее всякой выпуклой объемлемой ломаной.*

Доказательство. Пусть, например, прямая AB при своем продолжении пересекает объемлющую ломаную в точках K и L.

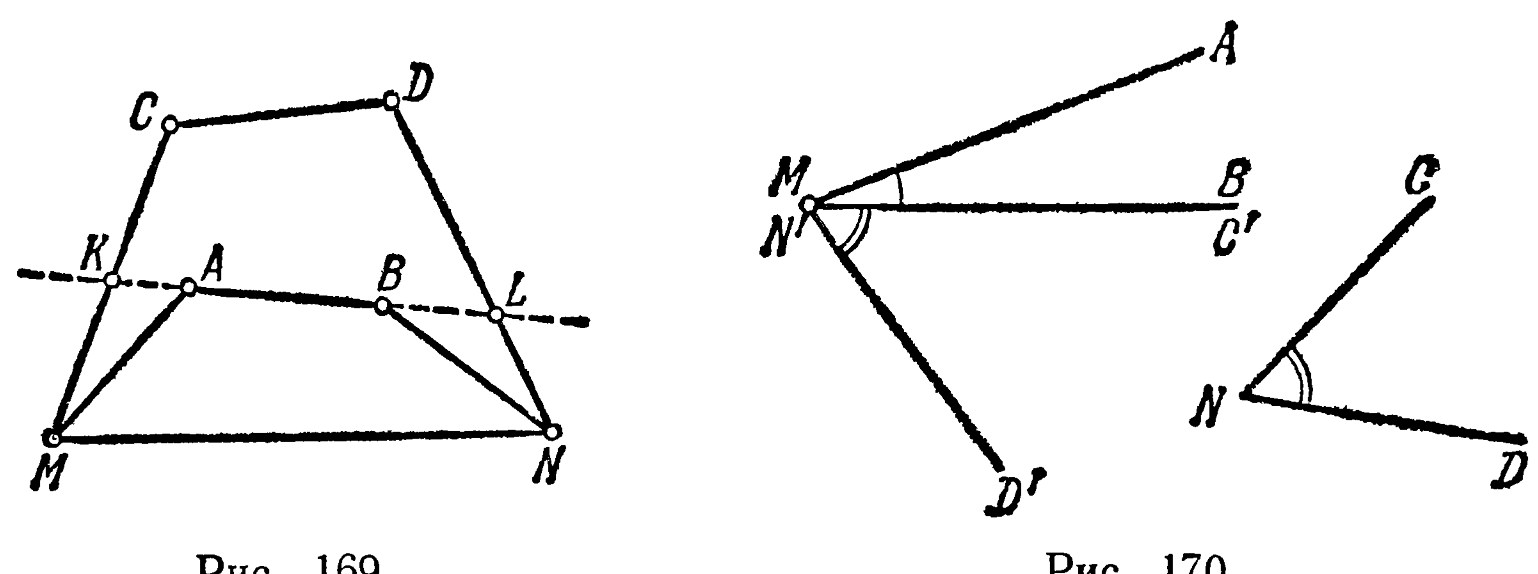


Рис. 169. Рис. 170.

Имеем ряд неравенств, выражающих то положение, что прямолинейный путь короче ломанного: $MA < MK + KA$, $BN < BL + LN$, $KL = KA + AB + BL < KC + CD + DL$. Складывая их почленно (п. 74) и учитывая, что $MK + KC = MC$, $DL + LN = DN$, находим: $MA + AB + BN < MC + CD + DN$, что и требовалось доказать.

165. Измерение углов. Мы видели, как можно сравнить по величине два угла, и познакомились с понятием равенства двух углов. В частности, легко заметить, что

1) все полные углы равны между собой;
2) все развернутые углы равны между собой;
3) все нулевые углы равны между собой.

Далее, над углами, так же как и над отрезками, можно производить действия сложения, вычитания, умножения на число. Так, чтобы сложить два угла (меньших развернутого) $\angle BMA$ и $\angle DNC$ (рис. 170), следует приложить один угол к другому так, чтобы вершины их совместились и стороны NC и MB совпали, а сами углы расположились по разные стороны от MB. Тогда угол $D'MA$ будет рассматриваться как сумма двух данных углов. Если имеется большее число слагаемых углов (меньших развернутого), то не исключено, что их сумма будет больше полного угла (об углах, больших полного, и об отрицательных углах см. пп. 95, 96).

Действие вычитания углов также имеет очевидный смысл.

На рис. 171 показано умножение угла на число: угол α, сложенный с равными ему углами β и γ, дает угол AOD, равный 3α: $\angle AOD = 3\alpha$. В свою очередь угол α можно считать одной третью угла AOD: $\alpha = \frac{1}{3}\angle AOD$.

Для таких действий над углами остаются справедливыми законы арифметики: если к равным углам прибавить равные углы, то получатся равные углы; если из равных углов вычесть равные углы, то останутся равные углы, и т. д.

В частности, отсюда вытекает свойство вертикальных углов: *вертикальные углы равны*. Действительно, оба они получаются

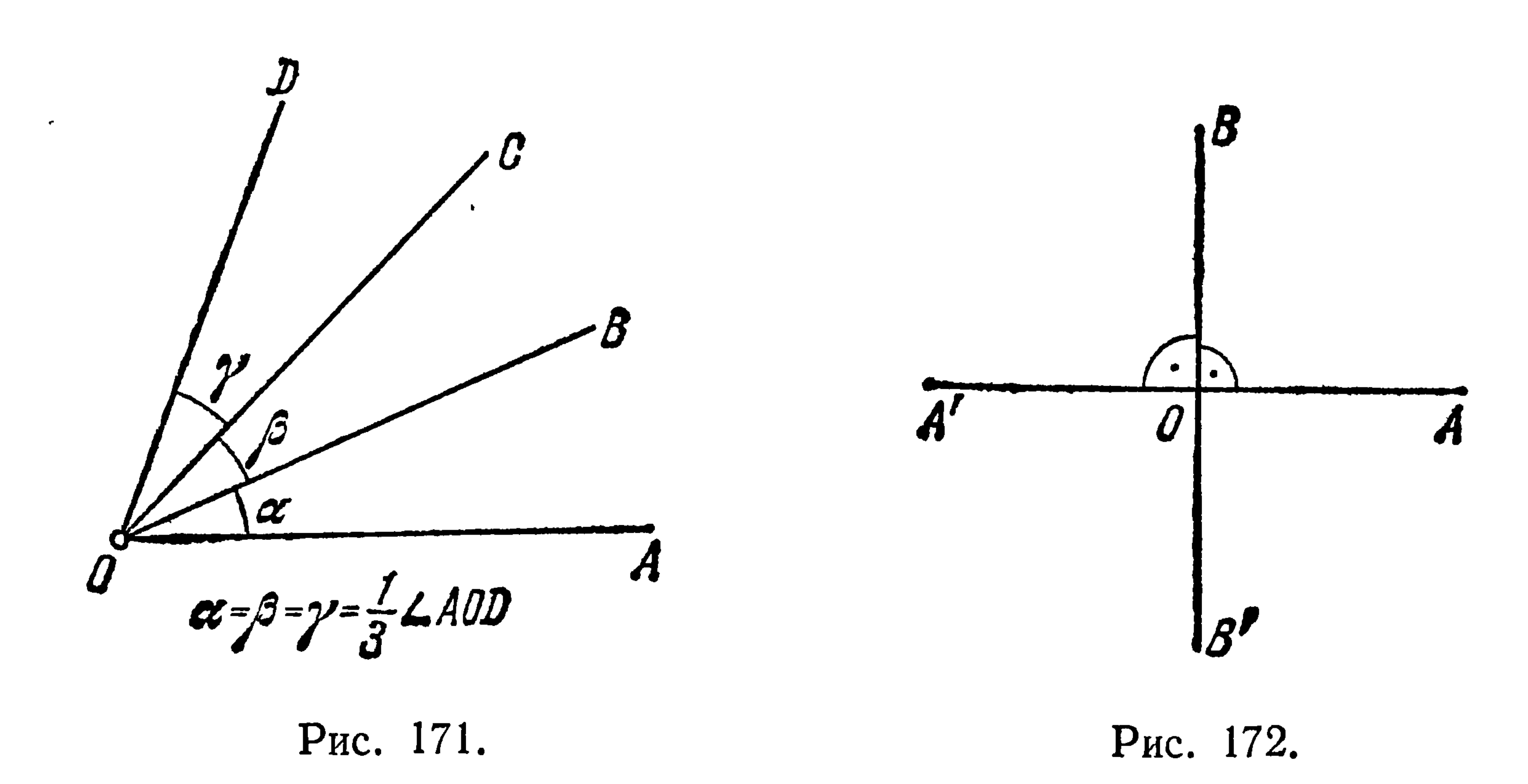


Рис. 171. Рис. 172.

из развернутого угла вычитанием одного и того же угла, смежного с каждым из них.

Два угла, составляющие в сумме развернутый угол, называются *дополнительными*. Ясно, что смежные углы являются *дополнительными*.

Угол, равный смежному с ним, составляет тем самым половину развернутого угла. Такой угол называется *прямым* углом и обозначается через d (рис. 172).

Все прямые углы равны между собой.

Развернутый угол равен двум прямым, т. е. $2d$, а полный — четырем прямым: $4d$.

Две прямые, образующие прямой угол, называются *взаимно перпендикулярными* прямыми; очевидно, что все четыре угла, образованные такими прямыми,— прямые углы (подробнее о перпендикулярных прямых см. п. 169).

Прямая, перпендикулярная к другой прямой, делит развернутый угол на две равные части. В более общем случае, когда дан некоторый угол COA (рис. 173), прямая LK, делящая его на две равные части, называется *биссектрисой* этого угла.

Биссектриса LK делит на две равные части также и угол DOB (углы COA и DOB — вертикальные).

Задача. Доказать, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим два смежных угла $\angle BOC$ и $\angle COA$ (рис. 173) и их биссектрисы OM и OK. Имеем

$$\angle KOM = \angle KOC + \angle COM = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle COB = d,$$

т. е. угол между биссектрисами прямой, что и требовалось доказать.

Как и измерение отрезков и любых других величин, измерение углов должно начинаться с выбора единицы измерения;

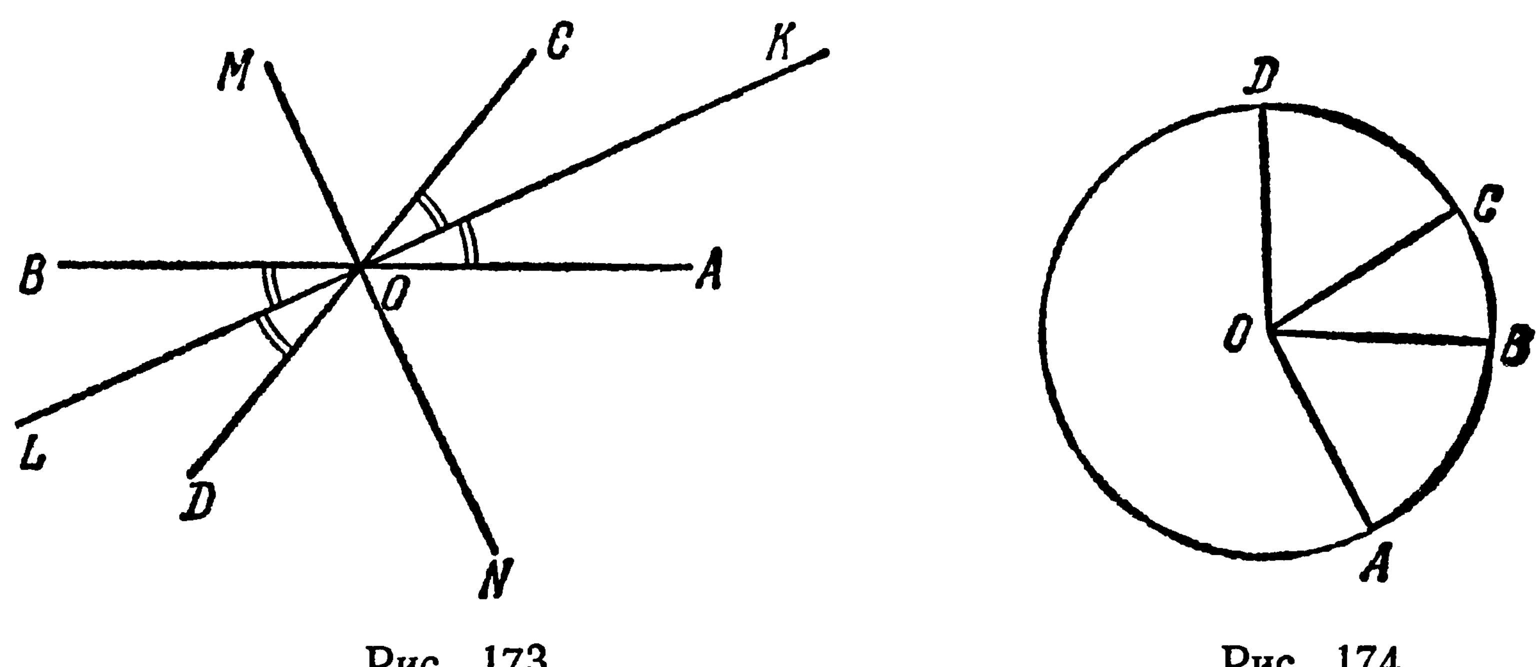


Рис. 173. Рис. 174.

имеется несколько принятых способов измерения углов, основанных на том или ином выборе единицы измерения. Наиболее распространен в качестве единицы измерения углов угол в один градус, составляющий одну девяностую долю прямого угла; будучи приложен к себе последовательно девяносто раз, он образует прямой угол. В силу исторически сложившихся обстоятельств принято подразделять градус на шестьдесят минут, одну минуту — на шестьдесят секунд, а уже секунду делить на десятые, сотые и т. д. доли.

Теперь весь процесс измерения угла протекает так. Укладываем угол в один градус в данный угол наибольшее возможное число раз. В остатке, если таковой имеется, укладываем угол в одну минуту; новый остаток измеряем углом в одну секунду и т. д. Если, например, угол α оказался равным 30 градусам, 18 минутам, 23,6 секунды, то пишут $\alpha = 30°18'23'',6$.

Ясно, что геометрическое сложение и вычитание углов соответствует арифметическому сложению и вычитанию их мер.

166. Радианная мера угла. Рассмотрим окружность (рис. 174) с центром O и различные углы с вершиной в центре[1]).

[1]) В пп. 166, 167 предполагается, что читатель имеет представление о свойствах окружности и ее длине (см. пп. 176, 229).

Такие углы (по отношению к окружности) называются *центральными*. Равным центральным углам одной и той же окружности отвечают и равные дуги, и наоборот. Действительно, при вращении вокруг центра O окружность «скользит» сама по себе, и когда, например, углы AOB и COD (рис. 174) совместятся, то совместятся и дуги, на которые опираются указанные углы. Это позволяет перенести градусную меру углов на дуги и определить понятие дугового градуса, дуговой минуты и т. д., что, например, широко применяется в географии при определении географических координат точки земной поверхности (широта и долгота).

В п. 229 показывается, что длина C окружности пропорциональна ее радиусу и выражается через него по формуле $C=2\pi R$, где π — вполне определенное (иррациональное) число, вычисленное довольно точно еще в древности, а теперь известное с несколькими тысячами десятичных знаков: $\pi=3{,}14159\ldots$

Это значит, что если измерить радиус окружности тонким шнуром, а затем накладывать этот шнур на окружность, как на обод колеса, то шнур уместится на окружности обода $6{,}28318\ldots$ раза. Та часть окружности, которая имеет длину, равную радиусу, т. е. та, которая покрывается нашим шнуром, наложенным один раз, будет дугой, отвечающей вполне определенному центральному углу, не зависящему от радиуса окружности. Этот угол принимается за единицу измерения углов в радианной мере и называется углом в один *радиан*.

Таким образом, углом в один радиан называется угол, соответствующий дуге окружности, имеющей длину, равную радиусу.

Так как вся окружность имеет длину $2\pi R$, то полный угол содержит $2\pi=6{,}283\ldots$ радиана, и один градус составляет $\pi/180=0{,}0174\ldots$ радиана. На долю одного радиана приходится, в свою очередь, $57°17'44'',8\ldots$ Между градусной и радианной мерой углов имеется прямая пропорциональность, что позволяет легко производить переход от одной меры к другой. Так, пусть α° и α обозначают соответственно градусную и радианную меру одного и того же угла. Тогда α° и α будут относиться, как градусная и радианная меры развернутого угла, т. е. как $180°$ и π:

$$\alpha^\circ:\alpha=180^\circ:\pi,$$

откуда

$$\alpha=\frac{\pi\alpha^\circ}{180}, \qquad \alpha^\circ=\frac{180^\circ\alpha}{\pi}. \qquad (166.1)$$

Пример 1. Выразить в градусах, минутах и секундах угол $\alpha=2d/7$. Выразить тот же угол в радианах.

Решение. Так как $d = 90°$, то градусное выражение угла содержит

$$\alpha° = \frac{2}{7} \cdot 90° = 25\frac{5°}{7} = 25°\,\frac{300'}{7} = 25°42\frac{6'}{7} =$$
$$= 25°42'\,\frac{360''}{7} = 25°42'51'',4\ldots$$

Ввиду того, что d соответствует $\pi/2$ радиан, находим

$$\alpha = \frac{2}{7}d = \frac{\pi}{7} \approx \frac{3{,}14159}{7} \approx 0{,}4488 \text{ радиана.}$$

Пример 2. Выразить угол $14°{,}3$ в радианах.

Решение. Имеем по формуле перехода (166.1)

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot 14{,}3 \approx 0{,}249 \text{ радиана.}$$

167. Измерение площадей. Длина отрезка служит мерой этого отрезка по отношению к некоторому стандартному масштабному отрезку. Длина отрезка — мера его «линейной» протяженности. Для плоских фигур сходным понятием является понятие площади; *площадь* фигуры — ее мера по отношению к стандартной фигуре (квадрату со стороной, равной единице), мера ее «плоской» протяженности. Как и в случае длины отрезка, *определением* площади будет служить *процесс ее измерения*. Объясним сначала некоторые отличия в подходе к понятию площади фигуры, делающие это понятие более сложным, чем понятие длины отрезка.

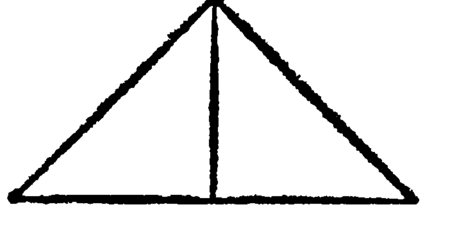
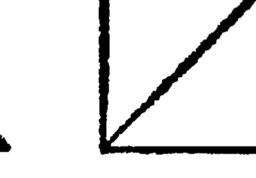



Рис. 175.

Равенство длин двух отрезков означает равенство самих отрезков; равенство градусных и радианных мер двух углов — равенство углов. С измерением площадей фигур дело обстоит сложней в том смысле, что неравные и непохожие друг на друга фигуры могут иметь равную площадь, или, как говорят, быть *равновеликими*. Так, на рис. 175 квадрат и треугольник равновелики (проще всего заметить, что они составлены из двух пар одинаковых треугольников, как говорят, «равносоставлены»). Более того, круг может иметь площадь, равную площади квадрата, трапеция — площадь, равную площади прямоугольника, и т. п.

За единицу измерения площадей выбирается квадрат с какой-либо заданной длиной стороны; естественно брать для этой цели квадрат со стороной, равной единичному отрезку. Если при этом длины измеряются в сантиметрах, то площади измеряются площадью квадрата со стороной 1 *см* (соответствующая единица измерения называется 1 *см*²), и т. п.

Процесс измерения площади (с принципиальной точки зрения) изложен ниже, площади же различных фигур рассматриваются там, где изучаются эти фигуры.

Из наглядного представления о площади вытекают некоторые свойства площадей, принимаемые без доказательства.

1. *Равные фигуры имеют равные площади.* Обратное не всегда верно: равные площади могут принадлежать неравным фигурам.

2. *Если фигура разделена какой-либо линией на две другие фигуры* (рис. 176), *то площадь всей фигуры равна сумме площадей фигур, ее составляющих.*

Следствие. *Если одна фигура составляет часть другой, то она имеет меньшую площадь, чем эта другая фигура.*

Во многих случаях эти свойства позволяют легко определять площади фигур, устанавливая, что они равновелики каким-либо простейшим фигурам с известной площадью (ниже, в пп. 200—202, на этом построено вычисление площадей треугольников, четырехугольников и многоугольников). Здесь мы дадим краткое описание общего подхода к определению площади любой фигуры и рассмотрим площадь прямоугольника.

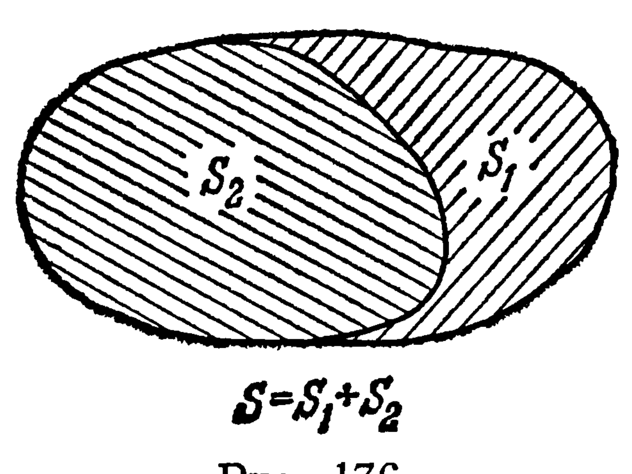


Рис. 176.

Пусть F (рис. 177) — какая-либо произвольная фигура с данной границей (контуром).

Разобьем плоскость на квадраты со стороной, равной единице, двумя системами перпендикулярных прямых (единичная решетка). Если внутри данной фигуры поместятся полностью p_0 таких квадратов, то ее площадь заведомо будет $\geqslant p_0$ кв. ед. Затем для более точной оценки мы сделаем разбиение более дробным, а именно, сохраняя и старые линии разбиения, разобьем фигуру прямыми, параллельными ранее проведенным, на квадраты со стороной, равной одной десятой (площадь каждого из них равна, очевидно, одной сотой кв. ед.). Подсчитаем сумму площадей всех квадратов этого второго разбиения, поместившихся внутри нашей фигуры, — она не меньше суммы площадей квадратов первого разбиения. Делая разбиение еще более дробным, получим ряд фигур с неубывающей площадью, образованных квадратами со сторонами 1, $^1/_{10}$, $^1/_{100}$ и т. д. Чем мельче разбиение, тем большую площадь имеет совокупность квадратов, уместившихся в фигуре F. В то же время эта площадь никогда не превзойдет площади какого-либо квадрата, содержащего данную фигуру, т. е. будет ограниченной величиной.

Известно (п. 84, теорема Вейерштрасса), что такая монотонная (возрастающая) последовательность стремится к определенному пределу. Этот предел и принимается за площадь фигуры.

Можно доказать[1]), что величина указанного предела не зависит от конкретных подробностей способа разбиения фигуры, таких, как, например, направление сторон квадратов, на которые мы произвели разбиение.

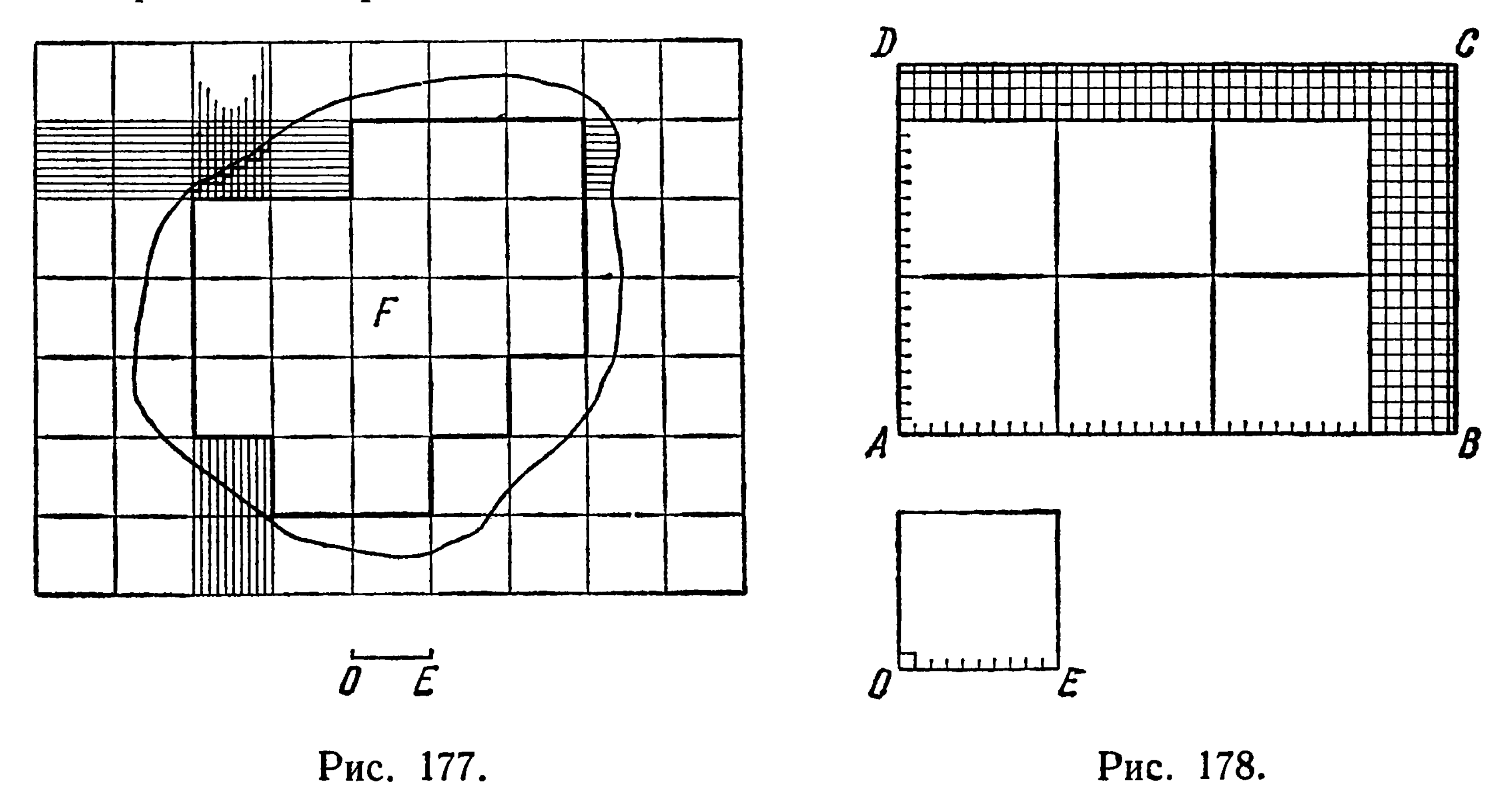


Рис. 177. Рис. 178.

168. Площадь прямоугольника. Объем прямоугольного параллелепипеда. Как пример вычисления площади фигуры рассмотрим задачу отыскания площади прямоугольника. Возьмем прямоугольник со сторонами, равными a и b единиц (рис. 178). Пусть сторона a выражается дробью $a = p_0, p_1 p_2 \ldots$, сторона $b = q_0, q_1 q_2 \ldots$ (в частности, они могут иметь и длины, выражаемые целыми числами). Будем производить разбиение прямоугольника прямыми, параллельными его сторонам, взяв в числе этих прямых прямые, на которых лежат стороны прямоугольника AB и CD. Тогда на стороне $AB = a$ уместится p_0 единиц, на стороне $BC = b$ уместится q_0 единиц; число квадратов первого разбиения (целых единичных квадратов), поместившихся в прямоугольнике, будет равно $p_0 q_0$. На рис. 178 $p_0 = 3$, $q_0 = 2$, число квадратов равно 6. При разбиении на десятые доли единичного отрезка (достаточно производить разбиение остатков сторон!) в стороне AB уместится $10p_0 + p_1$, в стороне BC $10q_0 + q_1$ десятых единицы. Число квадратов второго разбиения (с площадью, равной 1/100 единицы площади) будет равно $(10p_0 + p_1)(10q_0 + q_1)$, а площадь фигуры, занятой ими, выразится одной сотой этого числа:

$$\frac{1}{100}(10p_0 + p_1)(10q_0 + q_1) = p_0, p_1 \cdot q_0, q_1.$$

[1]) Во всяком случае, для всех фигур, рассматриваемых в курсе элементарной геометрии.

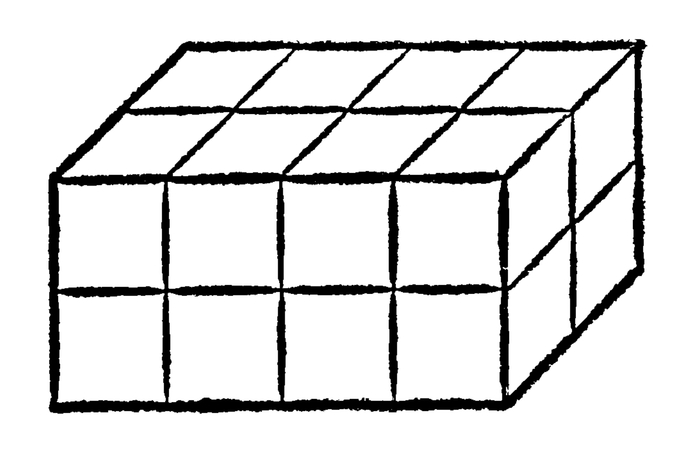
Продолжая процесс, мы все время получаем для площади прямоугольника приближенное значение по недостатку[1]).

$$S \approx p_0,p_1 \ldots p_s \cdot q_0,q_1 \ldots q_s.$$

При неограниченном продолжении процесса дробь $p_0,p_1 \ldots p_s \ldots$ выражает длину стороны a, дробь $q_0,q_1 \ldots q_s \ldots$ — длину стороны b, и площадь окончательно выражается как произведение сторон:

$$S = \lim_{s \to \infty} p_0,p_1 \ldots p_s \cdot q_0,q_1 \ldots q_s = ab$$

(мы опираемся здесь на теорему о том, что предел произведения равен произведению пределов; п. 85). В частности, площадь квадрата равна квадрату его стороны: $S = a^2$.



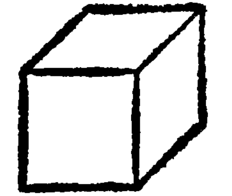


Рис. 179.

Процесс вычисления объема тела не отличается существенно от изложенного. За единицу измерения объемов принимается объем куба с ребром, равным единице длины; любое тело, объем которого надлежит найти, разбивают тремя рядами перпендикулярных между собой плоскостей на кубы с ребром, равным единице, затем на кубы с ребром в одну десятую единицы, в одну сотую и т. д.

Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c оказывается равным произведению длин его трех взаимно перпендикулярных ребер (измерений):

$$V = abc.$$

На рис. 179 это показано на примере параллелепипеда с ребрами, длина которых выражается целым числом единиц:

$$a = 2, \; b = 4, \; c = 2.$$

На систематическом развитии схематически изложенного здесь метода основано вычисление площадей и объемов в курсе высшей математики (интегральное исчисление). В элементарном курсе геометрии, где рассматриваются лишь некоторые простейшие фигуры и тела, для решения этих задач применяются различные частные приемы.

---

[1]) При сторонах прямоугольника, выражаемых конечными десятичными дробями, значение, начиная с некоторого s, будет точным.

Упражнения

1. Возьмите два отрезка AB и CD. Пользуясь циркулем, постройте на какой-нибудь прямой отрезки, равные $2AB+CD$ и $5AB-2CD$.

2. При отыскании общей меры отрезков AB и CD первый из них уложился во втором 2 раза. Остаток уложился в AB 4 раза. Новый остаток в прежнем уложился 5 раз, и, наконец, последний остаток в предыдущем — 3 раза. Как относятся длины отрезков AB и CD?

3. Проведите заново рассуждения, необходимые для доказательства теоремы о длине объемлемой и объемлющей ломаной, по рис. 180.

4. Разность двух смежных углов равна $d/7$? Чему равен каждый из них?

5. Какой угол составляют часовая и минутная стрелки в 15 час. 20 мин.?

Рис. 180.

6. За сколько времени земной шар поворачивается вокруг своей оси на одну дуговую мунуту?

7. Выразить углы 30°, 75°, 1°20′ в радианной мере.

8. Для углов в 1,86 радиана, 3,07 радиана написать выражения в градусной мере.

9. Стороны прямоугольника имеют иррациональные длины. Может ли его площадь выражаться рациональным числом? Приведите пример.

Глава XIV

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 1. Перпендикулярные и параллельные прямые

169. Перпендикуляр и наклонные. Рассмотрим прямую AB и точку M, не лежащую на ней (рис. 181).

Теорема. *Через точку M можно провести прямую, перпендикулярную к данной, и притом только одну.*

Здесь следует различать два отдельных утверждения: 1) перпендикуляр (хотя бы один!) существует; 2) существует не более одного перпендикуляра.

Доказательство. 1. Существование перпендикуляра. Перегнем рис. 181 по прямой AB так, чтобы точка M совместилась с точкой M', лежащей по сравнению с M по другую сторону от прямой AB. Расположенные так точки M и M' называются *симметричными относительно прямой AB*. Соединим M и симметричную с ней точку M'. Отрезок MM' пересечет AB в некоторой точке M_0. Покажем, что прямая AB перпендикулярна к MM'. Действительно, углы MM_0B и BM_0M' смежные и при наложении «верхней» полуплоскости на «нижнюю» путем сгибания по прямой совпадут по построению и, значит, равны, т. е. каждый из них прямой.

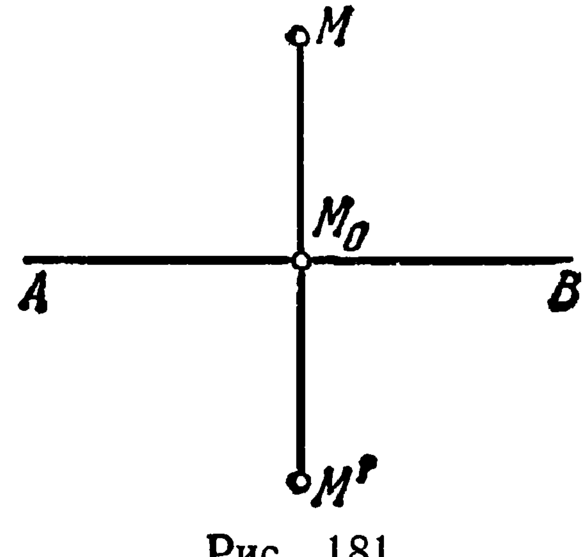


Рис. 181.

2. Единственность. Теперь докажем единственность перпендикуляра. Двух перпендикуляров к AB из точки M провести нельзя. Действительно, перпендикуляр MM_0 к AB при сгибе плоскости по AB совместится со своим продолжением ввиду равенства смежных углов; если бы через M проходило два таких перпендикуляра, то они оба прошли бы через M'; но точки M и M' могут быть соединены только одной прямой. Итак, прямая MM' — единственный перпендикуляр, который можно опустить из M на прямую AB. Точка M_0 называется *основанием перпендикуляра*.

Через точку, лежащую на прямой, также можно провести лишь один перпендикуляр к прямой. Для его построения достаточно приложить к данной прямой одну сторону прямого угла, тогда вторая его сторона дает искомый перпендикуляр. Таким образом, доказано, что *через данную точку плоскости можно провести один и только один перпендикуляр к данной прямой* (говорят: «опустить перпендикуляр», если точка не лежит на прямой, и «восставить перпендикуляр», если точка принадлежит прямой).

Пусть AB — прямая, M_0 — основание перпендикуляра, опущенного на нее из точки M (рис. 182); возьмем на AB произвольную точку C, отличную от M_0, и соединим с точкой M.

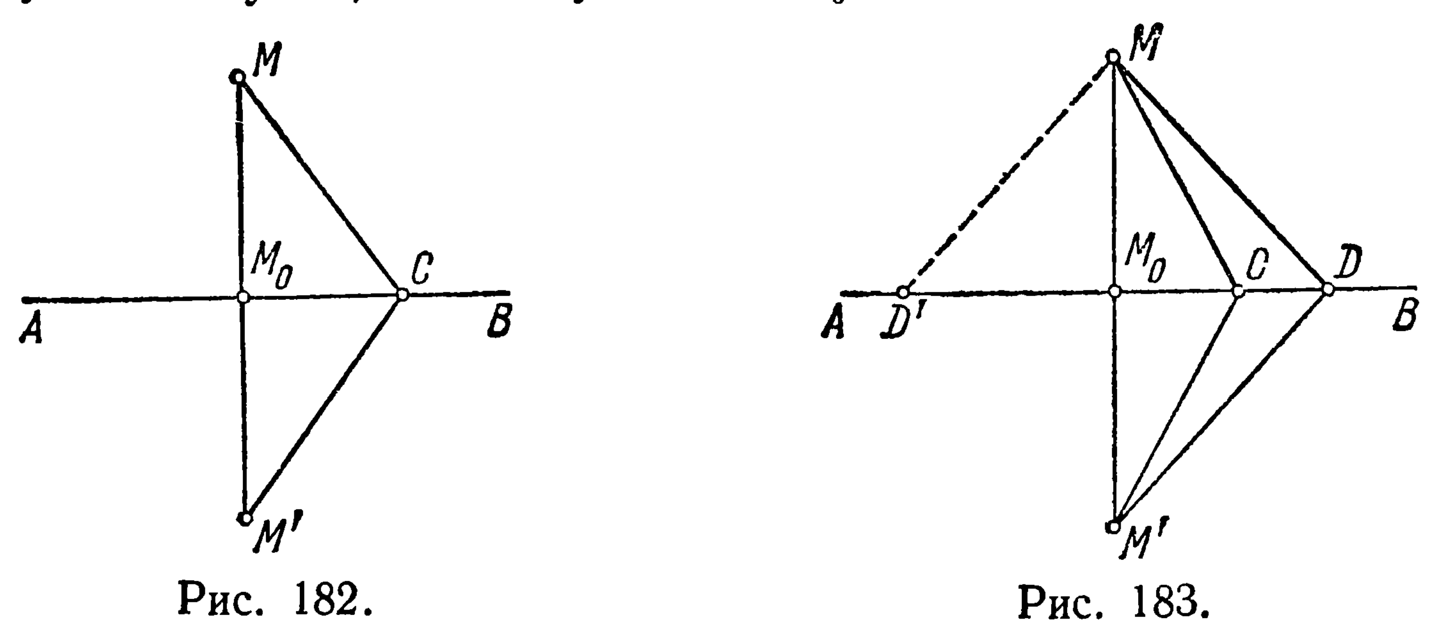


Рис. 182. Рис. 183.

Полученная прямая образует с AB углы, отличные от прямого, и называется *наклонной*. Через точку M можно провести бесчисленное множество наклонных к AB; в более узком смысле наклонной называется отрезок MC; C называется *основанием наклонной*, а отрезок между основаниями перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки M к прямой AB,— *проекцией наклонной*.

Отметим некоторые свойства наклонных.

1. *Если из данной точки M к одной и той же прямой AB проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная длиннее перпендикуляра.*

Доказательство. Перегнем рис. 182 по прямой AB; тогда точка M займет положение M', симметричное исходному, наклонная MC перейдет в положение $M'C$. Теперь ломаная $MCM' = 2MC$ длиннее прямолинейного отрезка $MM' = 2MM_0$, откуда $MC > MM_0$, что и требовалось доказать.

2. *Из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, которая имеет большую проекцию*, т. е. основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра.

Доказательство. Пусть MC и MD — две наклонные (рис. 183). Перегибая рис. 183 по прямой AB, видим, что длина объемлющей ломаной MDM' больше длины объемлемой выпуклой

ломаной MCM', т.е. $2MD > 2MC$, или $MD > MC$. Если наклонные расположены по разные стороны от перпендикуляра MM_0 (рис. 183), то мы придем к тому же результату, перегнув сначала рис. 183 по линии этого перпендикуляра.

3. *Если две различные наклонные, проведенные к прямой AB из одной и той же точки M, равны, то их основания лежат по разные стороны от основания перпендикуляра, опущенного на AB из той же точки, на равных расстояниях от него.*

Доказательство. По предыдущему при любом ином расположении одна из наклонных (именно та, основание которой удалено больше) была бы длиннее второй. Отсюда следует, что $MA = MB$.

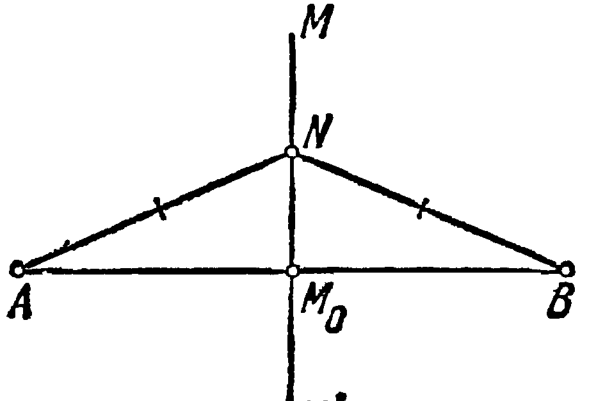


Рис. 184.

4. Пусть две равные наклонные проведены из точки M к AB. Проведя прямую через M и середину отрезка между основаниями наклонных, получим перпендикуляр к прямой AB.

170. Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку в его середине. Рассмотрим отрезок AB и перпендикуляр, восставленный к нему в его середине M_0 (рис. 184). Тогда (п. 169) наклонные, проведенные в концы A и B отрезка из произвольной точки N перпендикуляра M_0M, будут равны между собой. Если, обратно, N — некоторая точка плоскости такая, что отрезки NA и NB равны между собой: $NA = NB$, то точка N лежит на перпендикуляре M_0M к прямой AB. Действительно, тогда (п. 169, свойство 4) прямая, проведенная из N в середину AB, перпендикулярна к AB, т.е. N лежит на M_0M.

Таким образом, равенство наклонных $NA = NB$ имеет место для точек перпендикуляра M_0M и только для них. Доказана

Теорема. *Перпендикуляр, проведенный к отрезку в его середине, является геометрическим местом точек*[1]), *равноотстоящих от концов отрезка.*

Также можно сказать, что перпендикуляр, проведенный к отрезку в его середине, является осью симметрии отрезка. Действительно, сгибая чертеж по перпендикуляру, мы совместим полуотрезок AM_0 с BM_0.

171. Параллельные прямые. Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не пересекаются. Если имеется точка M и не проходящая через нее прямая AB (рис. 185), то через точку M всегда можно провести прямую, параллельную данной. Для этого опустим из M перпендикуляр MM_0 на прямую AB, а затем восставим уже к этому перпендикуляру MM_0 перпендикуляр MC; полученная прямая не пере-

[1]) По поводу этого понятия см. п. 174.

сечет данной, так как если бы AB и MC пересекались, то через точку их пересечения проходили бы две прямые AB и MC, перпендикулярные к M_0M, что (п. 170) невозможно. Указанное построение доказывает существование параллельных прямых.

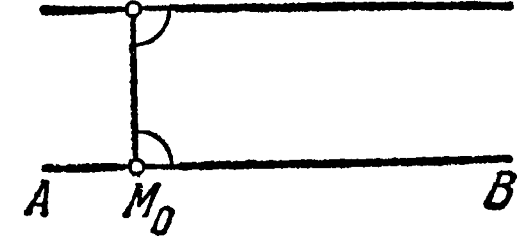


Рис. 185.

В качестве одной из предпосылок, принимаемых без доказательства (аксиом или постулатов), принимается следующая:

Через произвольную точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести лишь одну прямую, параллельную данной.

Следствие. *Если две прямые в плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.*

Доказательство. Если бы эти прямые пересекались, то через точку их пересечения проходили бы две прямые, параллельные данной (третьей) прямой. Параллельность прямых обозначается так: $AB \parallel CD$.

Верно также следующее предложение:

Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых, перпендикулярна и к другой (или к другим).

Доказательство. Если $M_0N \perp AB$ и N — точка пересечения M_0N с CD ($CD \parallel AB$, рис. 186), то прямая, проведенная

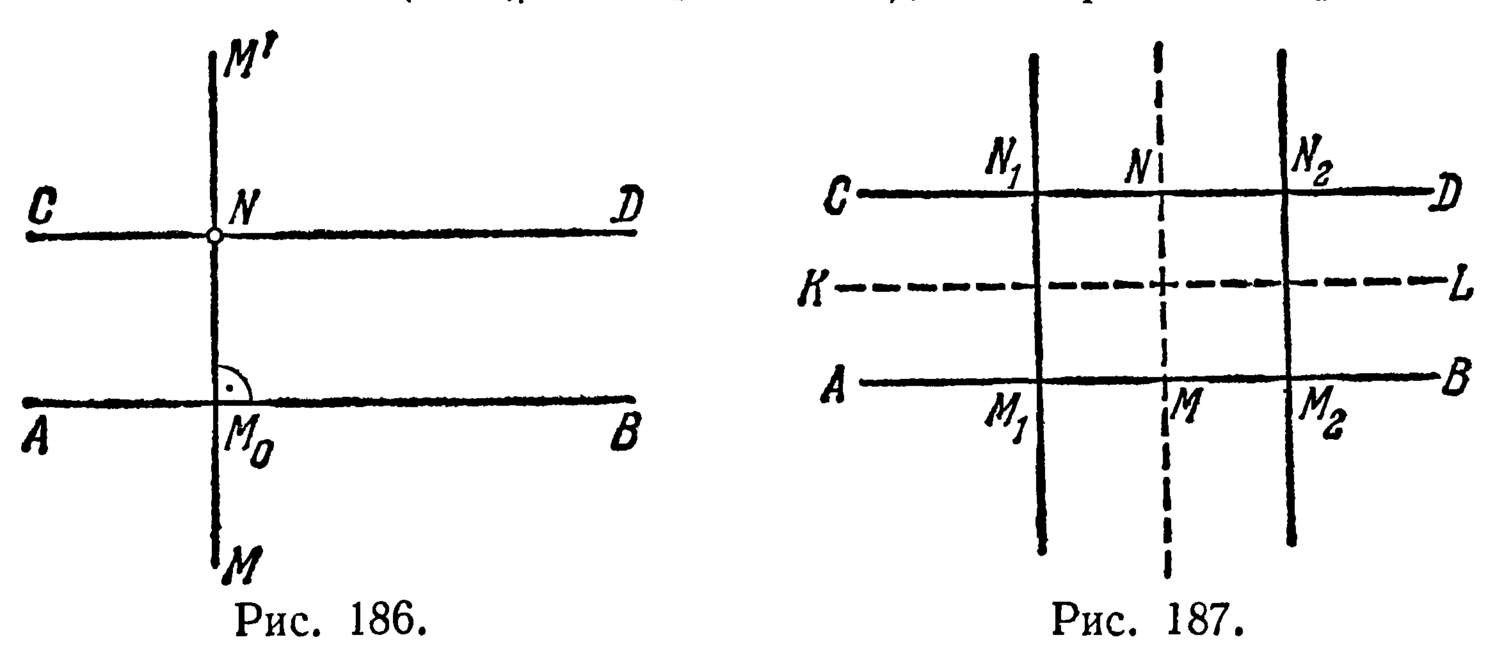


Рис. 186. Рис. 187.

через N перпендикулярно к M_0N, будет параллельна AB. Но через N проходит лишь одна прямая CD, параллельная AB; отсюда следует перпендикулярность M_0N и CD.

Рассмотрим две параллельные прямые (рис. 186) и перпендикуляр M_0N к ним. Убедимся, что этот перпендикуляр является осью симметрии для фигуры, образованной этими прямыми («полосы»).

Действительно, если перегнем рис. 186 по M_0N, то в силу равенства прямых углов между собой луч M_0A совместится с лучом M_0B и луч NC — с лучом ND.

Далее, пусть M_1N_1 и M_2N_2 — два перпендикуляра к параллельным AB и CD (рис. 187). Тогда $M_1N_1 = M_2N_2$, т. е. длины

всех отрезков, перпендикулярных к паре параллельных прямых и заключенных между ними, равны между собой (параллельные прямые равноотстоят друг от друга на всем своем протяжении).

Для доказательства возьмем середину отрезка M_1M_2 — точку M и проведем через нее перпендикуляр MN к данным параллельным прямым. Сгибая рис. 187 по линии MN, убедимся, что M_1N_1 и M_2N_2 совпадут, т. е. $M_1N_1 = M_2N_2$.

Рассмотрим еще прямую KL, проведенную параллельно двум данным параллельным прямым (рис. 187) через середину отрезка MN, перпендикулярного к ним. Предоставим читателю показать, что, сгибая рис. 187 по KL, мы совместим AB и CD.

172. Углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей. Рассмотрим пару параллельных прямых AB и CD и какую-либо прямую m, не параллельную им (рис. 188). Прямая

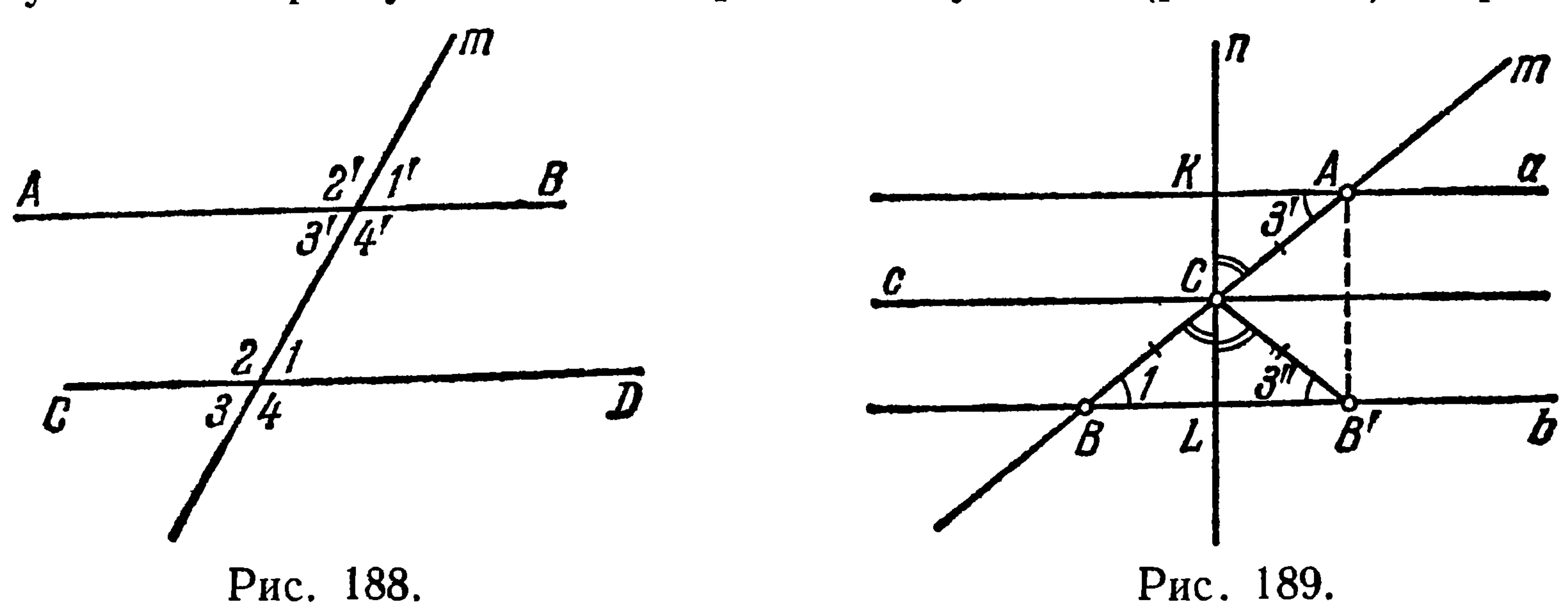


Рис. 188. Рис. 189.

m образует с каждой из параллельных прямых 4 угла, обозначенные на рисунке *1*, *2*, *3*, *4* и *1'*, *2'*, *3'*, *4'*. При этом парам указанных углов даются следующие наименования.

Углы *1* и *1'*, *2* и *2'*, *3* и *3'*, *4* и *4'* называются *соответственными*; *1* и *3'*, *2* и *4'* — *внутренними накрест лежащими*; *3* и *1'*, *4* и *2'* — *внешними накрест лежащими*. Углы *1* и *4'*, *2* и *3'* называются *внутренними односторонними*; *4* и *1'*, *3* и *2'* — *внешними односторонними*. Между этими парами углов имеются следующие соотношения:

1. *Соответственные углы равны:* $1 = 1'$, $2 = 2'$ и т. д.
2. *Внутренние накрест лежащие углы равны:* $1 = 3'$, $2 = 4'$.
3. *Внешние накрест лежащие углы равны:* $3 = 1'$, $4 = 2'$.
4. *Односторонние* (*внутренние* или *внешние*) *углы в сумме составляют два прямых:* $1 + 4' = 2d$, $4 + 1' = 2d$ и т. д.

Из указанных соотношений достаточно доказать какое-либо одно, так как остальные вытекают из него. Так, например, если $1 = 1'$, то легко видеть, что $4 = 4'$. Действительно, из $1 + 4 = 2d$, $1' + 4' = 2d$ имеем $4 = 4'$.

Остановимся на доказательстве одного лишь соотношения $1 = 3'$ (равенство внутренних накрест лежащих углов).

Возьмем середину C отрезка AB секущей m (рис. 189) и проведем через нее перпендикуляр n к нашим параллельным (мы знаем, что перпендикуляр к любой из них будет и перпендикуляром к другой). Через ту же середину C отрезка AB проведем прямую c, параллельную данным прямым a и b (и, значит, также перпендикулярную к n). Перегнем рис. 189 по перпендикуляру n. Тогда наклонная CB займет положение CB', причем $1=3''$, так как прямая b, будучи перпендикулярной к линии сгиба, совместится со своим продолжением. Если же мы теперь вновь перегнем чертеж по линии c, то треугольник CLB' весь совместится с треугольником CKA. Действительно, CL пойдет по CK в силу перпендикулярности c и n, CB' пойдет по CA в виду равенства углов BCL и ACK, точки B' и A совместятся вследствие равенства отрезков CB' и CA и прямая b совпадает с прямой a, так как обе перпендикулярны к n; таким образом, угол $CB'L$ совместится с углом CAK и равенства $1=3''$ и $3''=3'$ покажут нам, что $1=3'$.

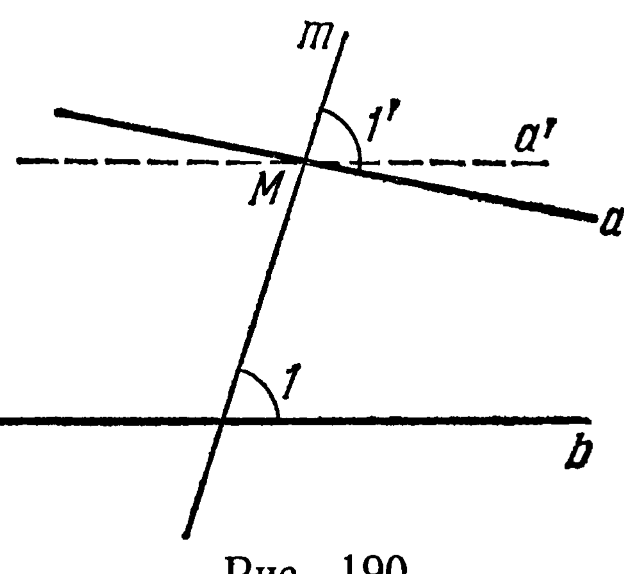


Рис. 190.

Любое из указанных равенств между углами, образованными секущей при двух прямых, в свою очередь повлечет за собой параллельность прямых. Пусть, например, при пересечении двух прямых a и b (на рис. 190 они условно изображены как непараллельные) третьей прямой m углы 1 и $1'$ получились равные.

Проведем через точку M пересечения прямых m и a прямую a', параллельную b. Она должна также образовать с m угол, равный 1, и потому совпадет с a, т. е. прямая a параллельна b.

Остальные случаи рекомендуется разобрать читателю.

173. Углы с параллельными или перпендикулярными сторонами. Для углов с соответственно параллельными сторонами справедливы следующие предложения:

1. *Если стороны a и b одного угла соответственно параллельны сторонам a' и b' другого угла и одинаково с ними направлены, то углы равны.*

2. *Если при том же условии параллельности стороны a и b направлены противоположно сторонам a' и b', то углы также равны.*

3. *Если, наконец, стороны a и a' параллельны и одинаково направлены, а стороны b и b' параллельны и противоположно направлены, то углы дополняют друг друга до развернутого.*

Доказательство. Докажем первое из этих предложений. Пусть стороны a и a', b и b' углов 1 и $1'$ параллельны и одинаково направлены (рис. 191). Соединим вершины углов прямой OO'. При этом возможны два случая: прямая OO' проходит

внутри углов *1* и *1'* (рис. 191, *а*) или вне этих углов (рис. 191, *б*). В обоих случаях доказательство очевидно: так, в первом случае

$$1=\angle ac+\angle cb,\quad 1'=\angle a'c+\angle cb',$$

но $\angle ac=\angle a'c$ и $\angle cb=\angle cb'$, откуда получаем $1=1'$. Во втором случае имеем

$$1=\angle ac-\angle bc,\quad 1'=\angle a'c-\angle b'c,$$

и результат вновь вытекает из равенств $\angle ac=\angle a'c$ и $\angle bc=\angle b'c$.

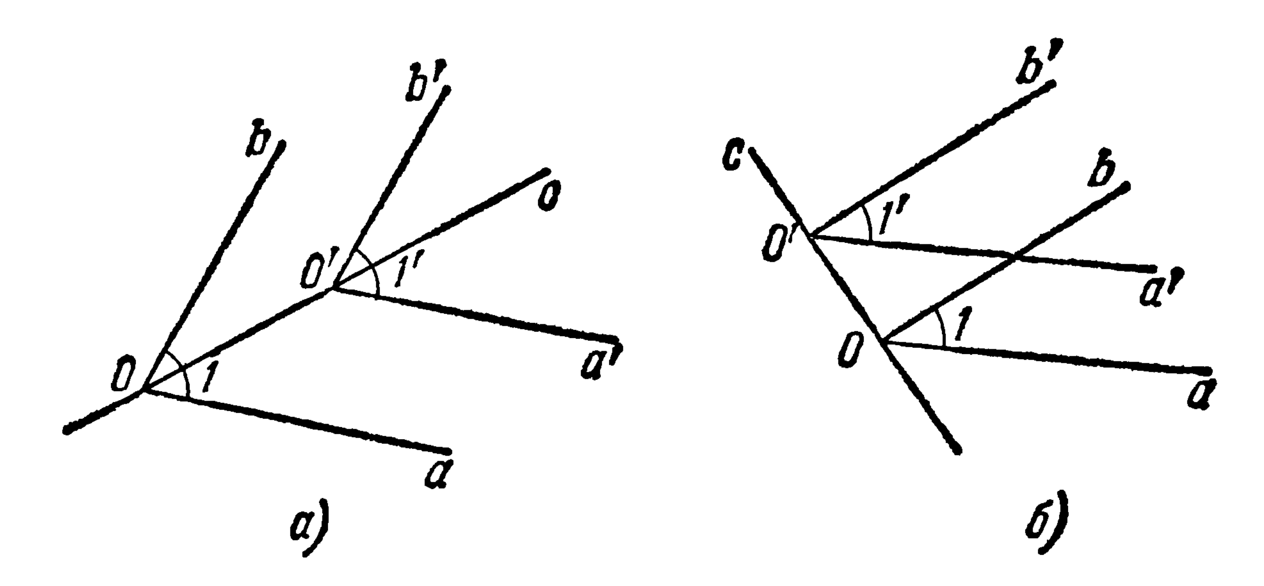


Рис. 191.

Доказательства предложений 2 и 3 оставляем читателю.

Можно сказать, что если стороны углов соответственно параллельны, то углы либо равны, либо дают в сумме развернутый. Очевидно, они равны, если оба одновременно острые или оба тупые, и сумма их равна $2d$, если один из них острый, а другой тупой.

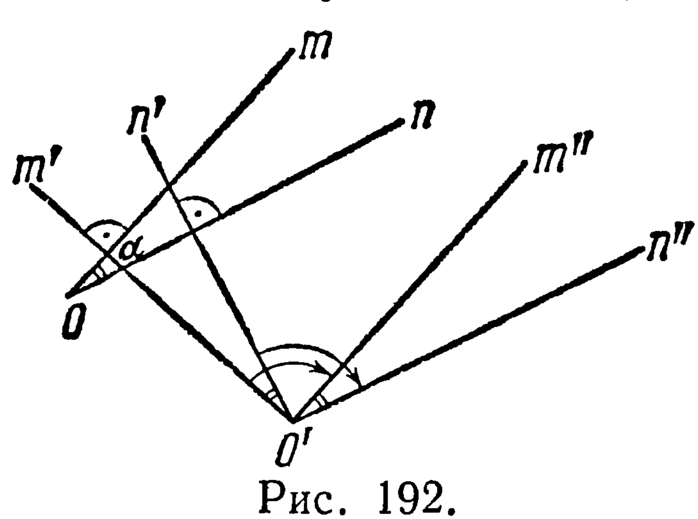


Рис. 192.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны или дополняют друг друга до развернутого угла.

Доказательство. Пусть α — некоторый угол (рис. 192), а O' — вершина угла, образованного прямыми m' и n', соответственно перпендикулярными к m и n (углом $m'n'$ может быть любой из четырех углов, образованных двумя этими прямыми). Повернем угол $m'n'$ (т. е. обе его стороны) вокруг своей вершины O' на прямой угол; получим угол, равный ему, но такой, стороны которого перпендикулярны к сторонам m' и n'; стороны повернутого угла обозначены на рис. 192 через m'' и n''. Они параллельны прямым m и n, образующим данный угол α. Поэтому углы mn и $m''n''$ (а значит, и углы mn и $m'n'$) либо равны, либо образуют в сумме развернутый угол.

§ 2. Геометрические места точек. Окружность

174. Геометрическое место точек. В п. 170 мы уже употребляли выражение «геометрическое место точек». Напомним, что под словами «геометрическое место точек» понимается всякое множество (совокупность, собрание) точек, обладающих каким-то свойством, общим для них, но неприсущим остальным точкам, не принадлежащим данному собранию. Так, все точки, равноудаленные от двух данных точек A и B, располагаются на перпендикуляре, восставленном в середине отрезка AB; поэтому мы говорим, что этот перпендикуляр служит *геометрическим местом точек*, равноудаленных от двух данных точек. Приведем еще один пример, поясняющий понятие геометрического места точек.

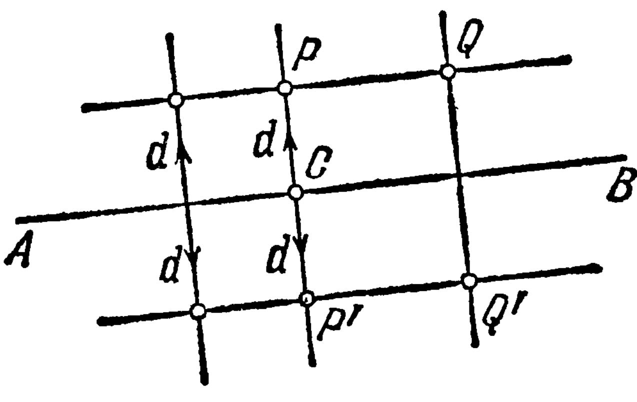
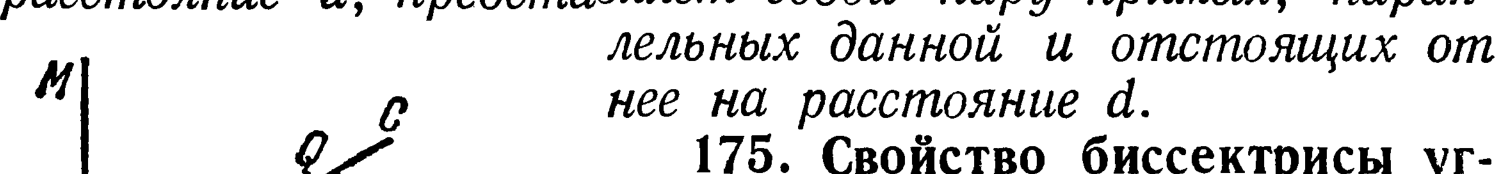


Рис. 193.

Рассмотрим прямую AB. Найдем геометрическое место точек, находящихся от этой прямой на расстоянии, равном данному отрезку d (рис. 193).

Ясно, как получить такие точки: в любой точке данной прямой AB восставим к ней перпендикуляр и отложим на нем в обоих направлениях отрезки, равные d. Проведем через концы этих отрезков прямые, параллельные данной. Множество точек, лежащих на этих двух прямых, и будет искомым геометрическим местом точек.


Итак, *геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние d, представляет собой пару прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на расстояние d.*

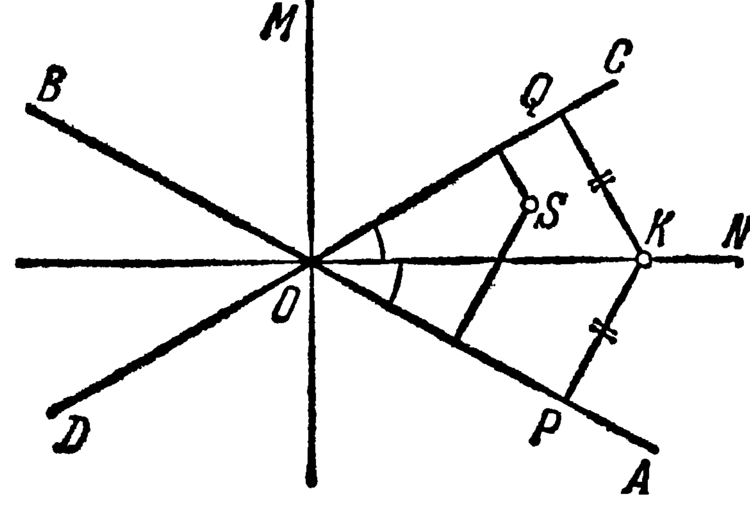


Рис. 194.

175. Свойство биссектрисы угла. Рассмотрим угол AOC (рис. 194) и его биссектрису ON; ясно, что биссектриса этого угла также будет и биссектрисой вертикального угла BOD. Если перегнуть рис. 194 по биссектрисе ON, то вследствие равенства углов CON и NOA луч OC совместится с лучом OA. Итак, *биссектриса угла является его осью симметрии* (и даже осью симметрии пары вертикальных углов).

Опустим из какой-либо точки K биссектрисы ON перпендикуляры KQ и KP на стороны угла; при указанном выше совмещении OC и OA эти перпендикуляры совпадут. Таким образом, видно, что $KQ = KP$: *все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла.*

Точно так же и точки биссектрисы OM смежного угла COB (и угла AOD) равноудалены от сторон углов. Легко видеть, что точка S, не лежащая ни на одной из биссектрис ON и OM, не может быть равноудалена от сторон углов; поэтому *геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, образовано двумя биссектрисами углов между этими прямыми.* Напомним, что эти биссектрисы взаимно перпендикулярны.

Полезно вернуться к рис. 184, где мы рассматривали пары равных наклонных и перпендикуляр, проведенный к отрезку в его середине, и отметить, что перпендикуляр MM_0 служит биссектрисой угла между равными наклонными.

176. Окружность. Пусть дана произвольная точка C и отрезок $KL=R$ (рис. 195). Геометрическое место точек, находящихся от данной точки C на постоянном расстоянии, равном R, называется *окружностью* с центром C и радиусом R. Проводя через C любые лучи, мы можем построить точки окружности, откладывая на этих лучах от точки C отрезки CA, CA', CA'', ..., равные R. Практически окружность строится с помощью циркуля. Отметим ряд простейших понятий и свойств, относящихся к окружности.

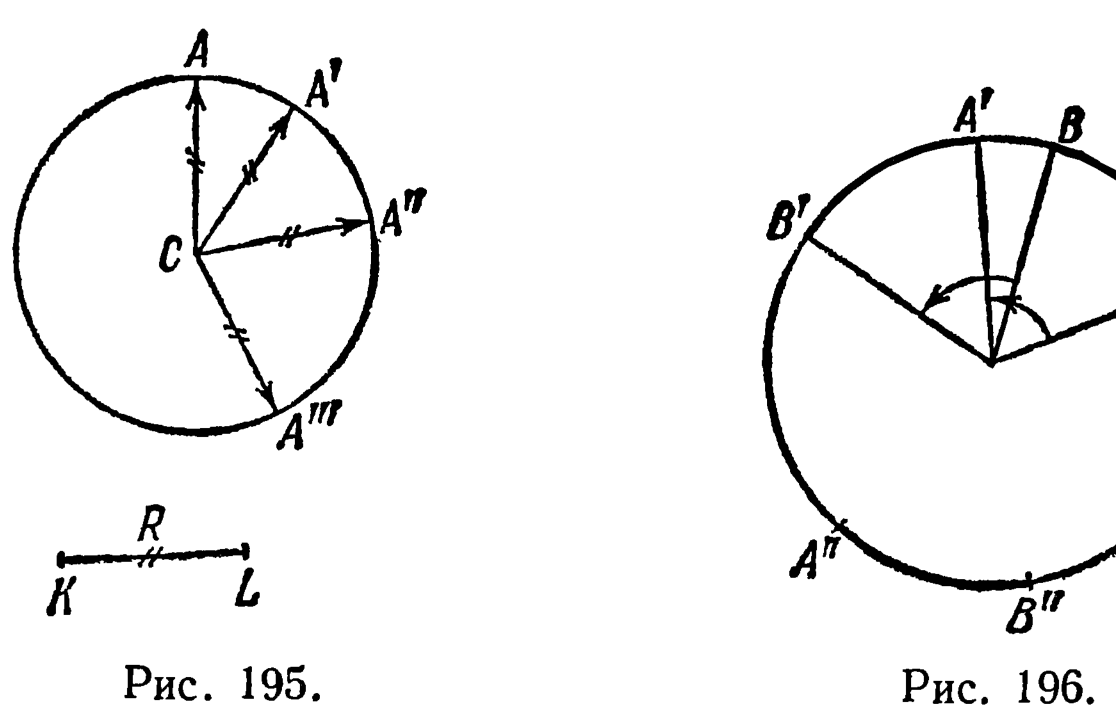


Рис. 195. Рис. 196.

1. *Окружность, так же как и прямая, может скользить сама по себе*; любая ее часть (дуга AB) может перемещаться по окружности (вращаясь вокруг ее центра) в произвольные новые положения $A'B'$, ... (рис. 196). Две окружности одинакового радиуса совместятся всеми точками, если совместить их центры.

2. *Окружность разбивает плоскость на две области: внутреннюю по отношению к окружности и внешнюю, бесконечную.* Внутренняя область (включая и контур, ее ограничивающий, т. е. окружность) называется *кругом* и состоит из точек, удаленных от центра на расстояние, не большее радиуса окружности.

Внешняя область состоит из точек, удаленных от центра на расстояние, превосходящее радиус.

177. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая. Пусть на плоскости даны окружность и некоторая прямая. Опустим на эту прямую перпендикуляр из центра окружности C; обозначим через M_0 основание этого перпендикуляра. Точка M_0 может занимать относительно окружности три возможных положения: а) лежать вне окружности, б) на окружности, в) внутри окружности. В зависимости от этого и прямая будет занимать относительно окружности одно из трех возможных различных положений, описываемых ниже.

а) Пусть основание перпендикуляра CM_0, опущенного из центра C окружности на прямую a, лежит вне окружности (рис. 197). Тогда прямая не пересекает окружности, все ее точки лежат во внешней области. Действительно, в указанном случае $CM_0 > R$ (точка M_0 по условию удалена от центра на расстояние, большее радиуса). Тем более для любой точки M прямой a имеем $CM > CM_0 > R$, т. е. каждая точка данной прямой лежит вне круга.

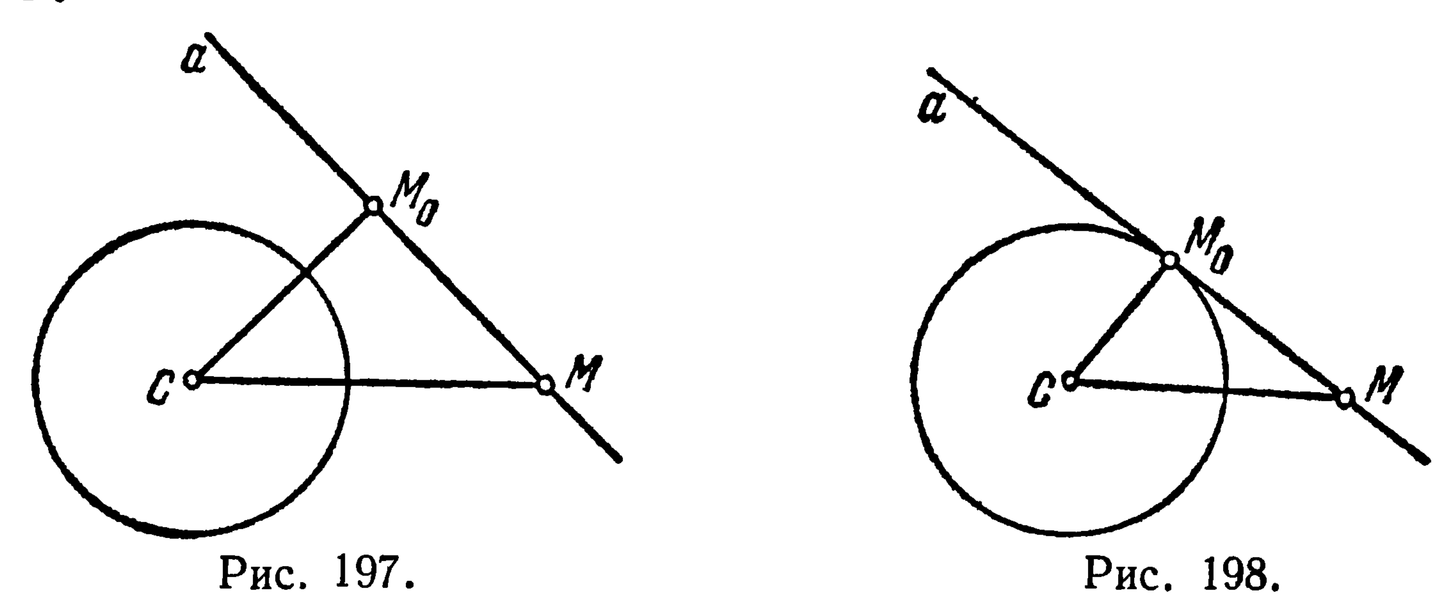


Рис. 197. Рис. 198.

б) Пусть основание M_0 перпендикуляра CM_0 попадет на окружность (рис. 198). Тогда прямая a имеет с окружностью ровно одну общую точку M_0. Действительно, если M — любая другая точка прямой, то $CM > CM_0 = R$ (наклонные длиннее перпендикуляра) и точка M лежит во внешней области. Такая прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется *касательной* к окружности в этой точке. Покажем, что и обратно, если прямая имеет с окружностью единственную общую точку, то радиус, проведенный в эту точку, перпендикулярен к данной прямой. Действительно, опустим из центра перпендикуляр на данную прямую. Если бы его основание лежало внутри окружности, то прямая имела бы с ней, как показано в в), две общие точки. Если бы оно лежало вне окружности, то в силу а) прямая не имела бы с окружностью общих точек. Поэтому остается допустить, что перпендикуляр попадает

в общую точку прямой и окружности — в точку их касания. Доказана важная

Теорема. *Прямая, проходящая через точку окружности, тогда и только тогда касается окружности, когда она перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.*

Заметим, что определение касательной к окружности, данное здесь, не переносится на другие кривые. Более общее определение касательной прямой к кривой линии связано с понятиями теории пределов и рассматривается подробно в курсе высшей математики. Здесь мы дадим о нем только общее понятие. Пусть даны окружность и на ней точка A (рис. 199). Возьмем еще

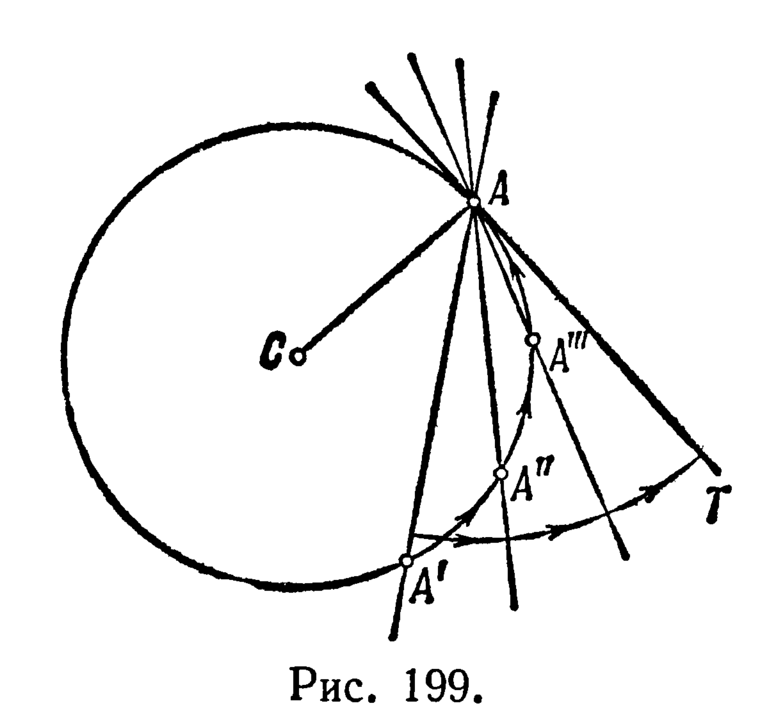


Рис. 199.

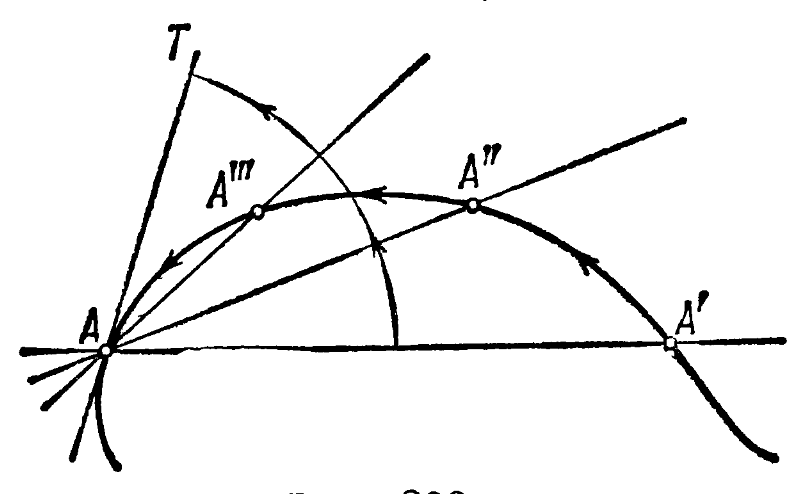


Рис. 200.

точку A' на окружности и соединим обе точки прямой AA'. Пусть точка A' двигаясь по окружности, занимает последовательно ряд новых положений A'', A''', ..., приближаясь все больше к точке A. Прямая AA', вращаясь вокруг A, принимает ряд положений: AA', AA'', AA''', ...; при этом по мере сближения движущейся точки с точкой A прямая стремится к совпадению с касательной AT. Поэтому можно говорить о касательной как о предельном положении секущей, проходящей через данную точку и точку кривой, неограниченно с ней сближающуюся. В такой форме определение касательной применимо к кривым весьма общего вида (рис. 200).

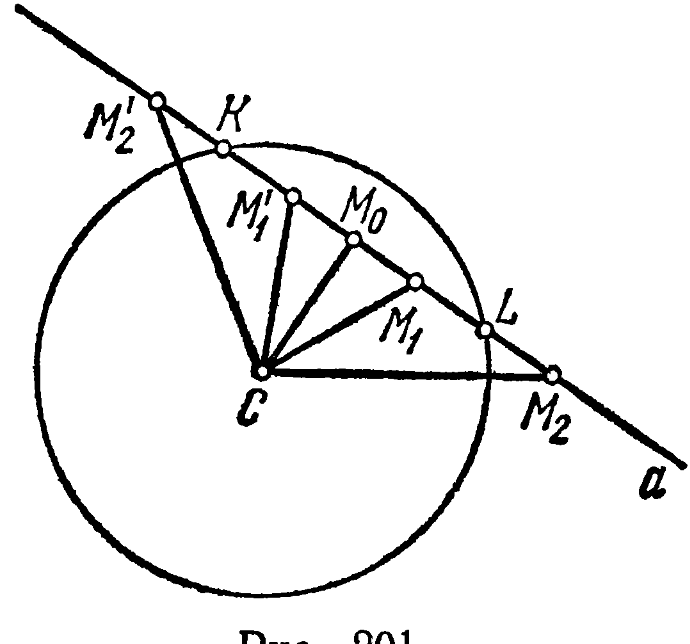


Рис. 201.

в) Пусть, наконец, точка M_0 лежит внутри окружности (рис. 201). Тогда $CM_0 < R$. Будем рассматривать наклонные, проведенные к прямой a из центра C окружности, с основаниями (M_1, M_1', M_2, M_2', ...), удаляющимися от точки M_0 в любом из двух возможных направлений. Длина наклонной будет монотонно возрастать по мере удаления ее основания от точки M_0; это возрастание длины наклонной происходит постепенно («непрерывно») от значений, близких к CM_0, до значений, сколь угодно больших, поэтому кажется ясным, что при некотором положении оснований наклонных длина их будет точно

равна R; соответствующие точки K и L прямой будут лежать на окружности. Прямая в этом случае имеет с окружностью две общие точки и называется *секущей*.

Наше рассуждение основано на непрерывном, постепенном характере возрастания наклонной по мере удаления ее основания от основания перпендикуляра. Точное определение понятия непрерывности здесь не может быть дано. Вместо этого рассуждения можно применить теорему Пифагора (п. 216). Так, если отложить на прямой a в обе стороны от точки M_0 отрезки M_0L и M_0K, равные $\sqrt{R^2-d^2}$, где $d=CM_0$, то расстояния CL и CK будут равны радиусу окружности R. Поэтому полученные таким путем точки L и K принадлежат окружности.

178. Хорда и диаметр. Сектор и сегмент. Итак, секущая — это прямая, имеющая с окружностью две общие точки. Отрезок секущей, лежащий внутри окружности, называется ее *хордой*. Перпендикуляр, опущенный на хорду из центра окружности, делит эту хорду пополам (по свойству равных наклонных и перпендикуляра). В частности, если хорда проходит через центр окружности, то она называется *диаметром*. Все диаметры равны между собой, так как каждый из них равен удвоенному радиусу окружности.

Хорда разбивает круг на две части (I и II на рис. 202), называемые *сегментами*. В случае, когда хорда совпадает с диаметром, эти сегменты превращаются в *полукруги*. Напомним еще, что *сектором* круга называется часть круга, ограниченная двумя его радиусами OA и OB и дугой окружности, соединяющей концы этих радиусов; таким образом, можно рассматривать два сектора (I и II на рис. 203), на которые круг разбивается парой радиусов.

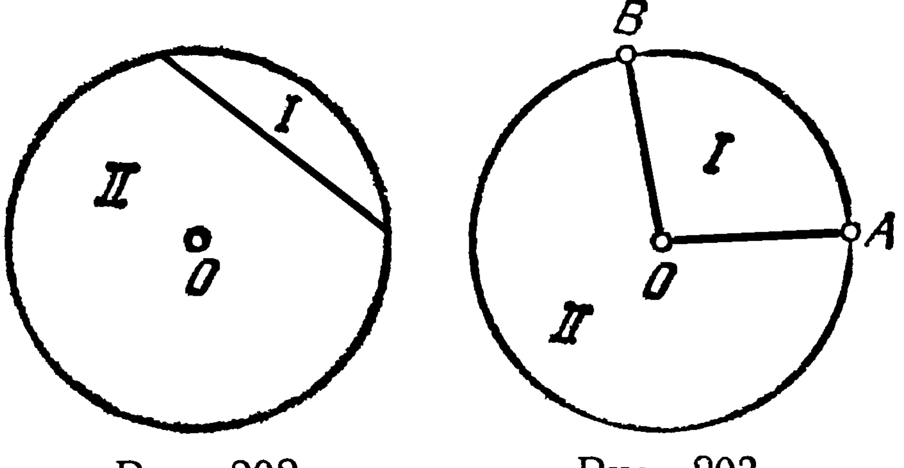


Рис. 202. Рис. 203.

Справедливы следующие соотношения между дугами данной окружности, стягивающими их хордами (хорда, имеющая те же концевые точки, что и дуга, называется хордой, *стягивающей* эту дугу, подобно тому как, например, тетива стягивает лук), расстояниями хорд от центра и т. д.

1. *Равные дуги стягиваются равными хордами.*
2. *Равные хорды стягивают пары соответственно равных дуг.*
3. *Хорды, равноотстоящие от центра, равны.*
4. *Равные хорды равноотстоят от центра.*
5. *Всякий диаметр является осью симметрии круга (окружности). Он делит круг (окружность) на два равных полукруга (полуокружности).*

Доказательство каждого из этих свойств основано на возможности вращения круга вокруг своего центра (скольжения окружности по себе) и соображениях симметрии. Докажем, например, свойство 3.

Доказательство. Пусть хорды AB и CD равноотстоят от центра O окружности (рис. 204). Пусть OK и OL — перпендикуляры, проведенные к этим хордам из O. Будем вращать дугу $\overset{\frown}{ASB}$, хорду AB и перпендикуляр OK до совмещения последнего с перпендикуляром OL (т. е. на угол KOL). Тогда перпендикуляры совместятся, значит, хорда AB пойдет по хорде CD и, поскольку окружность при вращении скользит по себе, обе хорды совпадут (последнее также видно из равенства наклонных $OA=OC=OB=OD$, как радиусов одной окружности).

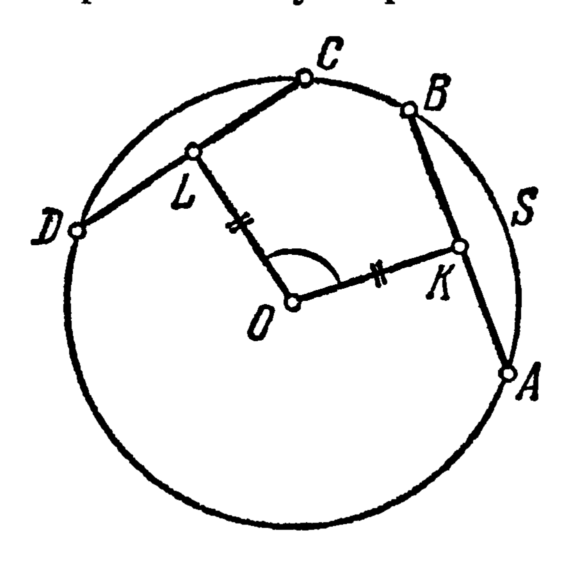


Рис. 204.

Остальные свойства рекомендуется разобрать читателю.

179. Взаимное расположение двух окружностей. Пусть даны окружность и точка M_0, не совпадающая с ее центром C (рис. 205). Возможны три случая: точка M_0 лежит внутри окружности (рис. 205, *а*), на окружности (рис. 205, *б*), вне окружности (рис. 205, *в*). Проведем прямую CM_0; она пересечет окружность в точках K и L (в случае б) точка K совпадет с M_0), из которых одна будет ближайшей к точке M_0 (по сравнению со всеми другими точками окружности), а другая — наиболее удаленной.

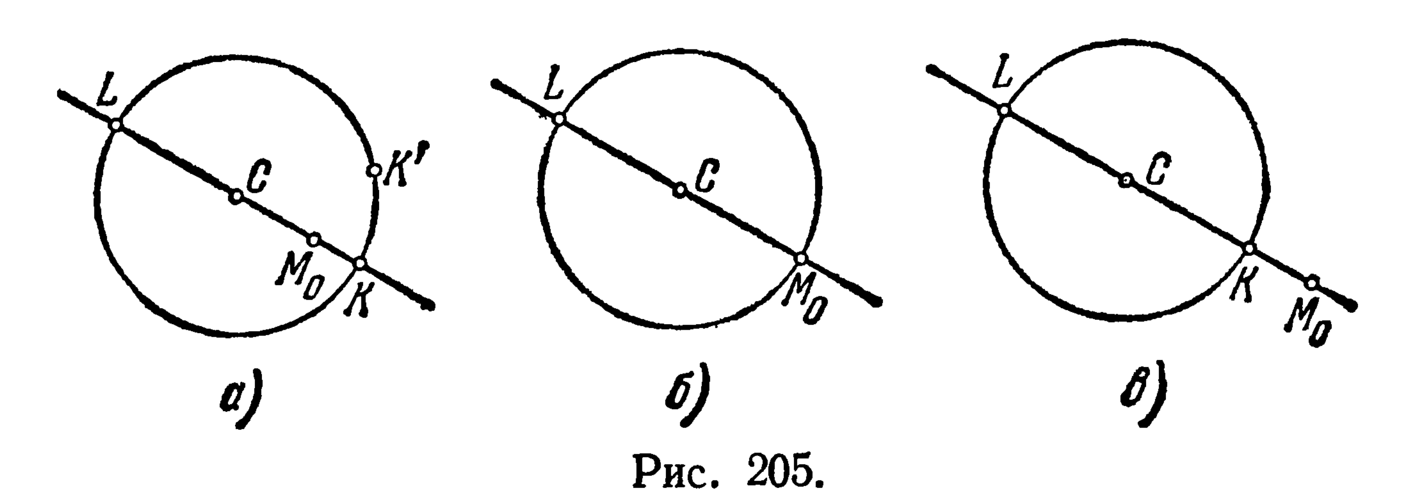


Рис. 205.

Так, например, на рис. 205, *а* точка K окружности — ближайшая к M_0. В самом деле, для любой другой точки окружности K' ломаная CM_0K' длиннее отрезка CK': $CM_0+M_0K'>CK'=R$, но $CM_0=R-M_0K$, и потому $M_0K'>M_0K$. Напротив, для точки L найдем $M_0K'<M_0C+CK'=M_0C+R$ (снова ломаная длиннее отрезка прямой). Разбор остальных двух случаев предоставляем читателю. Заметим, что наибольшее расстояние равно CM_0+R, наименьшее $|CM_0-R|$, т. е. CM_0-R, если $CM_0>R$, или $R-CM_0$, если $CM_0<R$.

Перейдем к анализу возможных случаев расположения двух окружностей (рис. 206).

а) Центры окружностей совпадают (рис. 206, *а*). Такие окружности называются *концентрическими*. Если радиусы этих окружностей не равны, то одна из них лежит внутри другой. В случае равенства радиусов они совпадают.

б) Пусть теперь центры окружностей различны. Соединим их прямой, она называется *линией центров* данной пары окружностей. Взаимное расположение окружностей будет зависеть только от соотношения между величиной отрезка d, соединяющего их центры, и величинами радиусов окружностей R, r. Все возможные существенно различные случаи представлены на рис. 206 (считаем $R \geqslant r$).

1. Расстояние между центрами меньше разности радиусов:

$$d < R - r$$

(рис. 206, *б*), малая окружность лежит внутри большой. Сюда же можно отнести и случай а) совпадения центров ($d = 0$).

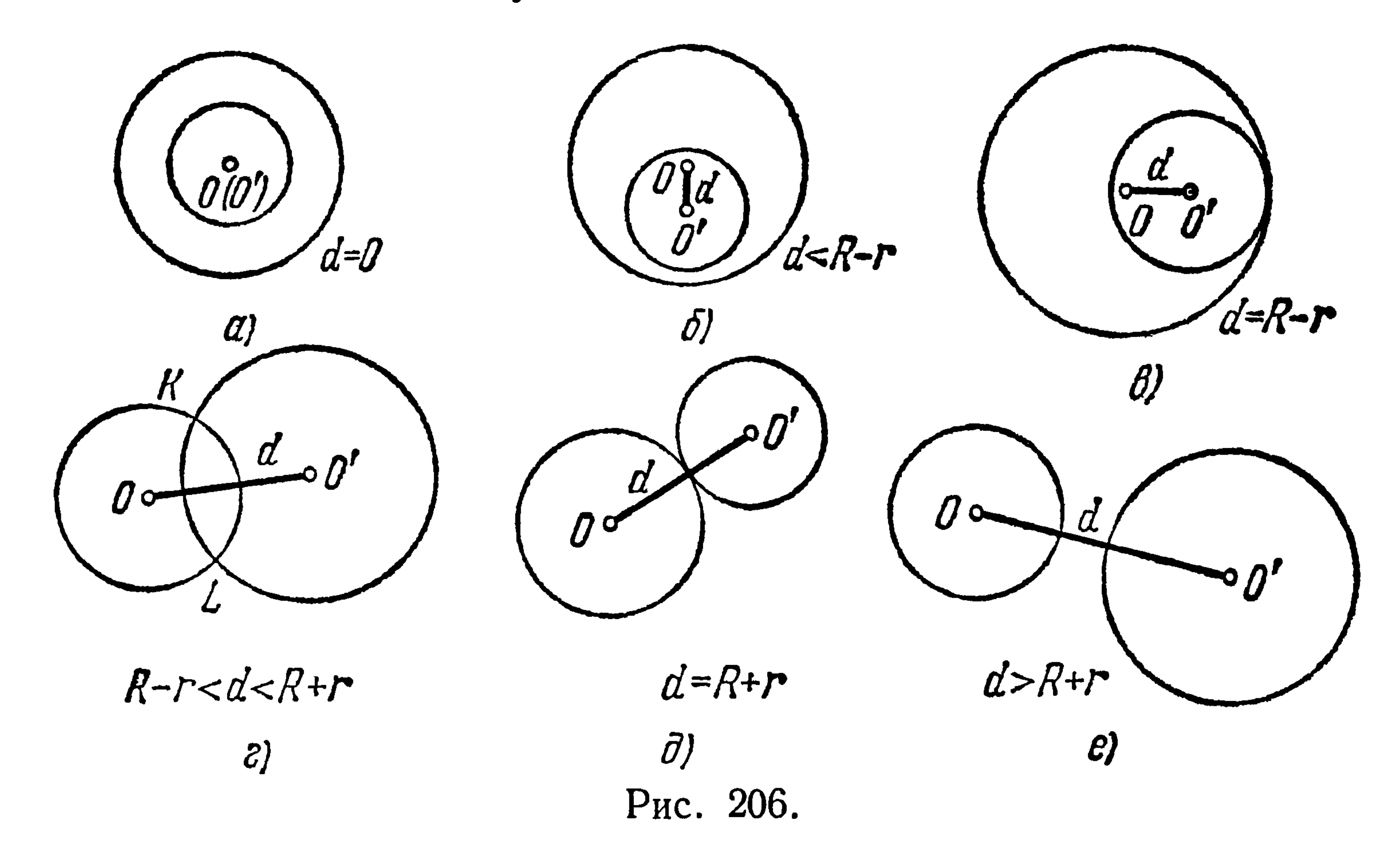


Рис. 206.

2. Расстояние между центрами равно разности радиусов:

$$d = R - r$$

(рис. 206, *в*). Малая окружность лежит внутри большой, но имеет с ней одну общую точку на линии центров (говорят, что имеет место *внутреннге касание*).

3. Расстояние между центрами больше разности радиусов, но меньше их суммы:

$$R - r < d < R + r$$

(рис. 206, *г*). Каждая из окружностей лежит частично внутри, частично вне другой. Окружности имеют две точки пересечения

K и L, расположенные симметрично относительно линии центров OO'[1]). Отрезок KL—общая хорда двух пересекающихся окружностей. Он перпендикулярен к линии центров.

4. Расстояние между центрами равно сумме радиусов:

$$d=R+r$$

(рис. 206, *д*). Каждая из окружностей лежит вне другой, но они имеют общую точку на линии центров (*внешнее касание*).

5. Расстояние между центрами больше суммы радиусов: $d>R+r$ (рис. 206, *е*). Каждая из окружностей целиком лежит вне другой. Окружности не имеют общих точек.

Приведенная классификация полностью вытекает из разобранного выше вопроса о наибольшем и наименьшем расстоянии от точки до окружности. Следует лишь рассмотреть на одной из окружностей две точки: самую близкую и самую далекую от центра второй окружности. Например, разберем случай 1: $OO'<R-r$. По условию $R>OO'+r$. Но наиболее отдаленная от O точка малой окружности находится от центра O на расстоянии $OO'+r<R$. Поэтому вся малая окружность лежит внутри большой. Так же рассматриваются и остальные случаи.

В частности, если радиусы окружностей равны, то возможны только три последних случая: пересечение, внешнее касание, внешнее расположение.

§ 3. Основные задачи на построение

180. Линейка и циркуль. В чертежной практике применяются различные инструменты: линейки (с делениями и без них), циркули разных типов, чертежные треугольники, лекала и т. п. При теоретическом изучении геометрических построений рассматриваются лишь два основных инструмента: линейка без делений и циркуль, которые имеют в геометрии идеальный, абстрактный характер. Так, всякая реальная линейка имеет конечную длину, линейка же в геометрических построениях считается бесконечной; раствор циркуля в геометрии не ограничен.

Предполагается, что линейка и циркуль могут быть применены для выполнения строго определенного набора основных, первичных построений.

Линейка предназначена для проведения прямых линий без ограничения их длины. Если дана точка, то с помощью линейки можно провести через эту точку одну или несколько прямых

---

[1]) Существование двух точек пересечения видно из соображений непрерывности линии; точка любой из двух окружностей, перемещаясь по второй и переходя из внутренней области первой окружности во внешнюю в любом из двух возможных направлений, должна дважды попасть на первую окружность. Более двух общих точек две окружности иметь не могут (см. п. 31).

произвольным образом. Линейка позволяет также провести прямую через любые две заданные точки. Заметим, что в плоскости или на уже проведенной в ней прямой всегда могут быть произвольным образом взяты точки в любом числе. Если построены две пересекающиеся прямые, то считается известной точка их пересечения.

С помощью циркуля считается возможным:

1) провести окружность с любым центром и произвольным радиусом, в том числе окружность, проходящую через заданную точку;

2) отложить на данной прямой от любой ее точки и в любом из двух возможных направлений отрезок (произвольный или равный любому заданному отрезку).

Если изображены окружности и прямые, то и все точки их пересечения, если таковые имеются, считаются известными. В связи с этим понятен смысл часто употребляемых выражений вроде «сделаем на прямой a засечку» тем или иным радиусом, с тем или иным центром. Это значит, что проводится некоторая окружность (часто изображаемая условно лишь небольшой дугой, ей принадлежащей) ради получения точки ее пересечения с данной прямой a.

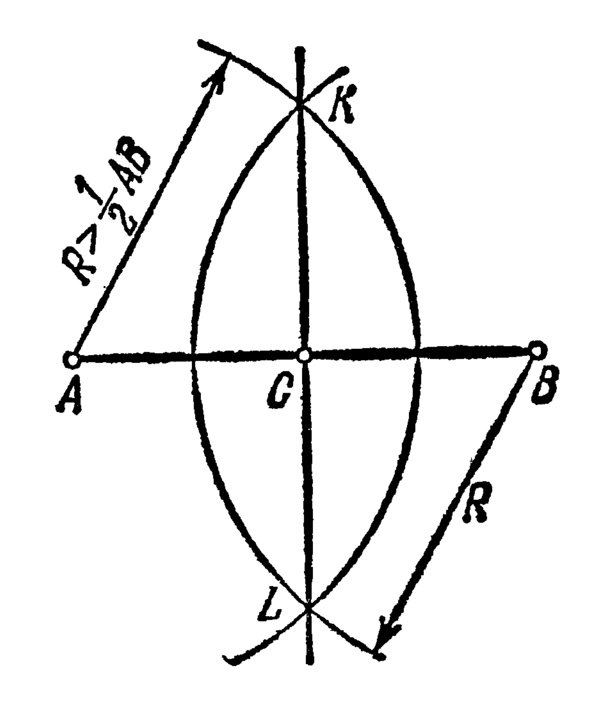


Рис. 207.

181. Деление отрезка пополам. Построение перпендикуляров.

Задача 1. Дан отрезок AB. Построить точку C, делящую этот отрезок на две равные части.

Решение. Пусть дан отрезок AB (рис. 207). Требуется разделить его пополам, т. е. построить его середину. Мы пользуемся линейкой без делений и потому не можем применять способ, связанный с измерением длины отрезка и делением ее пополам. Вместо этого поступаем так. Из конца A отрезка AB, как из центра, описываем окружность произвольным радиусом, превышающим половину длины отрезка (проще всего взять радиус, равный самому отрезку AB). Тем же радиусом описываем окружность с центром B. Эти окружности равного радиуса пересекутся в двух различных точках K и L, так как сумма их радиусов превосходит (по построению) расстояние AB между их центрами. Соединим эти точки отрезком KL. Он пересечет данный отрезок в его середине, т. е. в искомой точке C. Действительно, каждая из точек K и L равноотстоит от концов A и B данного отрезка и потому (свойство перпендикуляра, построенного в середине отрезка) лежит на перпендикуляре, восставленном из середины отрезка AB.

Попутно решена

Задача 2. Восставить перпендикуляр к отрезку AB в его середине.

Задача 3. Опустить перпендикуляр из данной точки M на прямую a.

Решение. Из данной точки M, как из центра, опишем дугу окружности достаточно большим радиусом (например, больше MK, где K — какая-либо точка прямой a) так, чтобы она пересекла данную прямую в двух точках A и B («сделаем засечки на a», рис. 208). Точки A и B по построению равноудалены от M, и потому M лежит на перпендикуляре к a, построенном в середине отрезка AB. Для завершения построения остается из точек A и B, как из центров, провести дуги окружностей, например, тем же радиусом R до их пересечения в точке M' (вторая точка пересечения, в данном случае M, нам уже известна), линия MM' и будет искомым перпендикуляром.

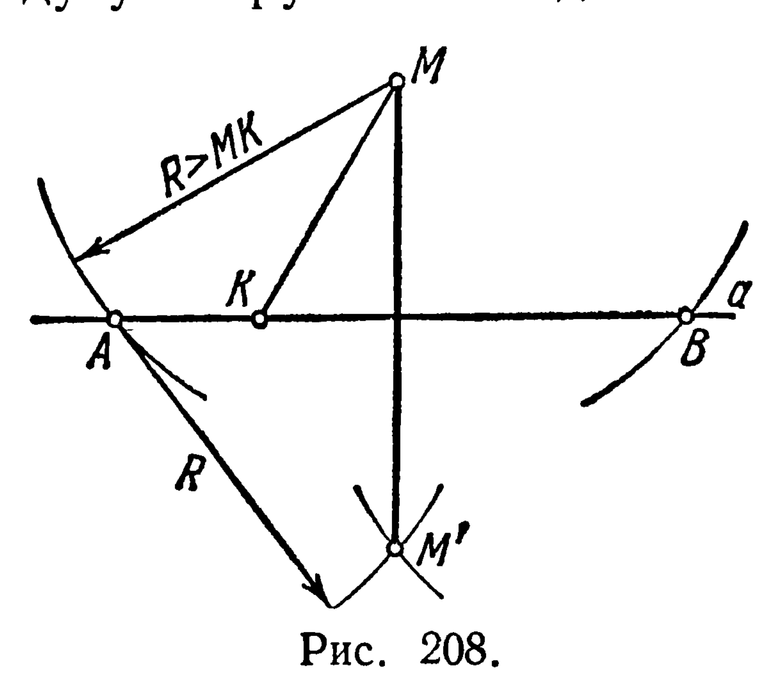


Рис. 208.

Задача 4. В данной точке M прямой восставить к ней перпендикуляр.

Указание. Из данной точки M, как из центра, сделаем на прямой засечки произвольным радиусом (т. е. отложим от M в обоих направлениях равные отрезки MA и MB). Теперь искомый перпендикуляр будет перпендикуляром в середине отрезка AB.

182. Построение углов.

Задача 1. Построить угол, равный данному углу α, имеющий заданную вершину O и сторону OA.

Решение. Пусть дан угол α, требуется построить при стороне OA угол с вершиной O, равный данному углу α (рис. 209). Проведем сначала дугу окружности с центром в вершине заданного угла α до пересечения ее со сторонами угла в точках K и L. Дугу того же радиуса опишем из центра O — вершины искомого угла. Затем из точки K' пересечения этой дуги с OA, как из центра, сделаем на этой дуге засечку (L') радиусом KL, взятым

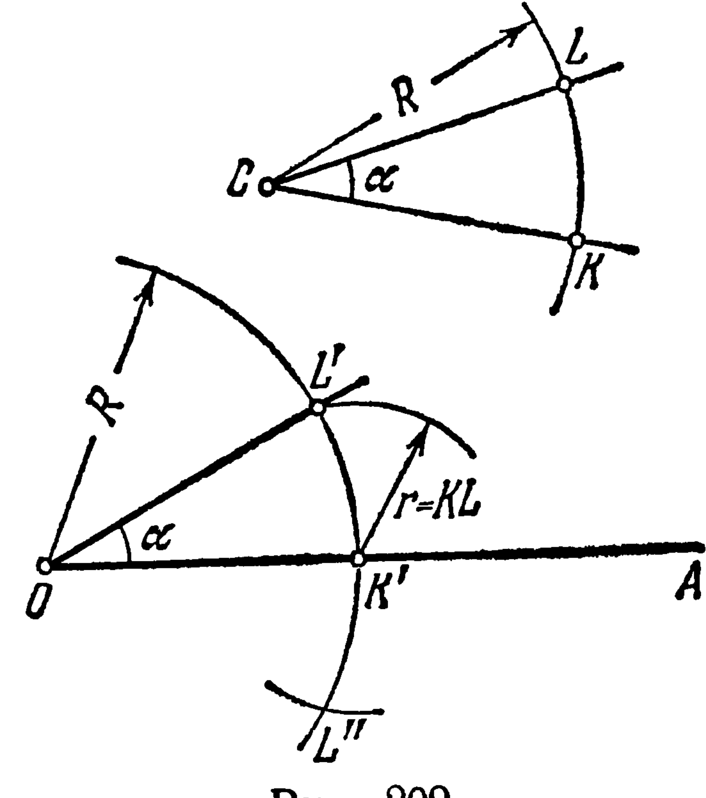


Рис. 209.

из чертежа, изображающего заданный угол α; в действительности можно получить две точки пересечения наших дуг: L' и L'', при этом в обоих случаях получаются равные (но симметрично расположенные) углы. Теперь соединим найденную точку L' с вершиной O; угол $K'OL'$ равен углу KCL, т. е. дает решение задачи. Для доказательства наложим данный угол α на построенный так, чтобы вершины их совместились, стороны CK и OK' совпали, а стороны CL и OL' оказались по одну сторону от их общей стороны CK. Тогда окружности, проведенные из центров C и O одним радиусом, совпадут и дуги засечек с центрами K и K', имеющие общий центр и равные радиусы, также совпадут. Поэтому совпадут и точки пересечения L и L'. Тем самым совместятся и углы, что доказывает их равенство.

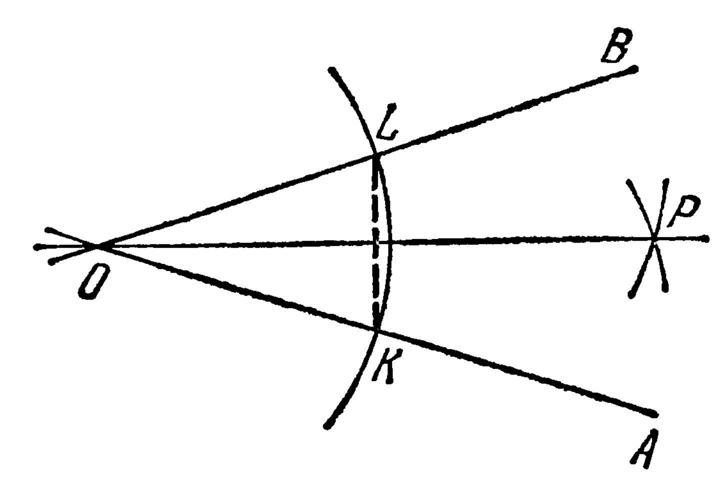


Рис. 210.

Задача 2. Построить биссектрису данного угла.

Решение. Пусть дан угол AOB (рис. 210). Требуется построить его биссектрису. Воспользуемся свойством биссектрисы быть осью симметрии угла или, что то же самое, геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла. Проведем дугу окружности с центром O, пересекающую стороны угла в точках K и L; радиус дуги может быть взят произвольно. Если теперь из O опустить перпендикуляр на отрезок KL, то он пройдет через середину отрезка KL, так как наклонные OL и OK по построению равны. Этот перпендикуляр будет осью симметрии нашей фигуры и биссектрисой угла AOB. Поэтому для завершения построения описываем из центров K и L равными радиусами дуги, пересекающиеся в точке P, и соединяем O с P. Прямая OP по построению будет перпендикуляром к KL в его середине и, значит, искомой биссектрисой.

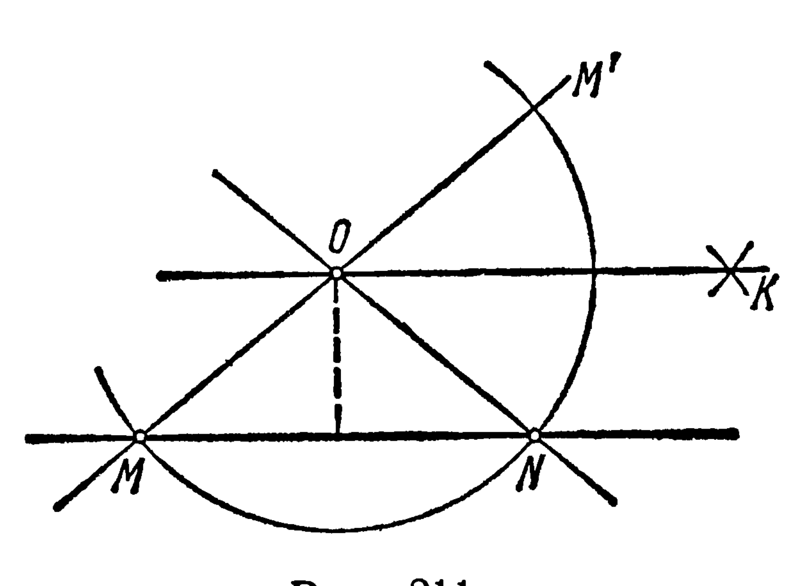


Рис. 211.

Задача 3. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Решение. В принципе решение этой задачи дано уже в п. 171 с помощью проведения перпендикуляров — задачи, нам уже известной. Можно решить задачу и иначе. Проведем окружность с центром в данной точке O (рис. 211), пересекающую заданную прямую в двух точках M и N. Соединим эти точки с данной

точкой прямыми MO и NO. Биссектриса угла $M'ON$ будет искомой прямой, параллельной данной. Для доказательства правильности построения опустим из O перпендикуляр на MN. Так как он будет одновременно перпендикулярен к OK (биссектрисы смежных углов), то прямая OK параллельна данной.

183. Другие задачи на построение. Задачи на построение, рассмотренные в пп. 181 и 182, мы можем назвать основными. При решении других, более сложных задач на построение их приходится использовать как вспомогательные. При этом мы уже не объясняем каждый раз, как они выполняются, а просто говорим: «опустим из точки перпендикуляр на прямую» или «проведем биссектрису угла» и т. д., считая, что необходимые для этого построения читателю известны. Приведем несколько примеров несложных задач на построение.

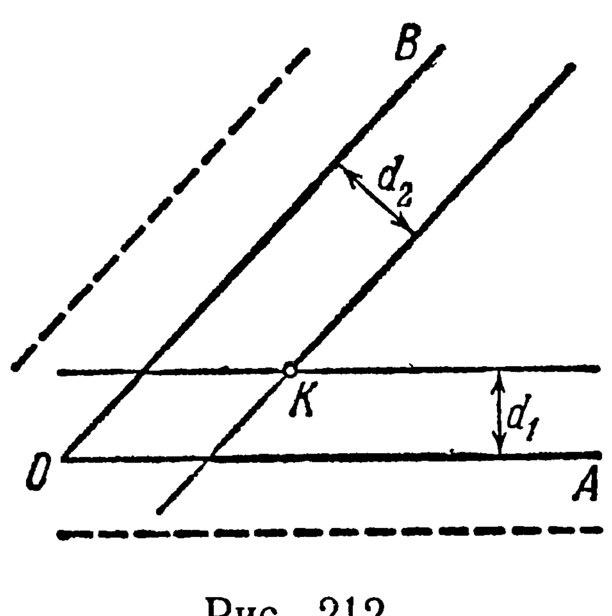


Рис. 212.

З а д а ч а 1. Дан угол. Внутри угла найти точку, находящуюся на заданных расстояниях от сторон угла.

Р е ш е н и е. Пусть AOB—данный угол (рис. 212), отрезки d_1 и d_2 изображают расстояния искомой точки от сторон OA и OB соответственно. В решении этой задачи, как и многих других используется метод геометрических мест. Заметим, что геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой OA на расстояние d_1, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на расстояние d_1.

В нашем случае искомая точка лежит на той из указанных прямых, часть которой расположена внутри угла. Теперь легко указать план решения задачи. В произвольной точке стороны OA восставим к ней перпендикуляр и отложим на нем отрезок d_1 в сторону внутренней области угла. Через конец этого перпендикуляра проведем прямую, параллельную OA. То же проделываем со стороной OB, но на этот раз длину перпендикуляра берем равной d_2. Искомой точкой будет точка K пересечения построенных прямых, параллельных сторонам угла.

Читатель должен выполнить здесь и в следующих задачах все необходимые построения циркулем и линейкой.

З а д а ч а 2. На данной прямой найти точку, равноудаленную от двух данных точек плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть A и B—данные точки, a—прямая (рис. 213). На прямой a мы должны найти точку D, находящуюся на одинаковых расстояниях от точек A и B. Известно, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек,

служит перпендикуляр к отрезку AB, восставленный в его середине. Отсюда ясно решение: искомая точка D лежит на пересечении указанного перпендикуляра с прямой a.

Замечание. Задача будет неразрешимой, если перпендикуляр окажется параллелен a; это получится, если отрезок AB

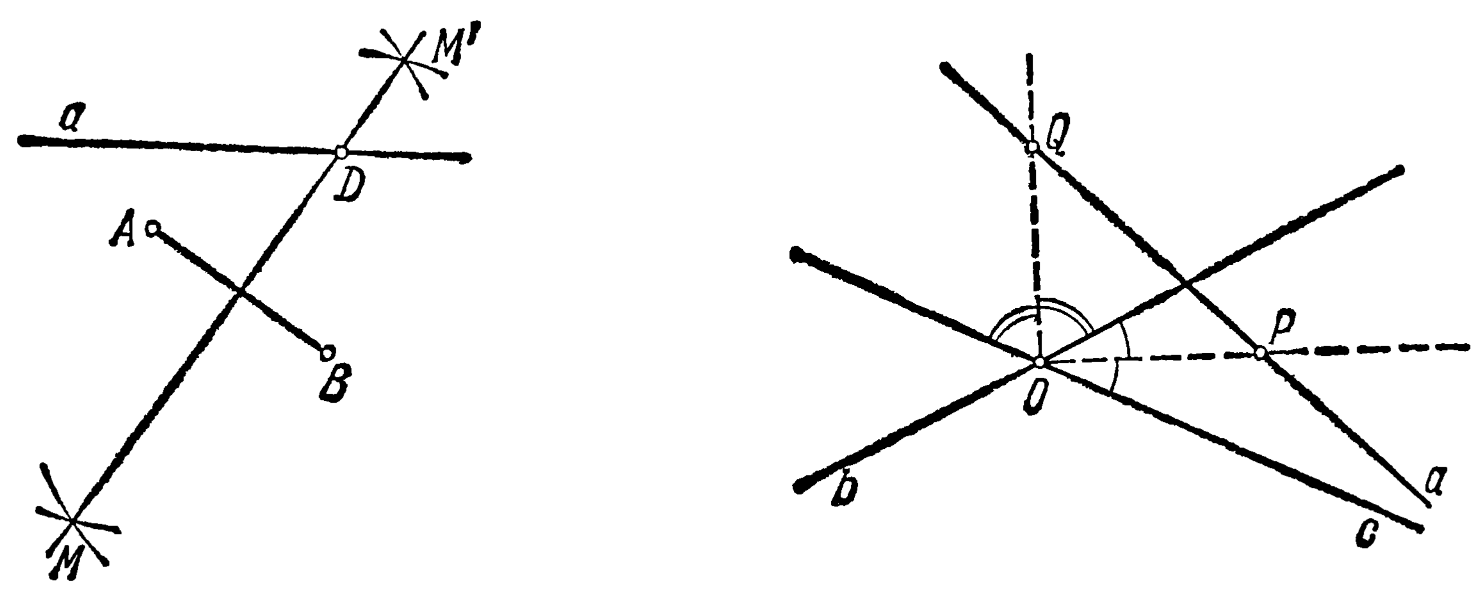


Рис. 213. Рис. 214.

перпендикулярен к a. Задача станет неопределенной (любая точка прямой a будет решением), если AB перпендикулярен к a и, кроме того, a проходит через середину AB.

Задача 3. На данной прямой a найти точки, равноотстоящие от данных двух пересекающихся прямых b и c.

Указание. Искомые точки лежат на пересечении данной прямой с любой из биссектрис углов, образованных прямыми b и c (рис. 214).

Упражнения

1. Найти геометрическое место точек, удаленных от данной окружности на заданное расстояние (берется кратчайшее расстояние). Исследовать решение задачи в зависимости от заданного расстояния и величины радиуса окружности.

2. Центр одной окружности лежит на другой окружности. При каком соотношении между радиусами они будут касаться?

3. Построить угол, равный одной четверти прямого угла.

4. Выполнить полностью все построения задач 1—3 п. 183.

5. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

6. Найти точки, отстоящие от данной прямой на заданное расстояние a и удаленные от некоторой точки на указанное расстояние b. Всегда ли разрешима задача? Сколько решений она может иметь?

Глава XV

ТРЕУГОЛЬНИКИ, ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. Треугольники

184. Стороны и углы треугольника. Длины сторон треугольника (короче, стороны треугольника) не могут быть заданы произвольно. Действительно, для произвольного треугольника ABC сумма двух любых сторон больше третьей стороны: $AB+BC>AC$, так как ломаная длиннее отрезка прямой. Из этого же неравенства находим $AC-AB<BC$, т. е. разность двух любых сторон треугольника меньше его третьей стороны. Например, из отрезков $a=5$, $b=8$, $c=14$ нельзя построить треугольник, так как $14>5+8$. Если же даны три отрезка a, b, c такие, что больший из них меньше суммы двух других, то можно построить треугольник, имеющий данные отрезки своими сторонами (п. 189, задача 1). Итак, *условие*

$$c<a+b$$

(где c — наибольший из трех отрезков) *необходимо и достаточно для существования треугольника со сторонами a, b, c.*

В зависимости от сравнительной величины сторон треугольники могут быть *равносторонними*, если все стороны равны, *равнобедренными*, если две стороны равны, и *разносторонними*, если все стороны различны. У равнобедренного треугольника его равные стороны обычно называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием*.

Углы треугольника также не могут быть заданы произвольно, так как справедлива

Теорема 1. *Сумма углов любого треугольника равна двум прямым.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 215) и проведем через одну из его вершин, например B, прямую BD, параллельную противоположной стороне AC. Теперь из чертежа ясно, что $\angle 1'=\angle 1$ и $\angle 2'=\angle 2$ (накрест лежащие углы), и так как $1'+2'+3=2d$, то

$1+2+3=2d$, что и требовалось доказать. Продолжая сторону AC, находим как следствие:

Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных.

Тем самым, внешний угол треугольника больше каждого из его внутренних углов, с ним не смежных:

$$4=1+3;\quad 4>1,\quad 4>3.$$

Таким образом, зная два угла треугольника, мы можем найти и третий. Ясно также, что если один угол в треугольнике прямой или тупой, то два других его угла острые. Если один

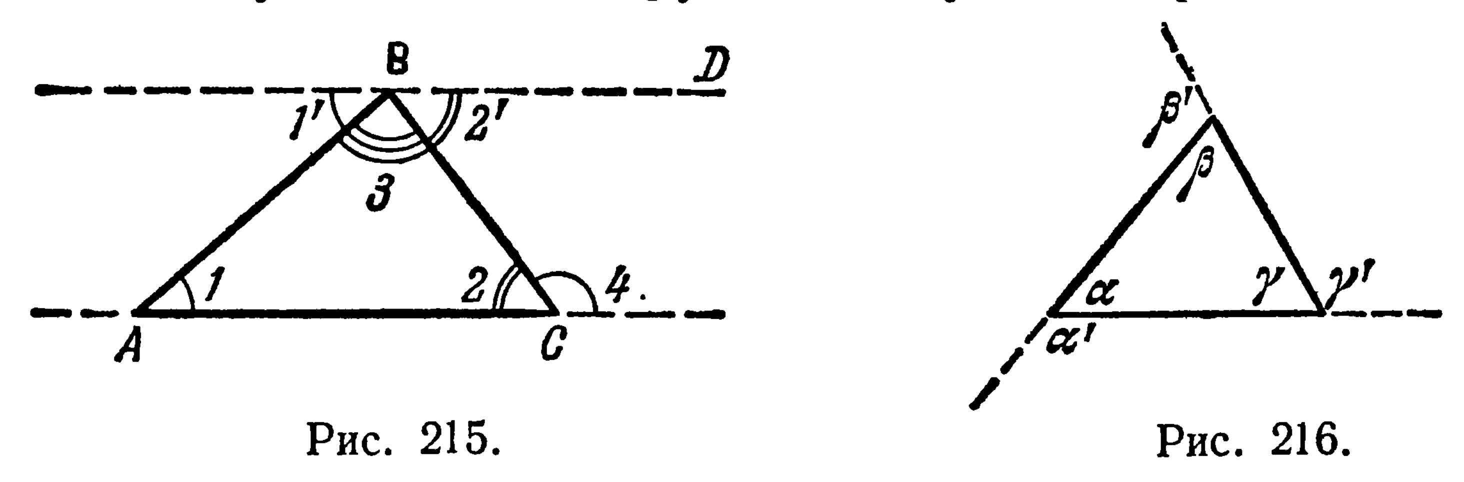


Рис. 215. Рис. 216.

угол треугольника тупой, то треугольник называется *тупоугольным*; если один угол прямой, то *прямоугольным*; если все три угла острые, то *остроугольным*.

Из задач на построение треугольников (п. 189) видно, что при любых данных положительных углах α, β, γ, составляющих в сумме два прямых, существуют треугольники, имеющие α, β, γ своими внутренними углами. Итак, *условие*

$$\alpha+\beta+\gamma=2d$$

необходимо и достаточно для существования треугольника с углами α, β, γ.

Так как внешний угол треугольника дополняет внутренний смежный с ним угол до развернутого угла, то сумма внешних углов треугольника (рис. 216) равна двум развернутым, или четырем прямым, углам: $\alpha'+\beta'+\gamma'=4d$.

Пример. Внешний угол α' равен 120°, угол β составляет половину угла γ. Найти углы треугольника.

Решение. Внутренний угол $\alpha=180°-120°=60°$. Так как $\beta+\gamma=\alpha'$, то $3\beta=120°$, $\beta=40°$, $\gamma=80°$.

Связь между величинами сторон и углов треугольника устанавливает следующая

Теорема 2. *Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Против равных сторон лежат равные углы.*

Обратно: *против большего угла лежит большая сторона. Против равных углов лежат равные стороны.*

Доказательство. Применим свойства наклонных. Пусть в треугольнике ABC (рис. 217, *а*) сторона AC больше стороны BC. Проведем высоту CM треугольника. Так как наклонная CB меньше наклонной CA, то ее основание B лежит ближе к основанию высоты CM, чем основание A наклонной CA. Поэтому, если перегнуть рис. 217,*а* по CM, то угол при вершине B перейдет во внешний угол B' треугольника ACB' и, следовательно, будет больше угла A, как внутреннего, с ним не смежного. Рис. 217, *а* построен для случая, когда против данных сторон лежат острые углы. На рис. 217, *б* показан случай, когда

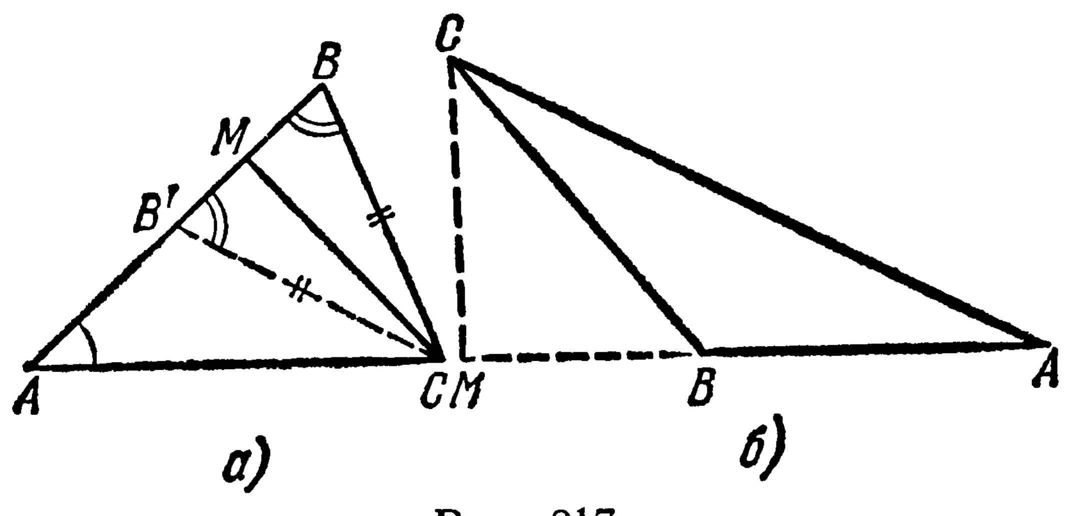


Рис. 217.

против одной из сторон лежит тупой угол (разобрать самостоятельно). Итак, если между сторонами треугольника имеются неравенства $a < b < c$, то соответственно и противолежащие углы удовлетворяют неравенствам $\alpha < \beta < \gamma$. Равенство углов, лежащих против равных сторон, сразу получится, если учесть, что равные наклонные расположены относительно перпендикуляра (т. е. высоты треугольника) симметрично и совмещаются при сгибе плоскости по перпендикуляру. При этом совмещаются и углы, равенство которых должно быть доказано.

Обратное утверждение, говорящее, что против большего угла лежит большая сторона, получается рассуждением от противного. Так, пусть $\alpha < \beta$. Если бы мы имели $a \geqslant b$, то должно было бы быть $\alpha \geqslant \beta$, что противоречит условию. Поэтому $a < b$, что и требовалось доказать. Так же доказывается, что против равных углов расположены равные стороны. В частности, равносторонний треугольник является и равноугольным. Каждый из его трех углов в этом случае равен 60°.

185. Биссектрисы треугольника. Вписанная окружность. Любая из трех биссектрис внутренних углов треугольника называется *биссектрисой треугольника*. Под биссектрисой угла треугольника также понимают отрезок между его вершиной и точкой пересечения биссектрисы с противолежащей стороной треугольника.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Действительно, рассмотрим сначала точку P пересечения двух биссектрис, например AK_1 и BK_2 (рис. 218). Эта точка одина-

ково удалена от сторон AB и AC, так как она лежит на биссектрисе угла A, и одинаково удалена от сторон AB и BC, как принадлежащая биссектрисе угла B. Значит, она одинаково удалена и от сторон AC и BC и тем самым принадлежит третьей биссектрисе CK_3, т. е. в точке P пересекаются все три биссектрисы.

Точка P пересечения биссектрис одинаково удалена от сторон

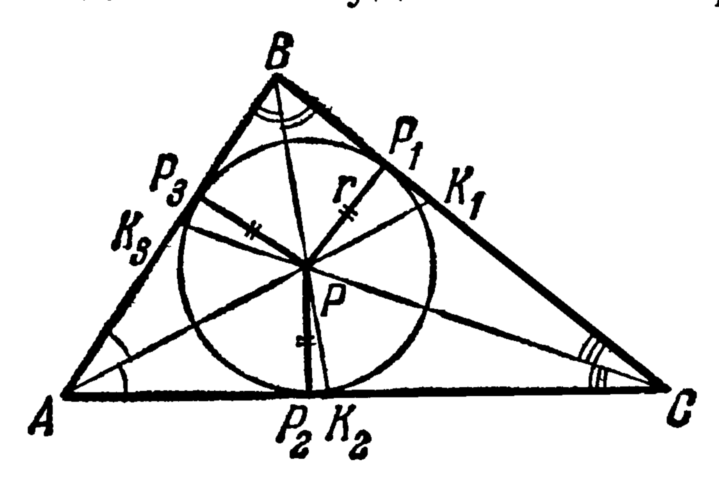


Рис. 218.

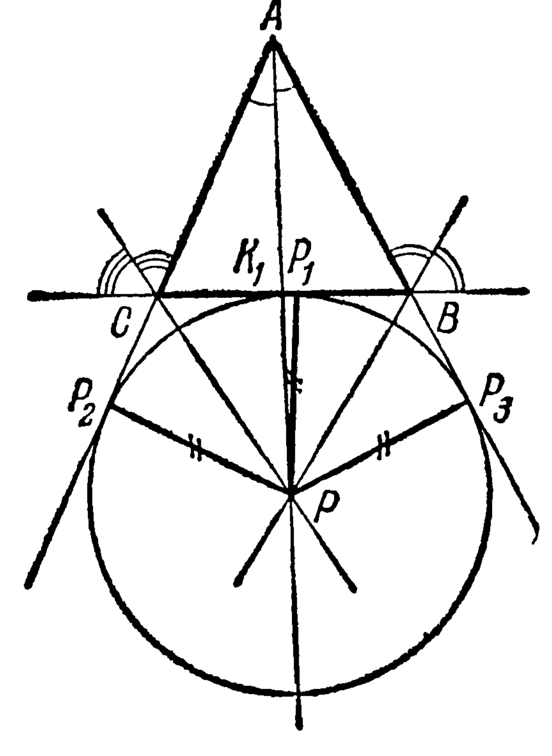


Рис. 219.

треугольника; это значит, что изображенные на рис. 218 три перпендикуляра PP_1, PP_2, PP_3, опущенные из этой точки на стороны треугольника, равны между собой. Опишем радиусом r, равным длине этих перпендикуляров, окружность с центром в точке P. Тогда эта окружность будет касаться каждой из трех сторон треугольника соответственно в точках P_1, P_2 и P_3. Такая окружность называется *вписанной* в треугольник. Итак, в каждый треугольник можно вписать окружность. Центр ее лежит в точке пересечения биссектрис треугольника. Ясно, что, и обратно, если какая-то окружность лежит внутри треугольника, касаясь его сторон, то центр ее одинаково удален от сторон треугольника и потому лежит в точке пересечения биссектрис треугольника. Это означает, что в данный треугольник можно вписать единственную окружность. Существуют, однако еще три окружности, касающиеся всех трех прямых, на которых лежат стороны треугольника. Так, рассмотрим (рис. 219) треугольник ABC и биссектрисы его внутреннего угла A и двух внешних углов B и C; точка пересечения двух последних биссектрис одинаково удалена от всех трех прямых AB, BC и AC и потому лежит на биссектрисе угла A; она является центром окружности, касающейся стороны BC треугольника и продолжений двух других его сторон. Такая окружность называется *внешне вписанной* в треугольник.

186. Оси симметрии сторон треугольника. Описанная окружность. Рассмотрим теперь оси симметрии сторон треугольника. Напомним, что осью симметрии отрезка является перпендикуляр,

восставленный к отрезку в его середине. Любая точка такого перпендикуляра одинаково удалена от концов отрезка. Пусть теперь M_1Q и M_2Q — перпендикуляры, проведенные через середины сторон BC и AC треугольника ABC (рис. 220) к этим сторонам, т. е. оси симметрии этих двух сторон. Точка их пересечения Q одинаково удалена от вершин B и C треугольника, так как лежит на оси симметрии стороны BC; точно так же она и одинаково удалена от вершин A и C. Следовательно, она одинаково удалена от всех трех вершин треугольника, в том числе от вершин A и B. Значит, она лежит на оси симметрии третьей стороны AB треугольника. Итак, оси симметрии трех сторон треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка одинаково удалена от вершин треугольника. Следовательно, если провести окружность радиусом, равным расстоянию этой точки от вершин треугольника, с центром в найденной точке, то она пройдет через все три вершины треугольника. Такая окружность (рис. 220) называется *описанной* окружностью. Обратно, если представить себе окружность, проходящую через три вершины треугольника, то ее центр обязан находиться на равных расстояниях от вершин треугольника и потому принадлежит

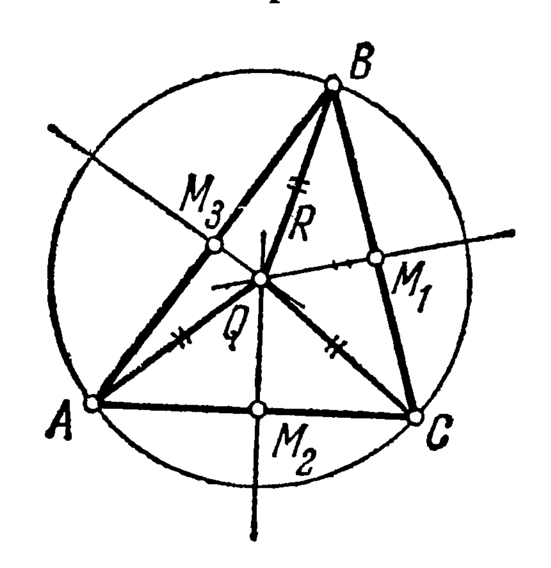


Рис. 220.

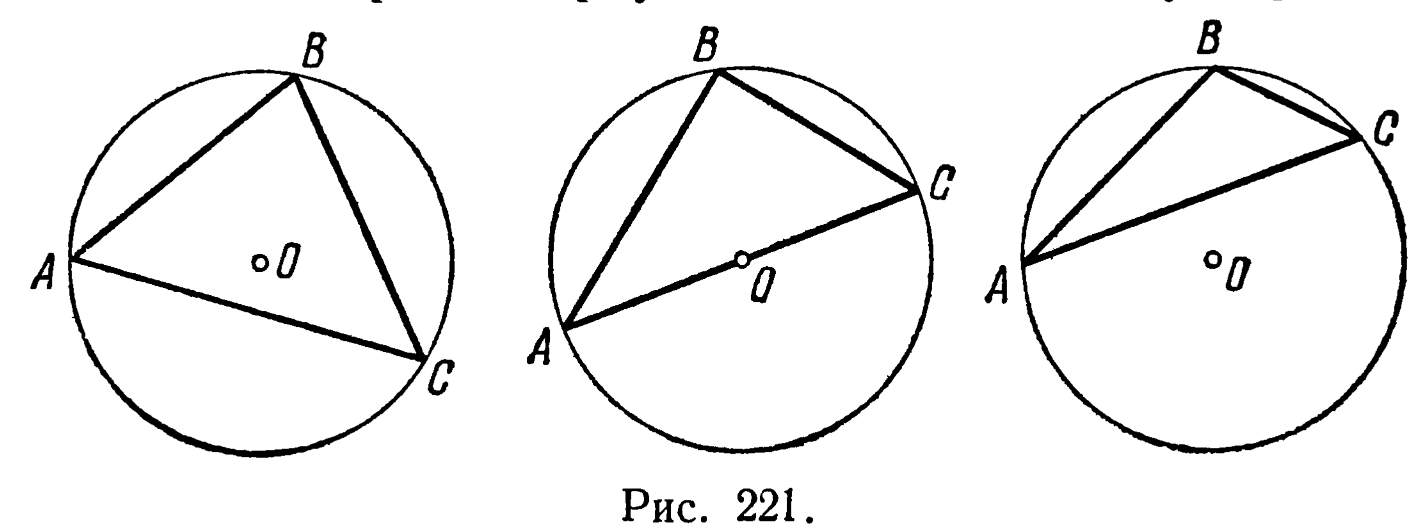


Рис. 221.

каждой из осей симметрии сторон треугольника. Поэтому у треугольника имеется только одна описанная окружность: вокруг данного треугольника можно описать окружность, и притом только одну; центр ее лежит в точке пересечения трех перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах.

На рис. 221 показаны окружности, описанные вокруг остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников; центр описанной окружности лежит в первом случае внутри треугольника, во втором — на середине гипотенузы треугольника, в третьем — вне треугольника. Это проще всего следует из свойств углов, опирающихся на дугу окружности (см. п. 210).

Так как любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно считать вершинами треугольника, то можно утверждать, что через три любые точки, не принадлежащие прямой, проходит единственная окружность. Поэтому две окружности имеют не более двух общих точек.

187. Медианы и высоты треугольника. Отрезок (а иногда и вся прямая, на которой он лежит), соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется *медианой* треугольника. Треугольник имеет три медианы, все они пересекаются в одной точке и делят друг друга в отношении 2:1, считая от вершины (доказательство см. в п. 207). Точка пересечения медиан треугольника является его центром тяжести. Это значит, что именно в точке пересечения медиан помещается центр тяжести тонкой однородной пластинки треугольной формы.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на противолежащую сторону (высотой также называется длина этого перпендикуляра).

Треугольник имеет три высоты. В случае остроугольного треугольника высоты располагаются внутри его (рис. 222, *а*); основания высот H_1, H_2, H_3 лежат на сторонах треугольника. У прямоугольного треугольника две высоты совпадают с его катетами

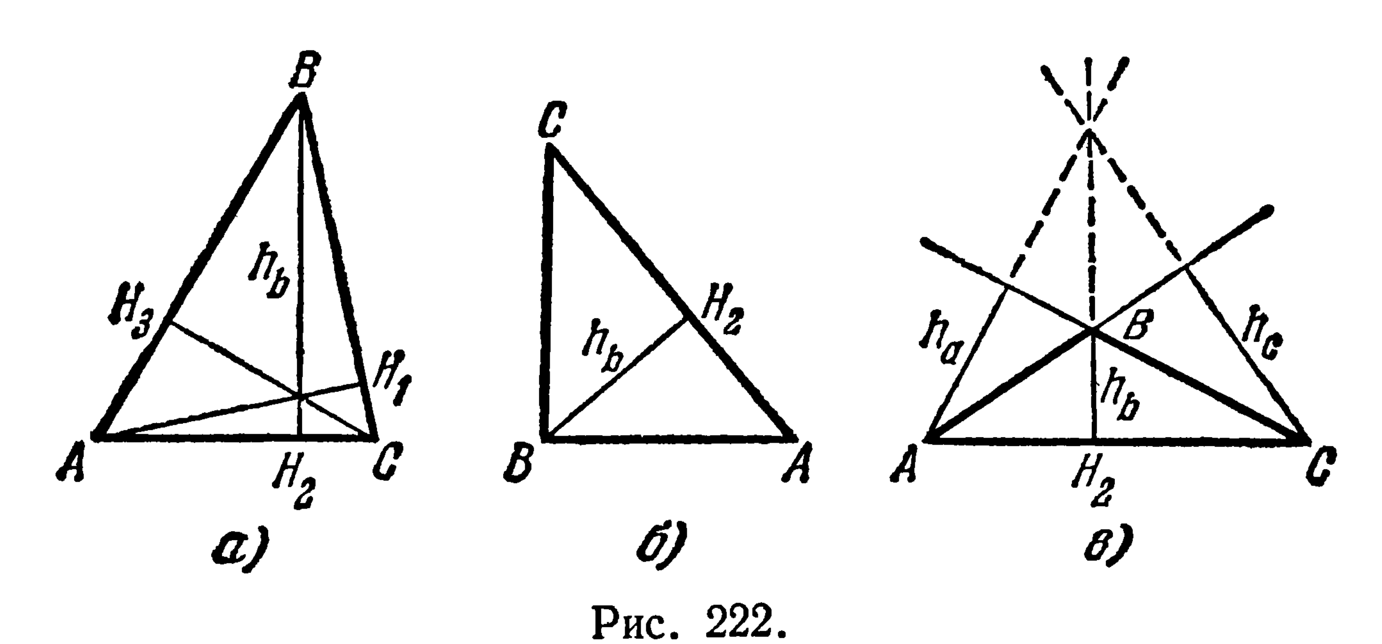


Рис. 222.

(рис. 222, *б*), третья же высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, лежит внутри треугольника. Наконец, у тупоугольного треугольника (рис. 222, *в*) две его высоты h_a и h_c, проведенные из вершин острых углов, лежат вне треугольника, их основания помещаются на продолжениях сторон.

Три высоты любого треугольника пересекаются в одной точке (доказательство см. в п. 197).

188. Равенство треугольников. Первый признак (одна пара равных сторон). *Пусть в двух треугольниках ABC и KLM стороны AB и KL и прилежащие к ним углы A, K и B, L соответственно равны. Тогда треугольники равны.*

Действительно, наложим треугольник ABC на треугольник KLM так, чтобы сторона AB совпала со стороной KL, а сторона AC пошла по стороне KM, что возможно в силу равенства углов A и K (рис. 223). Тогда и сторона BC пойдет по стороне LM и тем самым совпадут вершины C и M, как точки пересечения совпавших сторон.

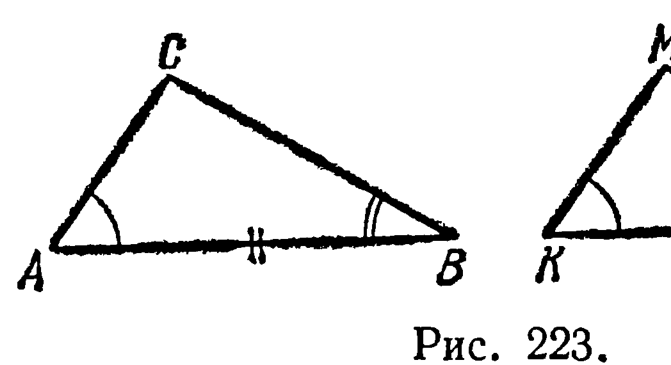




Рис. 223.

Ясно, что в условии можно предположить равенство другой пары соответствующих углов, так как из равенства двух пар углов следует и равенство третьей пары углов треугольников.

Второй признак (две пары равных сторон). *Если стороны AB, KL и AC, KM в двух треугольниках соответственно равны и углы, заключенные между ними, равны, то треугольники равны.*

Доказательство предоставляется читателю.

Третий признак (три пары равных сторон). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого: $AB=KL$, $BC=LM$, $AC=KM$, то треугольники равны* (рис. 224).

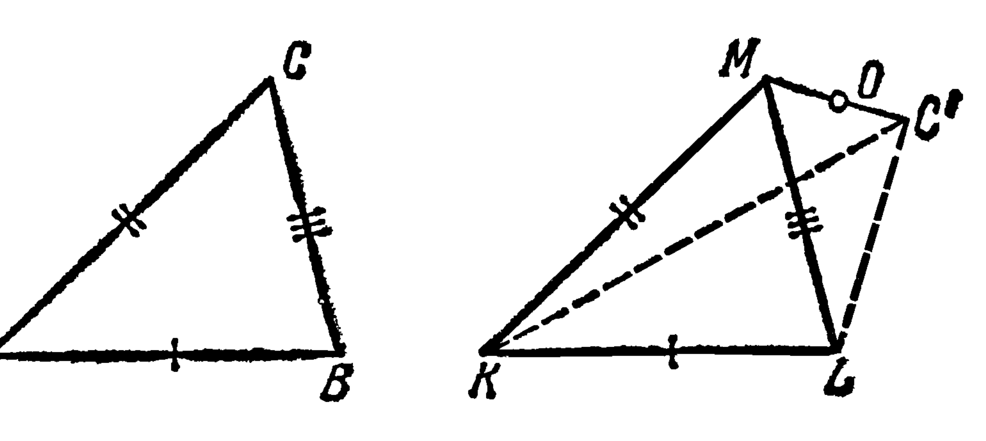


Рис. 224.

Для доказательства наложим сторону AB треугольника ABC на сторону KL так, чтоб совпали точки A и K, B и L, а вершины C и M оказались по одну сторону от совмещенных сторон AB, KL. Остается показать, что и вершины C и M совпадут. Допустим противное, а именно что C и M не совместились. Пусть O — середина отрезка между этими вершинами. Тогда, в силу равенства наклонных KM и KC' к прямой MC', отрезок KO будет перпендикуляром к MC'. Также должен быть перпендикуляром к MC' и отрезок LO, т. е. в точке O мы имеем два перпендикуляра к MC', что невозможно. Итак, допущение что M и C' не совпадают, ложно.

Для двух прямоугольных треугольников достаточно допустить равенство двух пар сторон: *два прямоугольных треугольника равны, если два катета одного равны двум катетам другого или если катет и гипотенуза одного равны соответственно катету и гипотенузе другого.*

Рассмотрим второй из указанных случаев: пусть катеты AB и KL прямоугольных треугольников ABC и KLM (рис. 225),

а также и их гипотенузы AC и KM равны. Совместим катеты AB и KL так, чтобы точка A совпала с K и B с L, а гипотенузы оказались по одну сторону от совпавших катетов. Тогда катеты CB и ML расположатся по одной прямой. Гипотенузы будут наклонными, проведенными через K к линии вторых катетов, и, будучи равными и расположенными по одну сторону от перпендикуляра, совпадут, откуда следует совмещение треугольников.

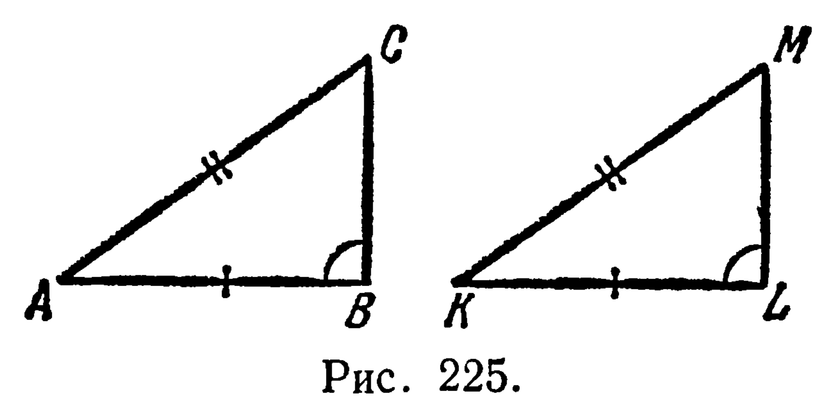
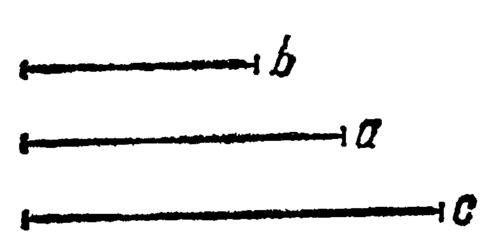


Рис. 225.

Так как у двух прямоугольных треугольников всегда есть пара равных углов (прямых), то для равенства таких треугольников достаточны также следующие условия: *прямоугольные треугольники равны, если они имеют пару равных острых углов и пару равных катетов* (или *гипотенуз*).

189. Построение треугольников. Три доказанные в п. 188 теоремы о равенстве треугольников показывают, что треугольник вполне определен, если даны три его стороны, две стороны и угол, заключенный между ними, сторона и два прилегающих к ней угла (или вообще два каких-нибудь угла).

Существование треугольника, определенного заданием тех или иных конкретных величин сторон или углов, обнаруживается при решении задачи на построение треугольника по данным элементам: однозначность решения задачи на построение еще раз доказывает признаки равенства из п. 188. Сообразно трем признакам равенства возникают и три основные задачи на построение треугольников.



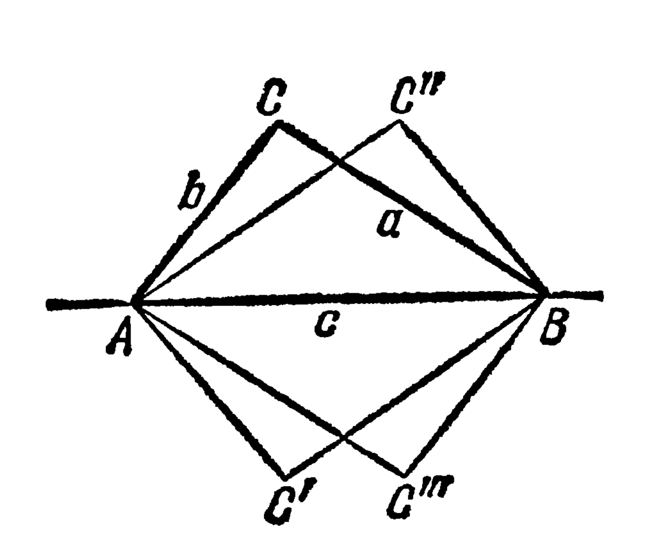


Рис. 226.

Задача 1. Даны три отрезка a, b, c. Построить треугольник, имеющий эти отрезки своими сторонами.

Решение. Пусть c — наибольший из трех отрезков: $c \geqslant a$, $c \geqslant b$; для того чтобы задача могла иметь решение, необходимо, чтобы выполнялось условие $c < a+b$. Будем считать, что это условие выполнено. На произвольной прямой (рис. 226) отложим в произвольном месте отрезок $AB = c$. Концы его примем за две вершины искомого треугольника. Третья вершина должна лежать на расстоянии b от точки A (или от точки B) и на расстоянии a от B (или A). Для построения недостающей вершины проводим окружность радиуса b с центром A и окружность

радиуса a с центром B. Эти две окружности пересекутся, так как по условию расстояние между их центрами меньше суммы радиусов $a+b$ и больше их разности, поскольку c — наибольший отрезок среди данных. Получаются две точки пересечения C и C', т. е. два возможных положения вершины C; соответственные два треугольника, однако, равны, как симметрично расположенные относительно AB. На рис. 226 также показано, как получить еще два положения третьей вершины, если поменять местами радиусы окружностей.

Задача 2. Построить треугольник по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

Задача 3. Построить треугольник по стороне и прилежащим к ней углам, сумма которых меньше $2d$.

Решение обеих задач рекомендуется выполнить читателю.

При анализе признаков равенства треугольников обращают на себя внимание два обстоятельства:

1) Нет признаков, в которых равенство треугольников обеспечивалось бы только равенством трех углов. Это объясняется тем, что два треугольника, имеющие равные углы, еще не обязательно равны (подобные треугольники, см. подробнее гл. XVI).

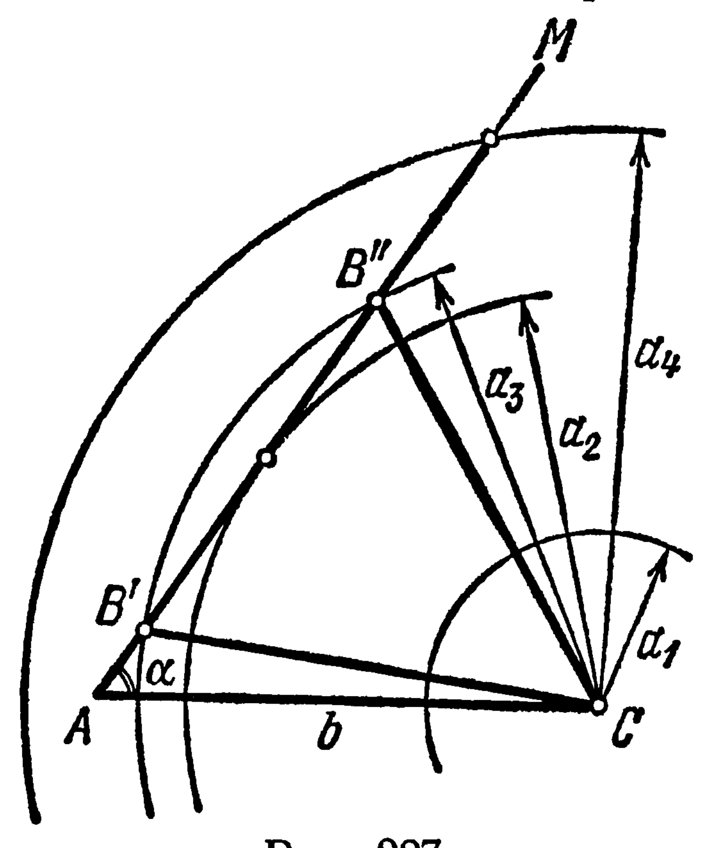


Рис. 227.

2) Признак равенства треугольников по двум сторонам требует равенства не произвольных углов, но непременно заключенных между равными сторонами. Чтобы выяснить причину этого, поставим следующую задачу.

Задача 4. Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Решение. Пусть, например, даны стороны a и b и угол α, лежащий против a (рис. 227). Для построения треугольника отложим отрезок b на произвольной прямой AC и из одной его вершины, например A, проведем луч AM под углом α к отрезку AC. Неизвестная третья сторона треугольника должна лежать на этом луче; ее конец и есть недостающая вершина треугольника. Известно, однако, что эта третья вершина лежит на расстоянии a от C и, значит, помещается на окружности с центром C радиуса a. Проведем такую окружность. Точки ее пересечения с лучом AM дадут возможные положения третьей вершины. Так как окружность и луч могут не иметь общих точек, иметь одну или две общие точки, то задача может не иметь решений, иметь одно или два решения. На рис. 227 представлен случай, когда угол α

острый, и четыре варианта для стороны a (a_1, a_2, a_3, a_4), для которых задача, соответственно, не имеет решений, имеет одно решение, два решения и снова одно решение. Показаны оба решения для $a=a_3$. Полный анализ этой задачи дается в п. 223 в связи с задачами на решение треугольников.

Можно ставить и другие разнообразные задачи на построение треугольников по тем или иным данным. Во всех случаях для возможности построения треугольника должны быть заданы либо три какие-нибудь его линейных элемента (т. е. три отрезка: стороны, медианы, высоты и т. п.), либо два отрезка и один угол, либо один отрезок и два угла.

Задача 5. Даны две стороны a, c треугольника и медиана m_c. Построить треугольник.

Решение. Начнем решение задачи с анализа. Так называется этап решения, когда мы условно допускаем, что задача уже решена, и выясняем такие ее особенности, которые и в самом деле помогут нам ее решить. Итак, допустим, что треугольник ABC (рис. 228, a) — искомый. Тогда в нем $BC=a$, $CM=m_c$,

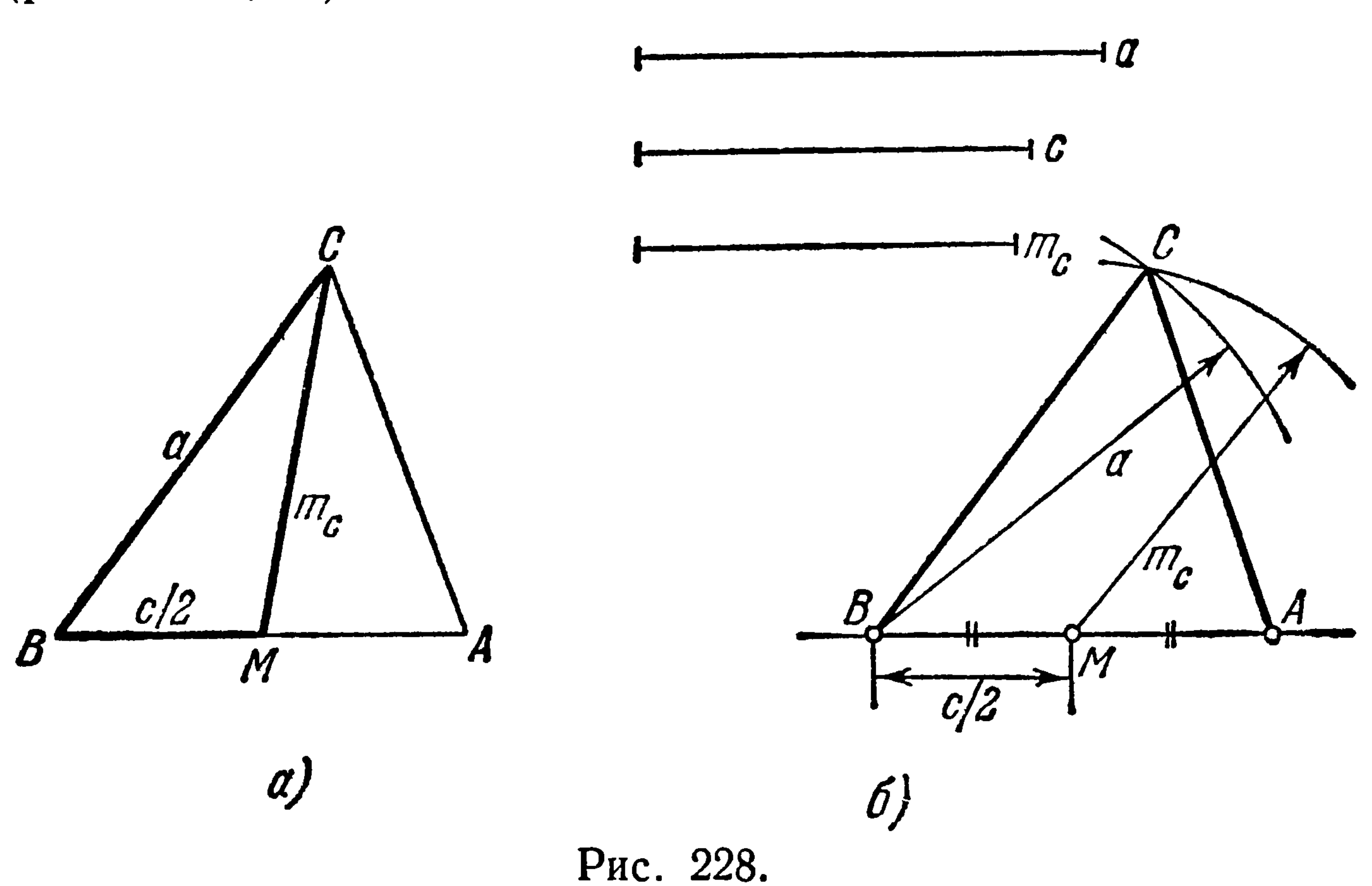


Рис. 228.

$AB=c$. Заметим, что отрезок BM по определению медианы составляет половину c, т. е. может считаться известным. Но теперь в треугольнике BMC известны все три стороны! Здесь ключ к решению задачи, остальное уже просто. Мы строим (рис. 228, б) треугольник BMC по трем сторонам $BM=c/2$, $BC=a$, $CM=m_c$ и продолжаем затем сторону BM на расстояние, равное $c/2$, получая тем самым третью вершину A треугольника. Правильность выполненного построения ясна.

Условие разрешимости задачи состоит в возможности построить «частичный» треугольник по стороне a, медиане и половине другой стороны.

190. Равнобедренные треугольники. По определению *равнобедренным* называется всякий треугольник, две стороны которого равны (если и третья сторона равна им, то такой равносторонний треугольник является частным видом равнобедренного треугольника). Две равные стороны мы называем *боковыми*, третью — *основанием*.

Опустим высоту на основание равнобедренного треугольника. Ввиду равенства боковых сторон — наклонных к основанию — высота разделит основание пополам и будет осью симметрии всей рассматриваемой фигуры (рис. 229). Поэтому *высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, одновременно является биссектрисой угла между равными сторонами, медианой и осью симметрии основания.*

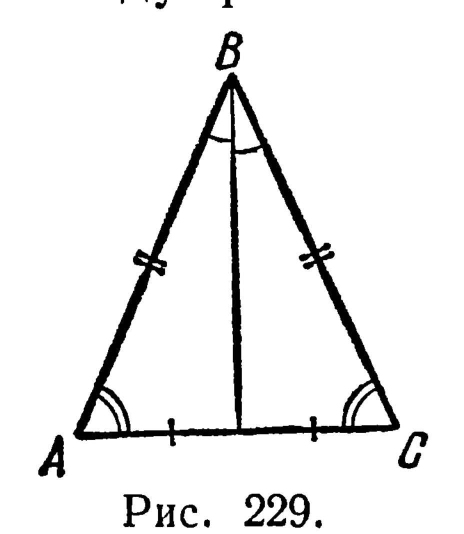


Рис. 229.

Обратно, можно доказать, что если две из указанных четырех линий совпадут, то треугольник будет равнобедренным (а значит, совпадут и все четыре линии). Центр тяжести, центры описанной и вписанной окружностей и точка пересечения высот равнобедренного треугольника — все лежат на его оси симметрии, т. е. на высоте (рис. 229).

Равносторонний треугольник является равнобедренным для каждой пары своих сторон. Ввиду равенства всех его сторон равны также и все три угла такого треугольника. Учитывая, что сумма углов любого треугольника равна двум прямым, мы видим, что каждый из углов равностороннего треугольника содержит $\pi/3$ радиан, или 60°. Обратно, чтобы убедиться в равенстве всех сторон треугольника, достаточно проверить, что два из трех его углов равны 60°.

В равностороннем треугольнике совпадают все рассмотренные нами замечательные точки: центр тяжести, центры вписанной и описанной окружностей, точка пересечения высот (называемая *ортоцентром* треугольника). Обратно, если две из указанных четырех точек совпадут, то треугольник будет равносторонним и, как следствие, совпадут все четыре названные точки.

Действительно, такой треугольник окажется, по предыдущему, равнобедренным по отношению к любой паре сторон, т. е. равносторонним.

191. Прямоугольные треугольники. Прямоугольный треугольник имеет две взаимно перпендикулярные стороны, называемые *катетами*; третья его сторона называется *гипотенузой*. По свойствам перпендикуляра и наклонных гипотенуза длиннее каждого из катетов (но меньше их суммы). Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу. Две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами. Поэтому одна

из четырех замечательных точек попадает в вершину прямого угла треугольника.

Другая особенность прямоугольного треугольника состоит в том, что центр его описанной окружности лежит в середине гипотенузы. Действительно, рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 230) и проведем его медиану BM из вершины прямого угла. Покажем, что длина этой медианы равна половине гипотенузы, т. е. $BM = AM = CM$. Тогда точка M будет одинаково удалена от всех вершин треугольника и потому будет центром описанной окружности. Для доказательства равенства $BM = AM$ достаточно обнаружить равенство углов MAB и ABM. Допустим противное, т. е. что углы эти не равны, например, $\angle MAB > \angle ABM$ (или $\angle MAB < \angle ABM$). Тогда соответственно $\angle MBC > \angle BCM$ (или $\angle MBC < \angle BCM$). По свойству «против большего угла лежит большая сторона» имеем в $\triangle BMA$ $MA < BM$ и в $\triangle BCM$ $BM < MC$ (или, наоборот, $BM < MA$ и $MC < BM$). В каждом из этих случаев приходим к противоречию: $AM < MC$ (или $AM > MC$), в то время как должно быть $AM = MC$.

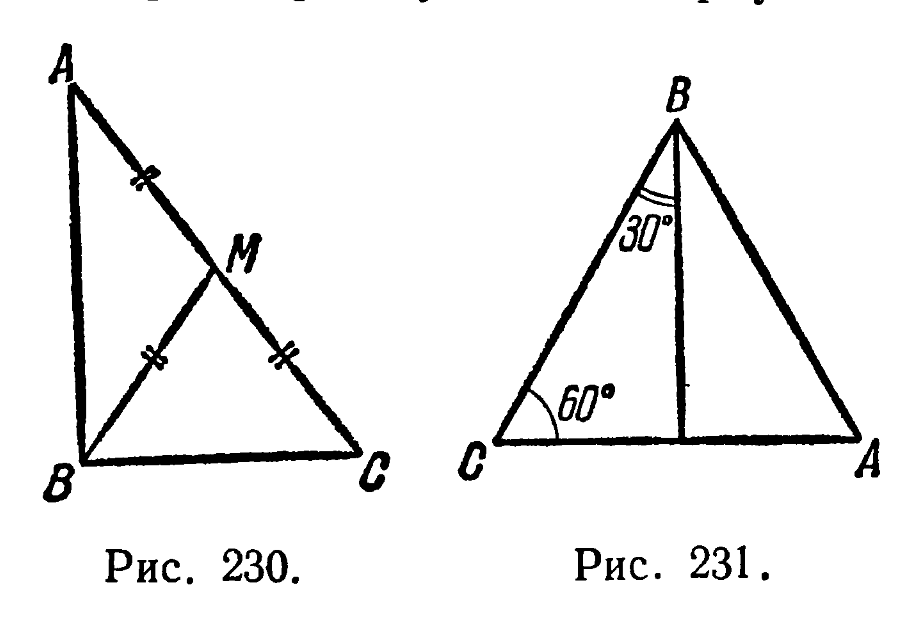


Рис. 230. Рис. 231.

Итак, остается допустить, что $\angle MAB = \angle MBA$, откуда $BM = MA$, что и требовалось доказать. Отсюда и следует, что центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит на середине его гипотенузы.

Отметим еще два специальных вида прямоугольных треугольников: равнобедренный и с углами в 30° и 60°. Равнобедренный прямоугольный треугольник имеет равные углы при основании (гипотенузе), каждый из этих углов содержит 45°. Такой треугольник получается, если рассечь квадрат его диагональю. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника.

Прямоугольный треугольник с углами 30° и 60° получится, если в равностороннем треугольнике провести одну из его высот и взять какой-либо из двух равных прямоугольных треугольников, на которые она разбивает данный равносторонний треугольник (рис. 231). Обратно, если взять прямоугольный треугольник с углами 60° и 30°, то, приложив к нему еще один такой же треугольник, имеющий с ним общий катет, прилежащий к углу в 30°, получим равносторонний треугольник. Из такого способа получения указанного треугольника видно, что *в прямоугольном*

треугольнике с углами в 60° *и* 30° *катет, лежащий против угла в* 30°, *равен половине гипотенузы.*

Рассмотрим 2 задачи на построение равнобедренных и прямоугольных треугольников.

Задача 1. Построить равнобедренный треугольник по основанию и углу при вершине.

Решение. Зная угол при вершине, найдем смежный с ним угол; разделив его пополам, получим угол, равный углу при основании искомого треугольника, после чего он строится уже известным способом (по стороне и двум углам).

Задача 2. Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

Решение. Построим отрезок AB, равный данному катету, и в одном из концов его A восставим к нему перпендикуляр; на этом перпендикуляре будет лежать второй катет. Остается сделать на построенном перпендикуляре засечку с центром в вершине B и радиусом, равным данной гипотенузе.

Упражнения

1. Построить треугольник по сторонам AB, AC и высоте BH.
2. Построить треугольник по стороне AB, медиане BM и углу A. Сколько решений имеет задача?
3. Восстановить треугольник ABC, если на чертеже показаны две его вершины A и B и точка пересечения высот (или точка пересечения биссектрис).
4. Построить равнобедренный треугольник по основанию b и по высоте h_a.
5. Построить прямоугольный треугольник по катету и медиане, делящей его пополам.

§ 2. Параллелограммы

192. Четырехугольники. Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис. 232) Для подсчета суммы внутренних углов четырехугольника соединим две его противоположные вершины, например A и C. Тогда четырехугольник разобьется на два треугольника CAD и CAB, причем сумма его углов будет равна сумме углов обоих треугольников, т. е. равна $4d$. Итак, сумма углов выпуклого четырехугольника равна четырем прямым.

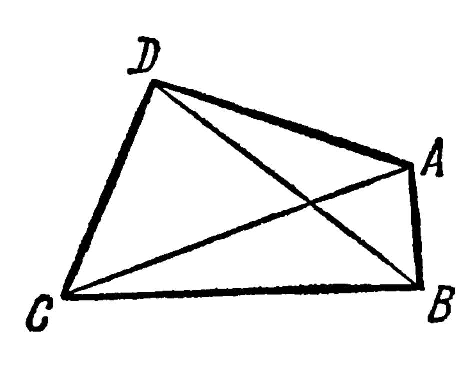


Рис. 232.

Отрезки AC и BD, соединяющие противоположные вершины четырехугольника, называются его *диагоналями* (диагоналями или, точнее, диагональными прямыми называют и прямые AC и BD, на которых лежат эти отрезки). Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются в точке, лежащей внутри четырехугольника.

В элементарной геометрии ограничиваются изучением двух важных частных видов четырехугольников: параллелограммов и трапеций.

193. Параллелограмм и его свойства. *Параллелограммом* называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (рис. 233).

Для произвольного параллелограмма имеют место следующие свойства:

1. *Противоположные стороны параллелограмма равны.*

Доказательство. В параллелограмме $ABCD$ проведем диагональ AC. Треугольники ACD и ACB равны, как имеющие общую сторону AC и две пары равных углов, прилежащих к ней:

$$\angle CAB = \angle ACD, \qquad \angle ACB = \angle DAC$$

(как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC). Значит, $AB = CD$ и $BC = AD$, как стороны равных треугольников, лежащие против равных углов, что и требовалось доказать.

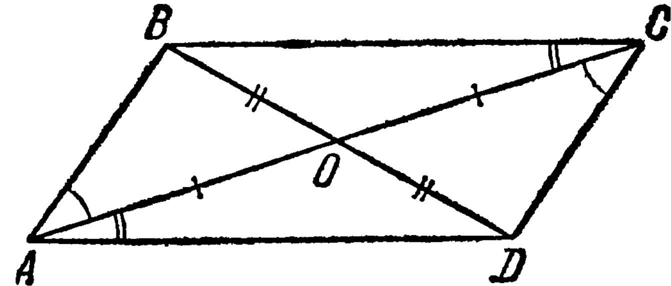


Рис. 233.

2. *Противоположные углы параллелограмма равны*: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

3. *Соседние углы параллелограмма, т. е. углы, прилежащие к одной стороне, составляют в сумме* $2d$: $\angle A + \angle B = 2d$ и т. д.

Доказательство свойств 2 и 3 сразу получается из свойств углов при параллельных прямых.

4. *Диагонали параллелограмма делят друг друга в точке их пересечения пополам.* Иначе говоря, $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 233).

Доказательство. Треугольники AOD и BOC равны, так как равны их стороны AD и BC (свойство 1) и углы, к ним прилежащие (как накрест лежащие углы при параллельных прямых). Отсюда следует и равенство соответствующих сторон этих треугольников: $AO = OC$, $BO = OD$, что и требовалось доказать.

Каждое из названных четырех свойств характеризует параллелограмм, или, как говорят, является его *характеристическим свойством*, т. е. всякий четырехугольник, обладающий хотя бы одним из этих свойств, является параллелограммом (и, значит, обладает и всеми остальными тремя свойствами).

Проведем доказательство для каждого свойства отдельно.

1′. *Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то он является параллелограммом.*

Доказательство. Пусть у четырехугольника $ABCD$ стороны AD и BC, AB и CD соответственно равны (рис. 233). Проведем диагональ AC. Треугольники ABC и CDA будут равны, как имеющие три пары равных сторон. Но тогда углы BAC и DCA

равны и $AB \parallel CD$. Параллельность сторон BC и AD следует из равенства углов CAD и ACB.

2′. *Если у четырехугольника две пары противоположных углов равны, то он является параллелограммом.*

Доказательство. Пусть $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Так как $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4d$, то $\angle A + \angle B = 2d$ и стороны AD и BC параллельны (по признаку параллельности прямых).

3′. Предоставляем формулировку и доказательство читателю.

4′. *Если диагонали четырехугольника взаимно делятся в точке пересечения пополам, то четырехугольник — параллелограмм.*

Доказательство. Если $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 233), то треугольники AOD и BOC равны, как имеющие равные углы (вертикальные!) при вершине O, заключенные между парами равных сторон AO и CO, BO и DO. Из равенства треугольников заключаем, что стороны AD и BC равны. Также равны стороны AB и CD, и четырехугольник оказывается параллелограммом по характеристическому свойству 1′.

Таким образом, для того чтобы доказать, что данный четырехугольник является параллелограммом, достаточно убедиться в справедливости любого из четырех свойств. Читателю предлагается самостоятельно доказать еще одно характеристическое свойство параллелограмма.

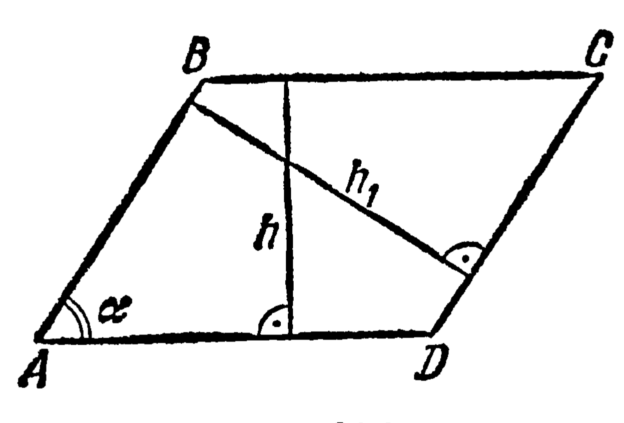


Рис. 234.

5′. *Если четырехугольник имеет пару равных, параллельных между собой сторон, то он является параллелограммом.*

Иногда какая-нибудь пара параллельных сторон параллелограмма называется его *основаниями*, тогда две другие называются *боковыми* сторонами. Отрезок прямой, перпендикулярной к двум сторонам параллелограмма, заключенный между ними, называется *высотой* параллелограмма. Параллелограмм на рис. 234 имеет высоту h, проведенную к сторонам AD и BC; вторая его высота представлена отрезком h_1.

194. Прямоугольник. *Прямоугольником* называется такой параллелограмм, смежные стороны которого взаимно перпендикулярны. Ясно, что параллелограмм будет прямоугольником уже в том случае, когда хотя бы один из его углов прямой, так как тогда будут прямыми и остальные его углы. Если же заранее неизвестно, является ли данный четырехугольник параллелограммом, то придется проверить, что три угла его прямые, тогда, конечно, и четвертый угол будет прямой, так как сумма углов любого четырехугольника равна четырем прямым. Важно также следующее отличительное свойство прямоугольника:

Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABD и ACD (рис. 235). Эти треугольники прямоугольные, катет AD у них общий и катеты AB и CD равны, следовательно, равны и гипотенузы: $BD = AC$, что и требовалось доказать.

Если известно, что данный четырехугольник — параллелограмм, то данное свойство будет для прямоугольника характеристическим:

Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.

Доказательство. Из равенства диагоналей BD и AC (рис. 235) в свою очередь следует равенство треугольников ABD и DCA и, значит, равенство углов BAD и ADC; но, составляя в сумме два прямых и будучи равными, эти углы должны быть прямыми; значит, параллелограмм — прямоугольник.

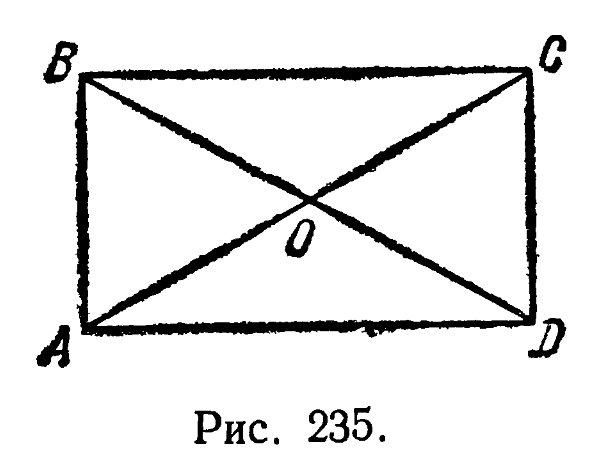


Рис. 235.

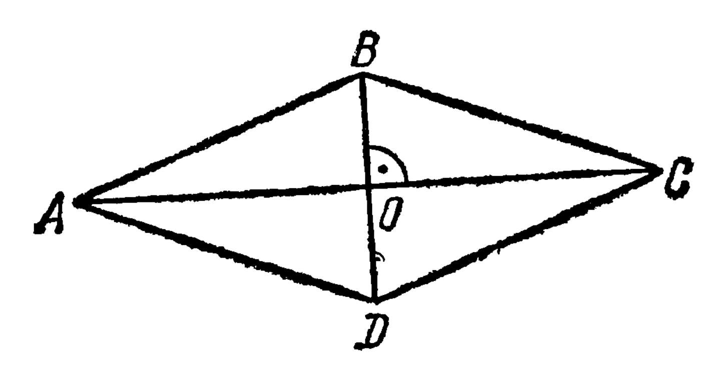


Рис. 236.

195. Ромб. Квадрат. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*. Для того чтобы проверить, что данный параллелограмм является ромбом, достаточно показать, что две его смежные стороны равны; тогда равенство всех сторон будет вытекать из свойства 1 п. 193. Если заранее неизвестно, является ли данный четырехугольник параллелограммом, то достаточно проверить равенство всех сторон, чтобы убедиться, что мы имеем ромб:

Четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.

(Заметим, что это уже утверждение, требующее доказательства, а не определение!)

Доказательство. Если у четырехугольника все стороны равны, то, в частности, попарно равны и противоположные стороны и четырехугольник является параллелограммом (свойство 1 п. 193). Но параллелограмм с равными сторонами будет ромбом (в силу определения ромба). Укажем еще одно свойство ромба:

Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольные треугольники AOB и COB (рис. 236); они равны в силу того, что катет OB у них общий, а катеты AO и CO равны по свойству диагоналей параллелограмма. Значит, $AB = BC$, и потому все четыре стороны параллелограмма равны, т. е. он будет ромбом.

Предлагается читателю доказать теорему:

Диагонали любого ромба взаимно перпендикулярны.

Прямоугольник, стороны которого равны, называется *квадратом*. Таким образом, квадрат является также и ромбом (стороны равны!) с прямыми углами. Можно иначе сказать: квадрат — это четырехугольник, одновременно являющийся ромбом и прямоугольником. Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Задача 1. Доказать, что диагонали ромба служат биссектрисами его углов.

Решение. Возвращаясь к рис. 236, напомним, что мы обнаружили равенство треугольников AOB и COB, следовательно, углы ABO и OBC равны, т. е. диагональ BD — биссектриса угла B. Для второй диагонали применяем те же рассуждения.

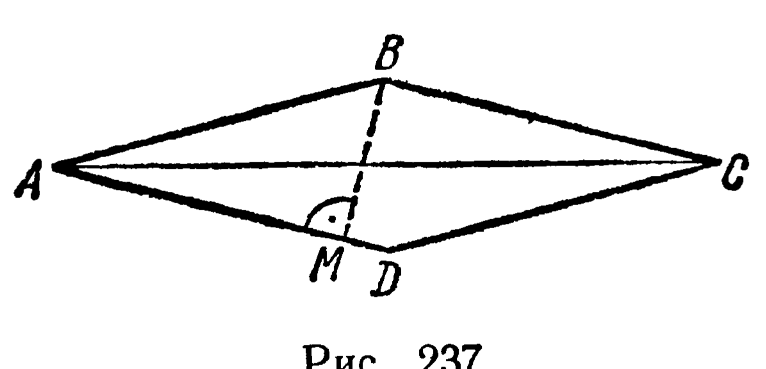


Рис. 237.

Задача 2. Высота ромба составляет восьмую часть его периметра. Определить углы ромба.

Решение. Если высота ромба составляет восьмую часть его периметра, то она равна половине стороны ромба. Таким образом, в треугольнике ABM (рис. 237), отсеченном от ромба его высотой BM, проведенной через вершину тупого угла, катет BM равен половине гипотенузы AB и угол A содержит 30°. Тупой угол будет равен 150°.

Упражнения

1. Построить параллелограмм по стороне AB, острому углу A и высоте BH, перпендикулярной к стороне CD.
2. Доказать, что параллелограмм, имеющий равные высоты — ромб.
3. Построить прямоугольник по диагонали и стороне.
4. Построить ромб по малой диагонали и острому углу.
5. Показать, что середины сторон ромба служат вершинами прямоугольника, а середины сторон прямоугольника — вершинами ромба.

§ 3. Трапеция

196. Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого имеется только одна пара параллельных сторон. Так, четырехугольник $ABCD$, изображенный на рис. 238, — трапеция. Стороны AD и BC здесь параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, непараллельные стороны — *боковыми сторонами*. Параллельные стороны не могут быть равными, так как в противном случае мы имели бы параллелограмм (см. свойство 1 п. 193). Поэтому одну из них мы назовем *большим*, вторую — *малым основанием* трапеции. По свойствам парал-

лельных прямых видно, что сумма углов, прилежащих к каждой из боковых сторон, равна двум прямым (у параллелограмма двум прямым равна сумма углов, прилежащих к любой стороне).

Чтобы получить трапецию, можно пересечь треугольник ABC (рис. 239) прямой MN, параллельной одной из его сторон AB. Эту трапецию можно назвать усеченным треугольником.

Отрезок h прямой, перпендикулярной к основаниям трапеции, заключенный между ними, называется *высотой* трапеции (рис. 238). На рис. 240 изображена трапеция, одна из боковых

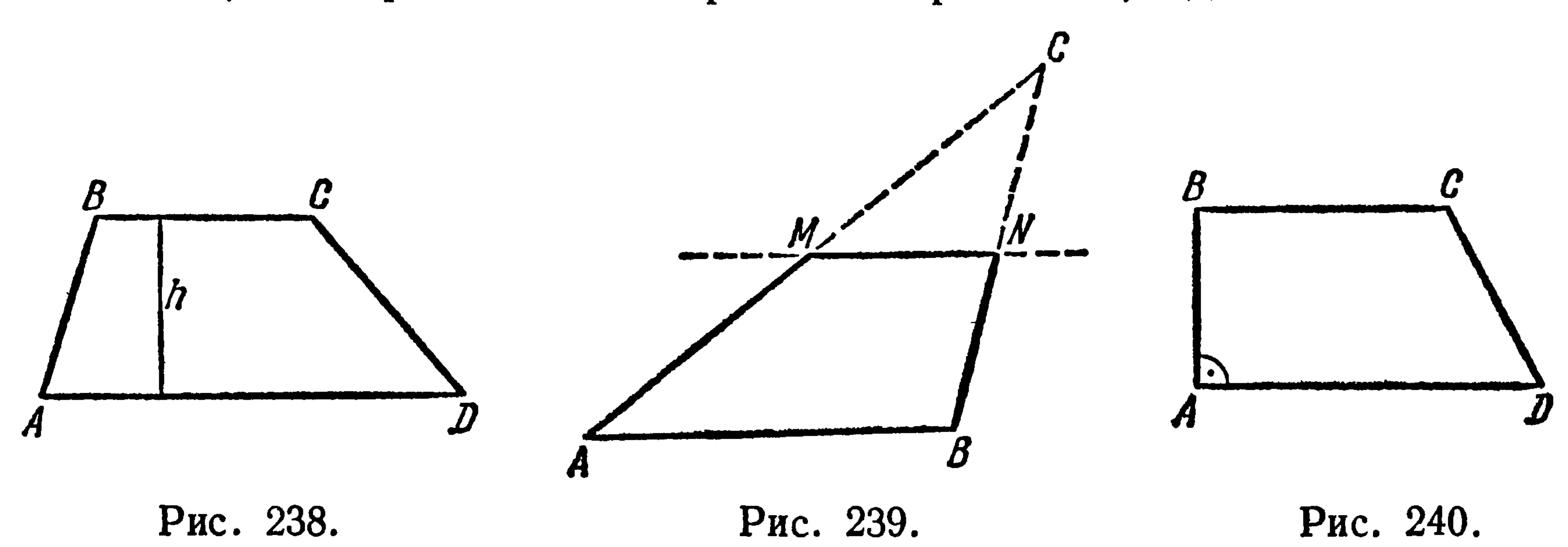


Рис. 238.   Рис. 239.   Рис. 240.

сторон которой перпендикулярна к ее основаниям. Такая трапеция называется *прямоугольной*. Обратно, всякий четырехугольник, у которого два угла, прилежащие к одной стороне, прямые, является либо прямоугольной трапецией (очевидно, по меньшей мере две стороны параллельны), либо прямоугольником.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобочной* трапецией. Читателю следует обратить внимание на то, что у такой трапеции есть пара равных сторон и есть пара параллельных сторон, и тем не менее она не является параллелограммом.

Отметим некоторые свойства равнобочной трапеции.

1. *Углы, прилежащие к каждому из оснований равнобочной трапеции, равны.*

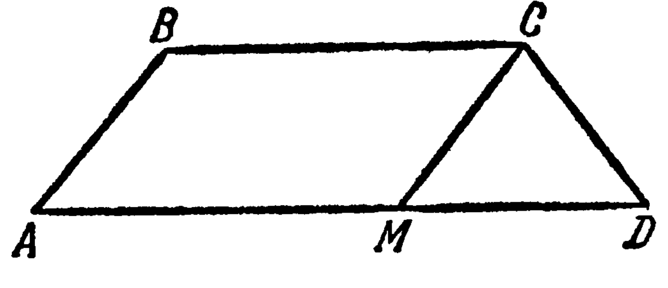


Рис. 241.

Доказательство. Докажем, например, равенство углов A и D (рис. 241) при большем основании AD равнобочной трапеции $ABCD$. Для этой цели проведем через вершину C прямую, параллельную боковой стороне AB. Она пересечет большое основание в точке M. Четырехугольник $ABCM$, отсеченный проведенной прямой от трапеции, является параллелограммом, так как по построению он имеет две пары параллельных сторон.

Следовательно, отрезок CM секущей прямой, заключенный внутри трапеции, равен ее боковой стороне: $CM = AB$. Отсюда

ясно, что $CM = CD$, треугольник CMD — равнобедренный, $\angle CMD = \angle CDM$, и, значит, $\angle A = \angle D$. Углы, прилежащие к малому основанию, равны, так как каждый из них в сумме с равными углами A и D составляет два прямых.

2. *Диагонали равнобочной трапеции равны.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABD и ACD (рис. 242). Их равенство сразу следует из второго признака равенства треугольников (сторона AD общая, стороны AB и CD равны, углы BAD и ADC, заключенные между равными сторонами, равны по свойству 1). Из равенства треугольников заключаем, что $AC = BD$.

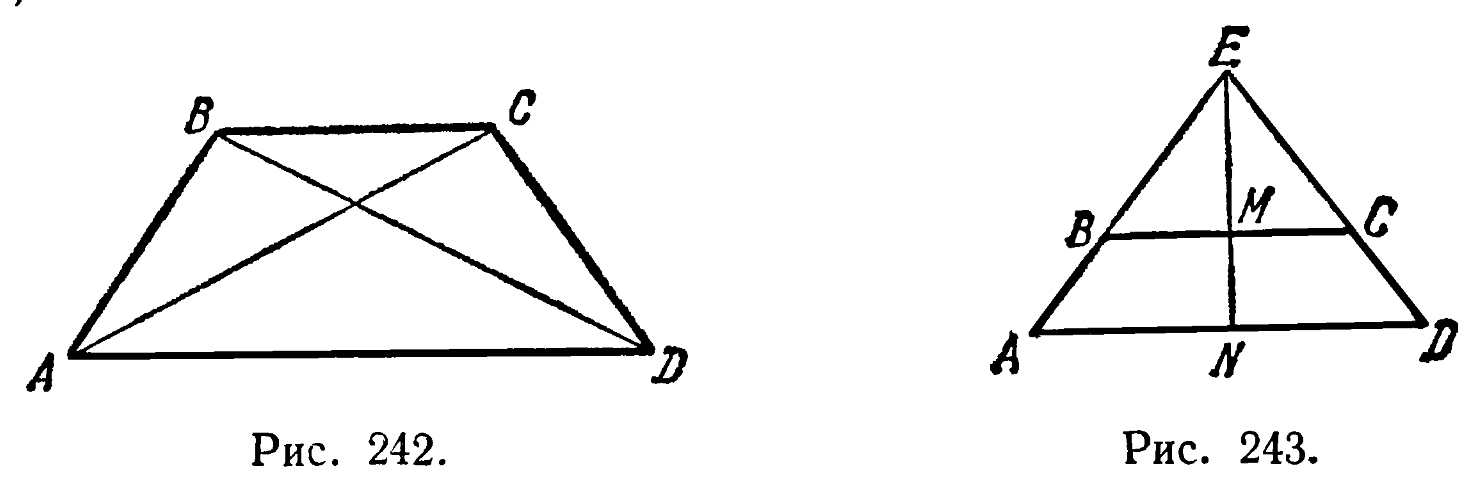


Рис. 242. Рис. 243.

3. *Если продолжить стороны равнобочной трапеции до их пересечения, то вместе с большим основанием трапеции они образуют равнобедренный треугольник.* Иначе говоря, равнобочная трапеция получается усечением равнобедренного треугольника прямой, параллельной его основанию.

Свойство 3 следует из равенства углов при большом основании. Высота EN построенного равнобедренного треугольника AED (рис. 243) является осью симметрии треугольника и вместе с тем трапеции: линия MN, соединяющая середины оснований BC и AD равнобочной трапеции, перпендикулярна к ее основаниям и служит осью симметрии трапеции.

Все перечисленные свойства являются характеристическими: каждое из них выделяет равнобочную трапецию среди всех трапеций.

1′. *Если углы, прилежащие к одному из оснований трапеции, равны, то трапеция равнобочная.*

2′. *Если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобочная.*

3′. *Если продолженные до пересечения боковые стороны трапеции образуют вместе с ее большим основанием равнобедренный треугольник (здесь равны продолженные боковые стороны), то трапеция равнобочная.*

Ограничимся указанием, что свойство 1′ доказывается с помощью того же построения, которое приведено на рис. 241; доказательство остальных свойств предоставляем читателю.

Задача 1. Построить трапецию по двум ее основаниям и диагоналям.

Решение. Допустим сначала, что искомая трапеция $ABCD$, имеющая данные основания a, b и диагонали d_1, d_2, уже построена (рис. 244). Продлим сторону AD (большое основание трапеции) до пересечения с прямой CL, проведенной из вершины C параллельно диагонали BD. Тогда в треугольнике ACL основание AL равно сумме оснований трапеции. Поэтому можно начать решение задачи с построения треугольника ACL по трем его известным сторонам. Дальнейшее предоставим читателю.

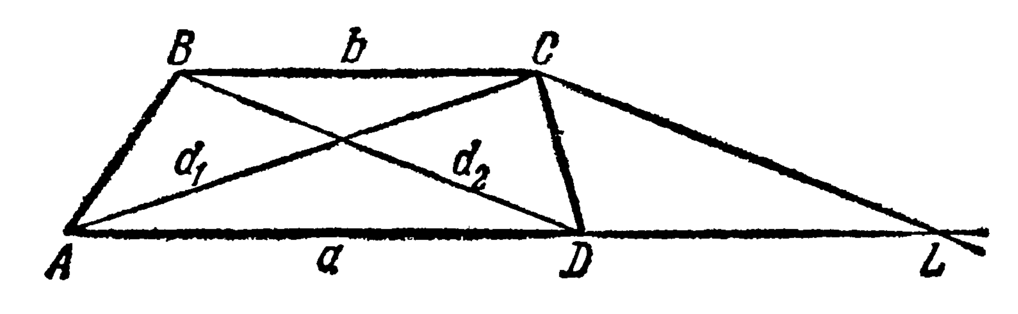


Рис. 244.

Задача 2. Показать, что трапеция, диагонали которой образуют с большим основанием равные углы,— равнобочная трапеция.

Решение. Из равенства углов при большом основании вытекает и равенство углов, которые диагонали образуют с малым основанием. В силу этого треугольники, сторонами которых соответственно служат основания и отрезки диагоналей до точки O их пересечения, равнобедренные, откуда уже вытекает равенство диагоналей и по ранее указанным свойствам — равенство боковых сторон трапеции.

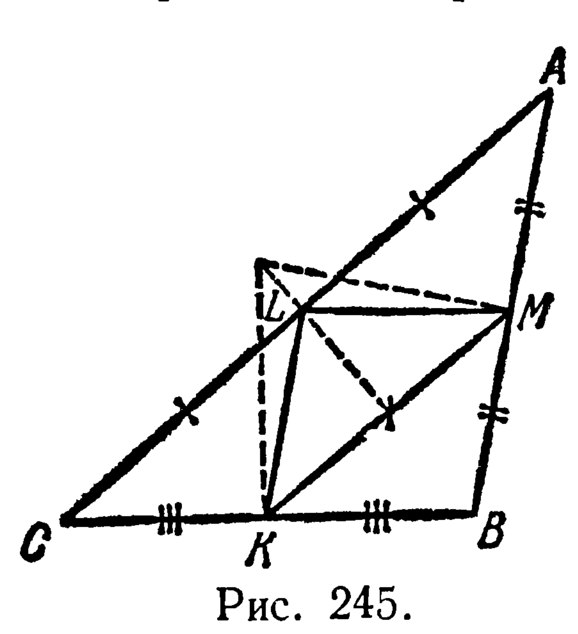


Рис. 245.

197. Средняя линия треугольника. *Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Каждый треугольник имеет три средние линии. Сами средние линии треугольника образуют новый треугольник, вершины которого помещаются в серединах сторон данного треугольника (рис. 245). Каждая из средних линий треугольника, например линия, соединяющая середины сторон AC и BC, обладает следующими свойствами:

1) *параллельна третьей его стороне,*

2) *равна половине третьей стороны.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (на рис. 246, *а* изображен остроугольный треугольник; для случая тупоугольного треугольника на рис. 246, *б* рассуждения изменятся незначительно). Опустим высоту CH на сторону AB. Она разобьет треугольник на два прямоугольных треугольника ACH и BCH. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины H прямого угла (п. 191), найдем $HM_2=M_2C$ и также $HM_1=M_1C$. Теперь точки M_1 и M_2, как

равноудаленные от точек H и C, лежат на перпендикуляре, проведенном к высоте в ее середине, а потому отрезок, соединяющий их, параллелен стороне AB треугольника. Тем самым первое свойство доказано.

Рассмотрим теперь фигуру (рис. 245), на которой проведены все три средние линии треугольника ABC. Треугольник ABC

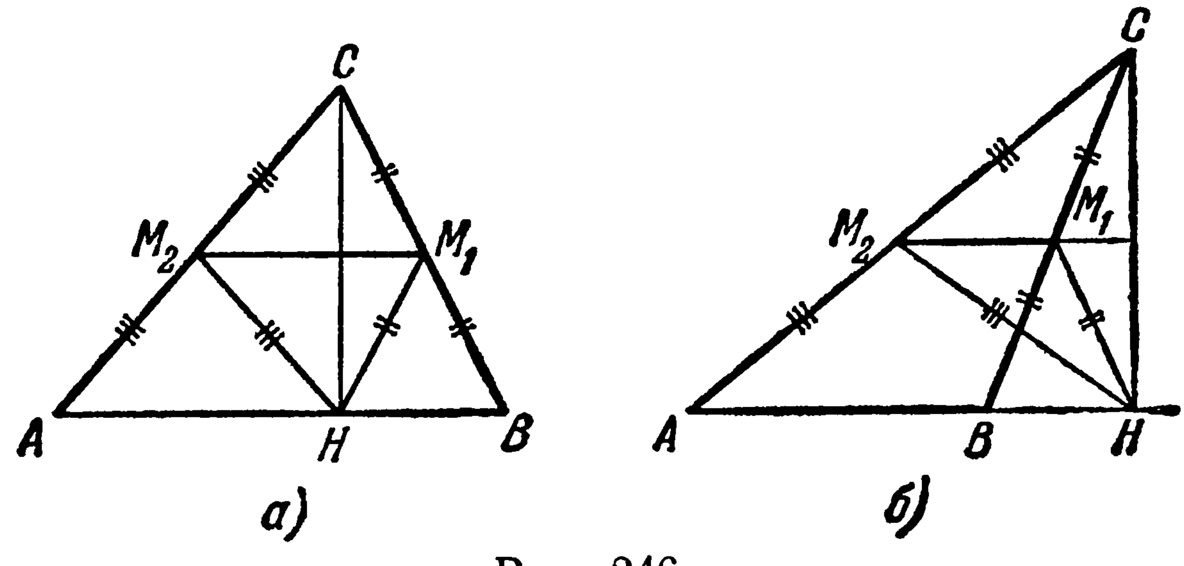


Рис. 246.

разбит на четыре равных треугольника. В самом деле, равенство углов треугольников обеспечено параллельностью их сторон, каждые два из них имеют либо пару равных по построению сторон (например, CL и LA), либо общую сторону. В частности, из равенства треугольников следует, что $LM = KC = \frac{1}{2}BC$, что и доказывает второе свойство.

Задача. Восстановить треугольник по данным серединам его сторон.

Решение. Пусть точки K, L, M (рис. 245)—середины сторон треугольника. По свойству средней линии быть параллельной стороне треугольника заключаем, что стороны искомого треугольника можно провести через данные точки параллельно сторонам треугольника KLM, образованного средними линиями.

Решение последней задачи подсказывает нам простое доказательство упомянутой в п. 187 теоремы о том, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Именно, имея треугольник KLM, построим другой треугольник ABC так, что стороны данного треугольника будут его средними линиями, как это только что показано (рис. 245). Высоты первоначального треугольника являются осями симметрии сторон вновь построенного треугольника и потому все пересекаются в одной точке (центр описанной окружности большого треугольника).

198. Средняя линия трапеции. Проведем диагональ AC трапеции $ABCD$ (рис. 247) и построим средние линии PL и PM треугольников ABC и ACD, на которые эта диагональ разбивает трапецию. Эти средние линии будут лежать на одной прямой. Действительно, обе они, по определению средней линии тре-

угольника, проходят через середину стороны AC, общей для треугольников ABC и ACD. Кроме того, каждая из средних линий PL и PM параллельна одному из оснований трапеции, а значит, обоим основаниям одновременно. Так как через точку P проходит единственная прямая, параллельная основаниям, то обе средние линии лежат на ней. Они продолжают друг друга и образуют отрезок LM, соединяющий середины боковых сторон трапеции; такой отрезок называется *средней линией* трапеции и параллелен ее основаниям.

Свойство средней линии трапеции:

Длина средней линии трапеции равна полусумме ее оснований.

Доказательство. По свойству средней линии треугольника (рис. 247) имеем

$$LP = \frac{1}{2} BC \quad \text{и} \quad PM = \frac{1}{2} AD,$$

откуда находим

$$LM = \frac{1}{2}(BC + AD),$$

что и требовалось доказать.

Задача. Большее основание трапеции равно a, меньшее равно b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

Решение. Искомый отрезок PQ (рис. 247) лежит на средней линии трапеции (объясните, почему). Находим

$$LP = b/2, \quad MQ = b/2, \quad PQ = LM - LP - MQ = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2},$$

откуда $PQ = (a-b)/2$.

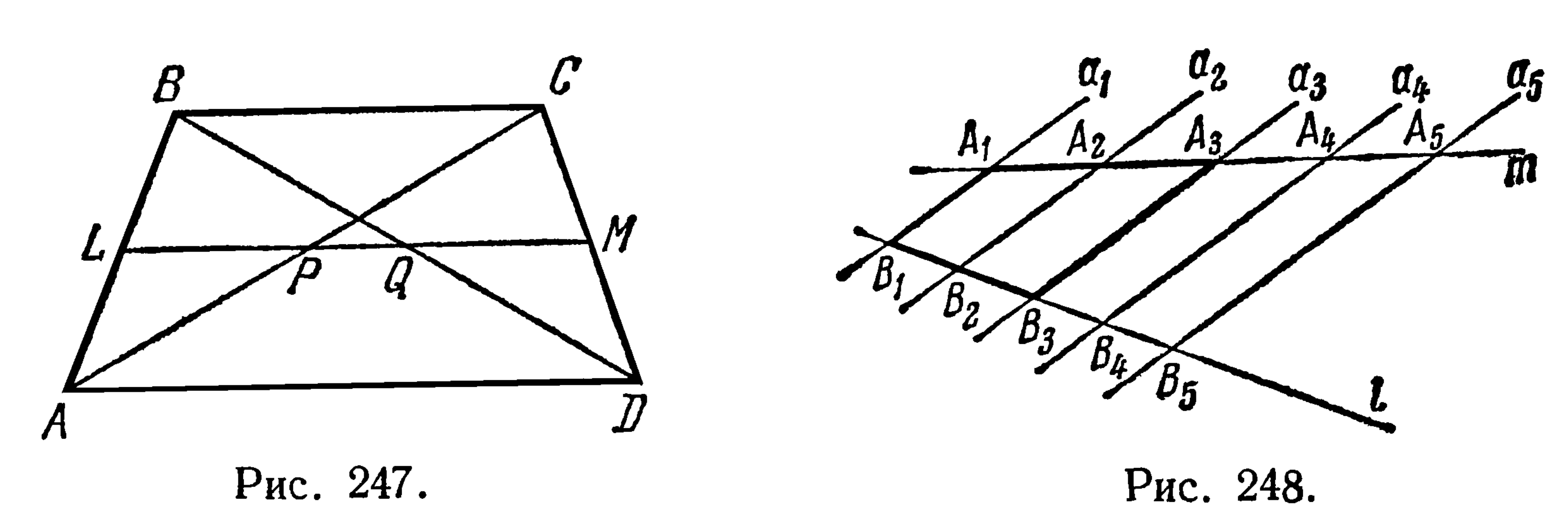


Рис. 247. Рис. 248.

199. Деление отрезка на равные части.

Теорема. *Если параллельные прямые a_1, a_2, a_3, ... отсекают на какой-нибудь прямой равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на произвольной другой прямой, не параллельной им.*

Доказательство. Обратимся к рис. 248. Пусть отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 равны между собой. Пусть l — некоторая прямая, пересекающая a_1, a_2, a_3, ... в точках B_1, B_2, B_3, ... Рассмотрим трапецию $A_1A_3B_3B_1$: прямая a_2 делит боковую

сторону A_1A_3 пополам и параллельна основаниям A_1B_1 и A_3B_3; значит, отрезок A_2B_2 является средней линией и потому $B_1B_2=B_2B_3$; такое же рассуждение применимо для каждой тройки последовательно взятых параллельных прямых. На рис. 248 прямые l и m не параллельны между собой, и мы говорим о трапециях. В случае их параллельности для доказательства придется рассматривать параллелограммы.

Доказанное свойство часто формулируют еще так:

Если ряд параллельных прямых отсекает на одной из сторон угла равные отрезки, то он отсекает равные отрезки и на другой стороне угла.

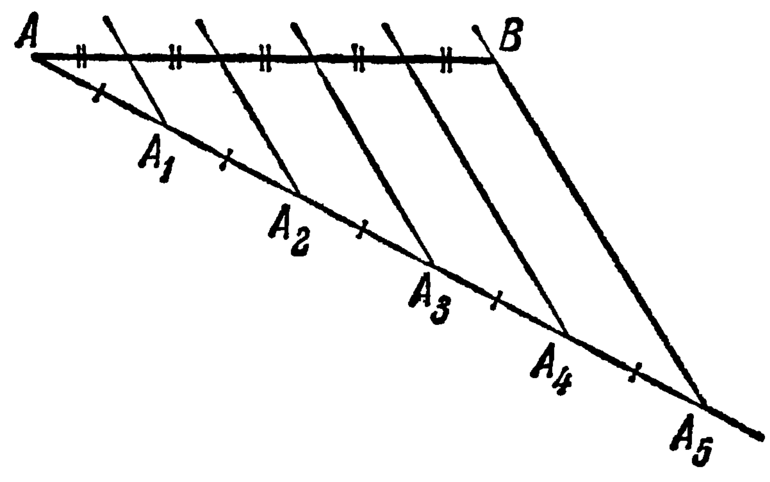


Рис. 249.

На только что доказанной теореме основано решение следующей задачи на построение:

Дан отрезок; разделить его на заданное число равных частей.

Решение. Пусть дан, например, отрезок AB (рис. 249) и требуется разделить его на пять равных частей. Через конец A отрезка AB проводим произвольный луч под некоторым углом к отрезку AB. На этом луче откладываем последовательно, начиная от точки A, пять равных отрезков: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_4A_5 любой длины. Соединяем конец A_5 последнего из них с концом B данного отрезка, а через точки A_1, A_2, A_3, A_4 проводим прямые, параллельные A_5B; эти прямые и рассекут отрезок AB на равные части в требуемом числе.

Упражнения

1. Построить равнобочную трапецию по двум основаниям и углу при большом основании.

2. Сторона AB треугольника ABC равна 10 *см*. Стороны AC и BC разделены на семь равных частей рядом прямых, параллельных AB. Найти длины отрезков этих прямых между точками их пересечения со сторонами AC и BC.

Указание. Следует принять во внимание, что эти отрезки образуют арифметическую прогрессию.

3. Боковая сторона равнобочной трапеции равна 5 *см*, средняя линия — 7 *см*. Чему равен периметр трапеции?

4. Разделить данный отрезок на шесть равных частей.

§ 4. Площади треугольников и четырехугольников

200. Площадь параллелограмма. Общий метод, с помощью которого мы нашли в п. 168 выражение для площади прямоугольника в виде произведения его сторон, в принципе применим к любой плоской фигуре, но гораздо удобнее воспользоваться уже имеющейся формулой, заменив данную фигуру—в нашем

случае параллелограмм — равновеликим ей прямоугольником, если, конечно, мы сумеем это сделать. Обратимся к рис. 250, где изображен произвольный параллелограмм $ABCD$. Проведем его высоты BK и CL из вершин одного из оснований. Образуется некоторый прямоугольник $BCLK$. Этот прямоугольник равновелик нашему параллелограмму, что видно из равенства прямоугольных

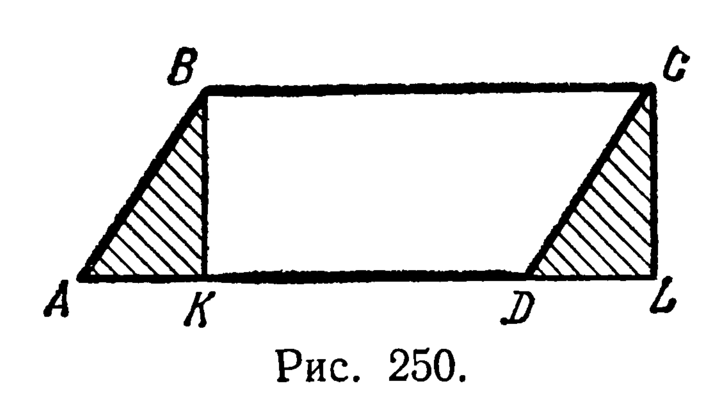


Рис. 250.

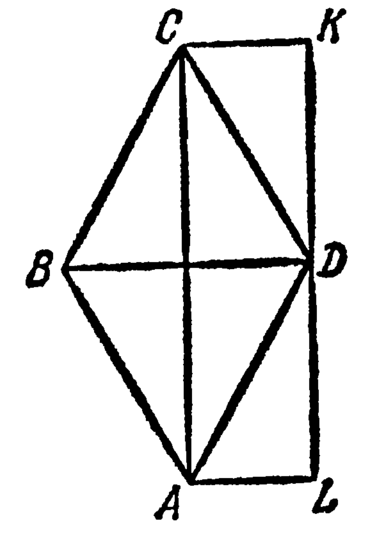


Рис. 251.

треугольников ABK и DCL (доказать!). Обе фигуры, прямоугольник и параллелограмм, состоят из общей для них части $KBCD$ (трапеции) и равных треугольников (ABK для параллелограмма и DCL для прямоугольника), т. е. они равносоставлены и тем более равновелики. Поскольку высоты и основания у параллелограмма и прямоугольника одинаковы, то получается окончательный результат:

$$S = bh, \tag{200.1}$$

где b — основание параллелограмма, h — его высота.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Пример. Найти площадь параллелограмма со сторонами 14 и 6 и острым углом 30°.

Решение. Высота, опущенная из вершины на большую сторону, будет катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 6, и противолежащим острым углом 30°. Такой катет равен половине гипотенузы, т. е. 3. Отсюда $S = bh = 3 \cdot 14 = 42$ кв. ед.

В частности, для ромба можно указать и другую формулу для площади. Именно, рассматривая ромб $ABCD$ (рис. 251), мы легко убеждаемся в том, что он равносоставлен с прямоугольником $ACKL$, построение которого достаточно ясно из рис. 251. Отсюда очевидно, что

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2, \tag{200.2}$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

201. Площадь треугольника. Рассмотрим теперь треугольник ABC, изображенный на рис. 252. Проведем его медиану AM и продолжим ее на величину MD, равную самой медиане AM.

Конец D полученного отрезка соединим с вершинами треугольника B и C. Четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, так как его диагонали делятся по построению пополам. Высота и основание данного треугольника служат одновременно высотой и основанием параллелограмма; в то же время треугольник имеет площадь, равную половине площади параллелограмма, так как последний разбивается диагональю BC на два равных треугольника, с одним из которых совпадает заданный треугольник. Итак, поскольку площадь параллелограмма выражается произведением основания на высоту, то для треугольника имеем следующее правило.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту (опущенную на это основание):

$$S = \frac{1}{2} b h_b. \tag{201.1}$$

В случае прямоугольного треугольника можно найти площадь как половину произведения катетов треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ab. \tag{201.2}$$

З а д а ч а. Площадь треугольника ABC равна S. Сторона его AB разделена точкой P в отношении $AP:PB = {}^1/_2$, сторона BC разделена точкой Q в отношении $BQ:QC = {}^1/_3$. Найти площадь треугольника BPQ, отсеченного от данного треугольника отрезком PQ (рис. 253).

Р е ш е н и е. Проведем прямую, соединяющую вершину C

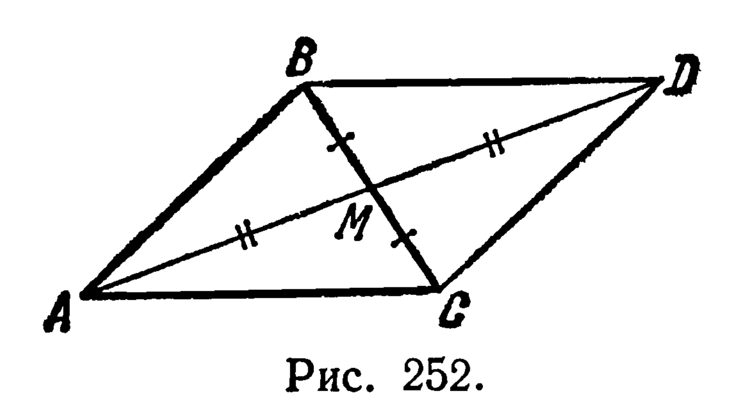


Рис. 252.

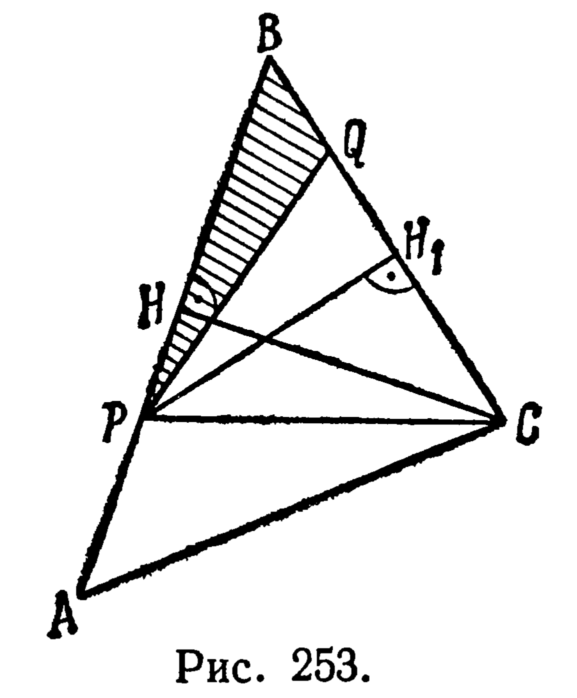


Рис. 253.

с точкой P. Треугольники CAB и CPB имеют общую высоту CH, и потому площади их относятся, как основания AB и PB, т. е. площадь треугольника CPB составит две трети площади исходного треугольника: $S_{CPB} = \frac{2}{3} S$. Сравним теперь треугольники PBQ и CPB. Приняв отрезки BQ и BC за их основания, мы увидим, что они имеют общую высоту PH_1, и потому их площади относятся, как основания; поскольку $BQ = \frac{1}{4} BC$, то площадь $\triangle PBQ$ равна ${}^1/_4$ площади $\triangle PBC$, или ${}^1/_6$ площади исходного треугольника.

202. Площадь трапеции. Рассмотрим теперь какую-нибудь трапецию $ABCD$ (рис. 254). Проведем еще среднюю линию MN и через концы ее — два перпендикуляра $K'K$ и $L'L$ к основаниям трапеции. Очевидно равенство треугольников $MK'B$ и MKA и треугольников $NL'C$ и NLD. Таким образом, трапеция равновелика прямоугольнику с той же высотой и с основанием, равным средней линии трапеции. Итак,

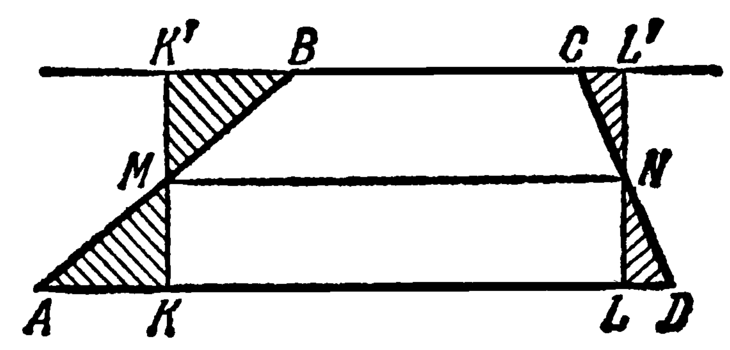


Рис. 254.

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} h. \tag{202.1}$$

Мы учли, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований, ввиду чего

Площадь трапеции равна половине произведения ее высоты на сумму оснований.

Задача. Средняя линия трапеции разбивает ее на две трапеции, площади которых относятся, как 2:1. Чему равно отношение оснований трапеции?

Решение. Пусть основания трапеции a (большее) и b (меньшее). Так как высоты обеих трапеций, на которые средняя линия разбивает данную трапецию, равны, то отношение площадей этих трапеций равно отношению их средних линий. Средняя линия данной трапеции $l=(a+b)/2$, средняя линия ее меньшей части $l_1=(l+b)/2=(a+3b)/4$, большей части $l_2=(a+l)/2=(3a+b)/4$; по условию $l_2:l_1=2$, т. е. $(3a+b)/(a+3b)=2$; отсюда легко находим $a:b=5$.

Отметим в заключение, что площади других четырехугольников могут быть найдены путем их разбиения на треугольники.

Глава XVI

ПОДОБИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

§ 1. Пропорциональные отрезки

203. Пропорциональные отрезки. В п. 162 было показано, что, выбирая определенный масштаб измерения, т. е. единицу длины, мы сможем любому отрезку приписать вполне определенную длину, выражаемую некоторым числом, рациональным или иррациональным. Иначе говоря, длина отрезка по отношению к некоторой единице длины, выбранной за основную, может быть выражена десятичной дробью, конечной или бесконечной, периодической или непериодической. Длина отрезка является вместе с тем выражением отношения этого отрезка к единичному. Отношение двух произвольных отрезков можно определить как отношение их длин. Так, если при измерении одним и тем же масштабным отрезком один из данных отрезков имеет длину a, а другой b, то отношение отрезков равно a/b. При этом отношение отрезков не зависит от выбора масштабного отрезка, оно полностью определяется самими отрезками. Именно, при изменении масштабного отрезка в λ раз длины данных двух отрезков, выражавшиеся ранее числами a и b, выразятся теперь числами a/λ и b/λ, отношение же их сохранится: $\frac{a}{\lambda}:\frac{b}{\lambda}=a:b$.

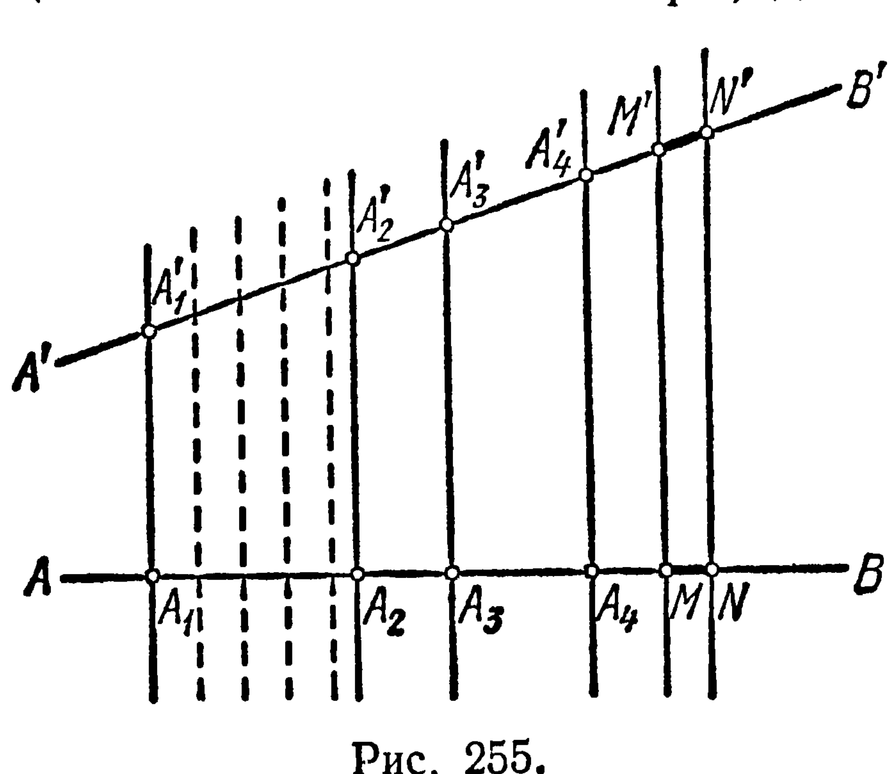


Рис. 255.

В п. 199 мы показали, что ряд параллельных прямых, отсекающих на данной прямой равные отрезки, отсекает равные отрезки и на произвольной другой прямой, не параллельной данной. Обобщим это свойство: рассмотрим ряд параллельных прямых и две произвольные прямые AB и $A'B'$, пересекаемые ими (рис. 255).

Теорема. *Отрезки, отсекаемые рядом параллельных прямых на двух произвольных не параллельных им прямых, пропорциональны.*

Допуская, что данные прямые образуют угол, это утверждение формулируют так:

Ряд параллельных прямых делит стороны угла на пропорциональные отрезки.

На рис. 255, следовательно, должно быть

$$\frac{A_1A_2}{A_1'A_2'}=\frac{A_2A_3}{A_2'A_3'}=\frac{A_3A_4}{A_3'A_4'}=\ldots \qquad (203.1)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждое из отношений (203.1) равно одному и тому же числу. Чтобы ввести в рассмотрение это число, отложим на одной из прямых, например на AB, масштабный отрезок MN и проведем через его концы прямые того же направления, что и наши секущие параллельные прямые. При этом на второй прямой $A'B'$ будет отсечен некоторый отрезок $M'N'$. Отношение $MN/M'N'$ будет некоторым вполне определенным числом, так как величина его не зависит от того, в каком месте на AB взят масштабный отрезок.

Покажем теперь, что любые отрезки, отсеченные на AB и $A'B'$ рядом параллельных прямых, относятся один к другому, как MN к $M'N'$, например: $\frac{A_1A_2}{A_1'A_2'}=\frac{MN}{M'N'}$. С этой целью будем измерять длину отрезка A_1A_2 масштабом MN, а длину отрезка $A_1'A_2'$ — масштабом $M'N'$. Пусть отрезок MN укладывается на отрезке A_1A_2 p_0 раз (но не укладывается p_0+1 раз). Проведя через концы уложенных на A_1A_2 отрезков, равных MN, прямые, параллельные остальным секущим, убедимся, что отрезок $M'N'$ уложится на отрезке $A_1'A_2'$ столько же раз, сколько отрезок MN на отрезке $M'N'$. Остатки отрезков A_1A_2 и $A_1'A_2'$ будем измерять десятыми долями отрезков MN и $M'N'$ соответственно и т. д. (этот и последующие шаги на рис. 255 не показаны). Видно, что процесс измерения приведет для A_1A_2 и $A_1'A_2'$ к одному и тому же числу $\lambda=p_0,p_1p_2\ldots$ Тогда

$$A_1A_2=\lambda MN, \quad A_1'A_2'=\lambda M'N',$$

и, следовательно, $\frac{A_1A_2}{A_1'A_2'}=\frac{MN}{M'N'}=\text{const}$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема верна как в случае пересекающихся, так и в случае параллельных прямых AB и $A'B'$.

Пусть теперь две пересекающиеся прямые рассечены парой параллельных прямых (рис. 256); тогда по нашей теореме $\frac{OB_1}{OA_1}=\frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. Выясним теперь, как относятся сами отрезки секущих

прямых, заключенные между сторонами угла A_2OB_2. Для этого проведем прямую B_1K, параллельную второй стороне угла OA_2. Тогда параллельные прямые B_1K и OA_2 отсекают на сторонах угла OB_2A_2 пропорциональные отрезки $\frac{KA_2}{B_2K}=\frac{B_1O}{B_2B_1}$. По свойствам производных пропорций находим, учитывая равенство $KA_2=B_1A_1$:

$$\frac{KA_2+B_2K}{KA_2}=\frac{B_1O+B_2B_1}{B_1O}, \quad \text{или} \quad \frac{A_2B_2}{A_1B_1}=\frac{OB_2}{OB_1}.$$

Доказано предложение:

Отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, пропорциональны отрезкам, отсекаемым этими прямыми на сторонах угла, считая от его вершины.

Задача 1. Разделить данный отрезок на части, пропорциональные нескольким другим данным отрезкам.

Решение. Пусть AB — данный отрезок, который мы должны разделить на части, пропорциональные отрезкам a, b, c, d. Проведем построение, сходное с тем, которое исследовалось для

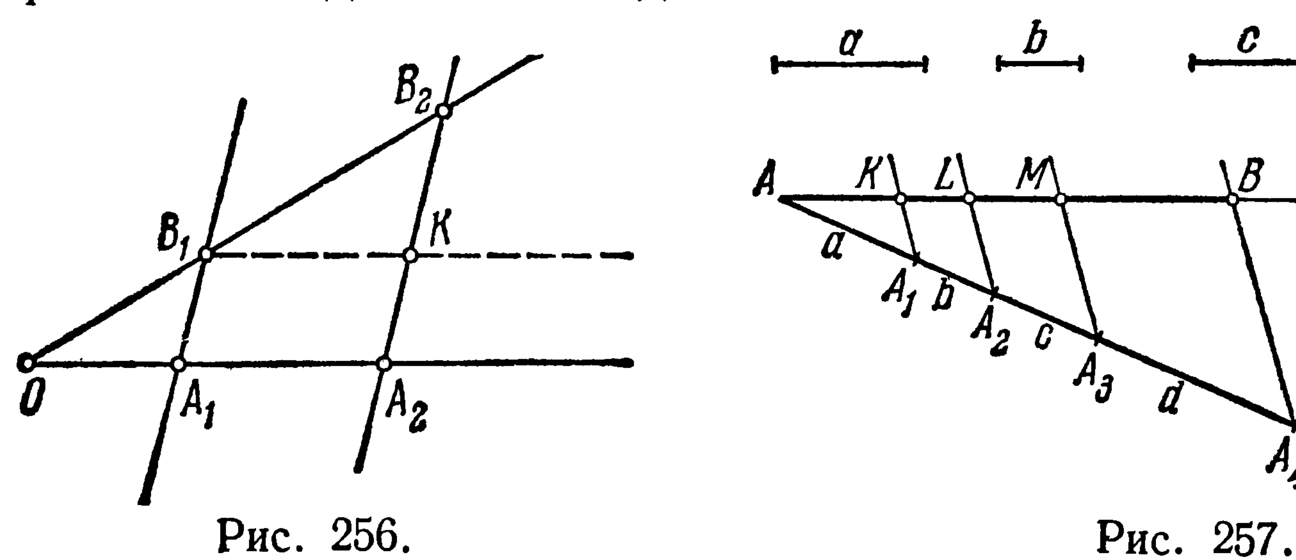


Рис. 256.

Рис. 257.

решения задачи о делении отрезка на равные части. Именно, через точку A проведем произвольный луч a под некоторым углом к отрезку AB и отложим на этом луче последовательно отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, равные заданным. Соединим конец последнего из этих отрезков с концом B отрезка AB и через остальные точки деления проведем прямые, параллельные A_4B. Эти прямые и рассекут AB на части, пропорциональные отрезкам a, b, c, d (рис. 257) в силу только что доказанной теоремы.

Задача 2. Найти отрезок, образующий с тремя данными отрезками пропорцию.

Решение. Пусть даны три отрезка a, b, c (рис. 258); требуется найти отрезок x такой, чтобы выполнялось соотношение $x:a=b:c$. Для отыскания такого отрезка возьмем произвольный угол и отложим на его стороне OA отрезки $OK=c$ и $KL=b$; на второй стороне OB угла отложим отрезок $OM=a$. Соединим точки M и K, а через L проведем прямую, параллельную этому

отрезку MK, до пересечения ее со второй стороной угла в точке N. Отрезок MN, заключенный между проведенными параллельными прямыми, и будет искомым. Длина его выражается формулой $x = ab/c$.

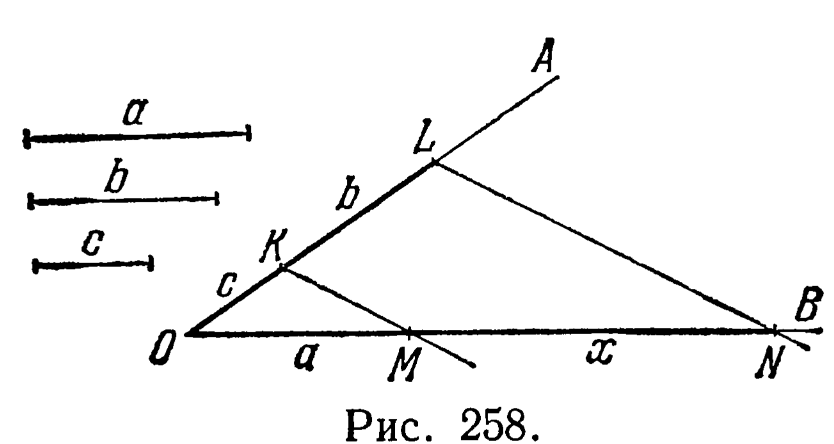


Рис. 258.

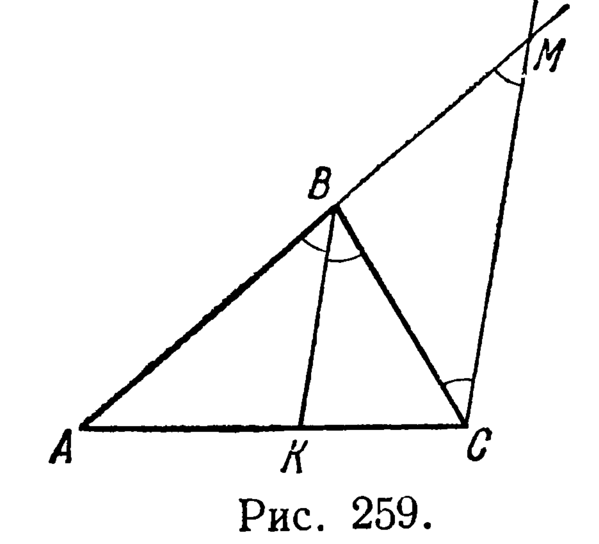


Рис. 259.

204. Свойства биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника.

Теорема. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 259) и биссектрису его угла B. Проведем через вершину C прямую CM, параллельную биссектрисе BK, до пересечения в точке M с продолжением стороны AB. Так как BK — биссектриса угла ABC, то $\angle ABK = \angle KBC$. Далее, $\angle ABK = \angle BMC$, как соответственные углы при параллельных прямых, и $\angle KBC = \angle BCM$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда $\angle BCM = \angle BMC$, и поэтому $\triangle BMC$ — равнобедренный, откуда $BC = BM$. По теореме о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем $AK:KC = AB:BM$, а ввиду $BM = BC$ получим $AK:KC = AB:BC$, что и требовалось доказать.

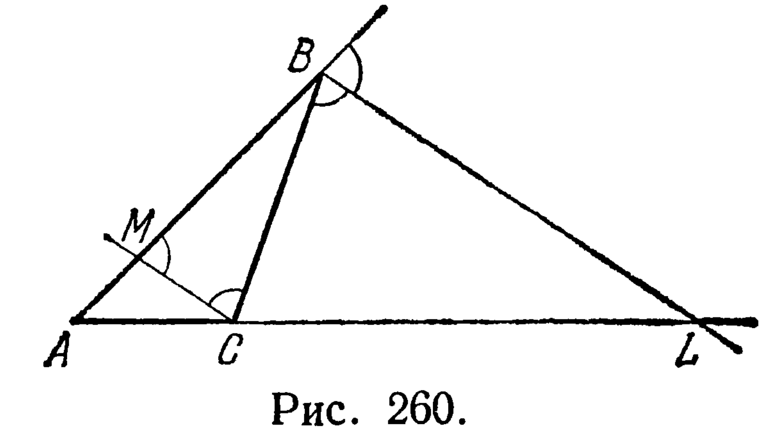


Рис. 260.

Биссектриса внешнего угла B треугольника ABC (рис. 260) обладает аналогичным свойством: отрезки AL и CL от вершин A и C до точки L пересечения биссектрисы с продолжением стороны AC пропорциональны сторонам треугольника:

$$AL:CL = AB:BC.$$

Это свойство доказывается так же, как и предыдущее: на рис. 260 проведена вспомогательная прямая CM, параллельная биссектрисе BL. Читатель сам убедится в равенстве углов BMC и BCM, а значит, и сторон BM и BC треугольника BMC, после чего требуемая пропорция получится сразу.

Можно говорить, что и биссектриса внешнего угла делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежа-

щим сторонам; нужно лишь условиться допускать «внешнее деление» отрезка. Точка L, лежащая вне отрезка AC (на его продолжении), делит его внешним образом в отношении $m:n$, если $AL:CL=m:n$. Итак, биссектрисы угла треугольника (внутреннего и внешнего) делят противолежащую сторону (внутренним и внешним образом) на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

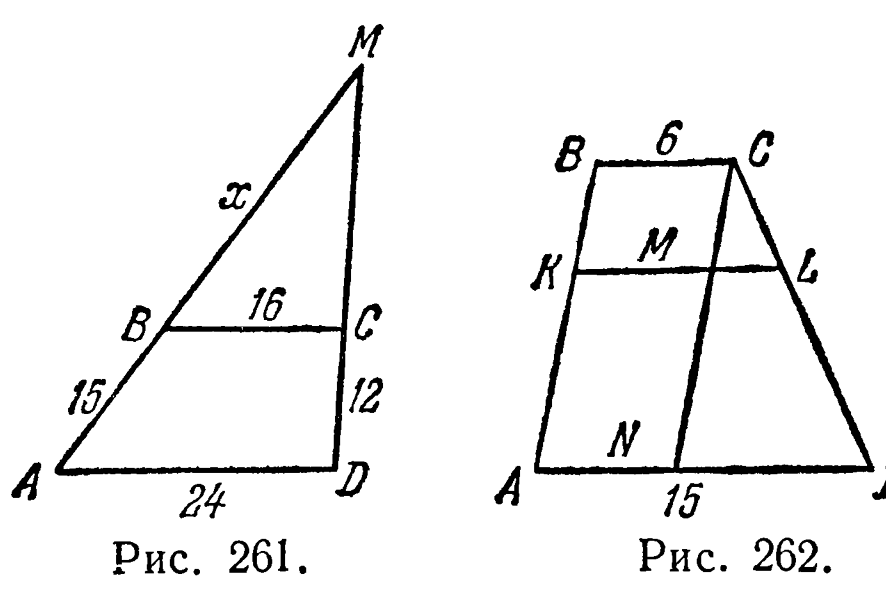


Рис. 261. Рис. 262.

Задача 1. Боковые стороны трапеции равны 12 и 15, основания равны 24 и 16. Найти стороны треугольника, образованного большим основанием трапеции и ее продолженными боковыми сторонами.

Решение. В обозначениях рис. 261 имеем для отрезка x, служащего продолжением боковой стороны $AB=15$, пропорцию $x:(x+15)=16:24$, откуда легко находим $x=30$, $AM=45$. Аналогичным способом определяем вторую боковую сторону треугольника $DM=36$. Третья сторона совпадает с большим основанием: $AD=24$.

Задача 2. Основания трапеции равны 6 и 15. Чему равна длина отрезка, параллельного основаниям и делящего боковые стороны в отношении $1:2$, считая от вершин малого основания?

Решение. Обратимся к рис. 262, изображающему трапецию. Через вершину C малого основания проведем линию, параллельную боковой стороне AB, отсекающую от трапеции параллелограмм. Так как $CL:LD=1:2$, то $CL:CD=1:3$ и $ML:ND=$ $=CL:CD=1:3$, отсюда находим $ML=3$. Поэтому весь неизвестный отрезок KL равен $6+3=9$. Заметим, что для решения этой задачи нам не нужно знать боковых сторон трапеции.

Задача 3. Биссектриса внутреннего угла B треугольника ABC рассекает сторону AC на отрезки $AK=5$, $KC=7$; на каком расстоянии от вершин A и C пересечет продолжение AC биссектриса внешнего угла B?

Решение. Каждая из биссектрис угла B делит AC в одном и том же отношении, но одна внутренним, а другая внешним образом. Обозначим через L точку пересечения продолжения AC и биссектрисы внешнего угла B. Так как $AK<KC$, то и $AL<LC$. Обозначим неизвестное расстояние AL через x, тогда $LC=AL+AC=x+12$, и мы будем иметь пропорцию $\frac{x}{x+12}=\frac{5}{7}$, решение которой $x=30$ и дает нам искомое расстояние $AL=30$; $CL=42$.

Рисунок выполните самостоятельно.

Упражнения

1. Трапеция с основаниями 8 и 18 разбита прямыми, параллельными основаниям, на шесть полос равной ширины. Найти длины отрезков прямых, разбивающих трапецию на полосы.

2. Периметр треугольника равен 32. Биссектриса угла A делит сторону BC на части, равные 5 и 3. Найти длины сторон треугольника.

3. Основание равнобедренного треугольника равно a, боковая сторона b. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов основания с боковыми сторонами.

§ 2. Подобное преобразование фигур (гомотетия)

205. Определение гомотетичных фигур. Для произвольного плана той или иной местности, для фотографии, сделанной с чертежа, для репродукции с картины художника, для модели корабля и т. п. характерно, что они похожи на оригинал в том смысле, что верно передают форму предмета, но с изменением его размеров в определенное число раз. По такому изображению мы легко судим о натуре: подлинные размеры восстанавливаются умножением на некоторый определенный постоянный множитель k (масштаб изображения), углы могут быть измерены непосредственно, они не претерпевают изменения по сравнению с натурой.

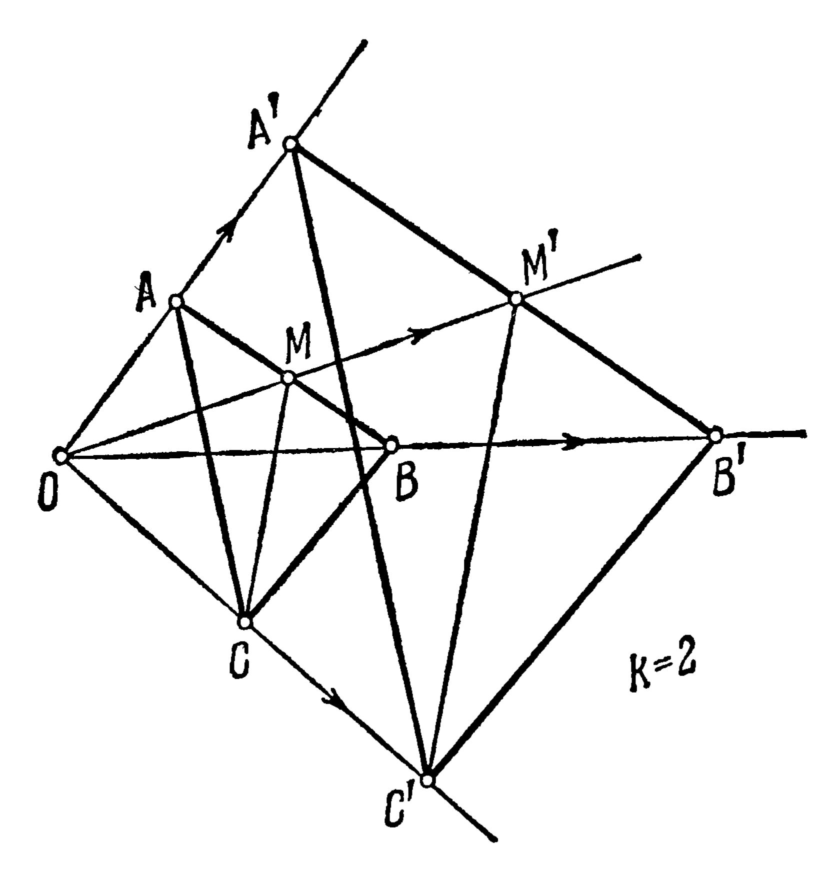


Рис. 263.

В геометрии преобразование фигур такого характера называется *преобразованием подобия*. Точное определение мы дадим несколько ниже.

Рассмотрим какую-либо фигуру, расположенную в данной плоскости (на рис. 263 взят треугольник ABC с проведенной в нем медианой CM), и произвольную точку O, лежащую в той же плоскости. Проведем из точки O лучи, соединяющие ее со всеми точками данной фигуры. Выберем затем некоторое положительное число k и каждой точке данной фигуры поставим в соответствие новую точку по следующему методу. Пусть A — одна из точек данной фигуры. На луче OA строим точку A' такую, что $OA':OA=k$, т. е. отстоящую от начала луча в k раз дальше, чем A («дальше» превратится, по существу, в «ближе», если $k<1$). На рис. 263 мы взяли $k=2$. Проделав эту операцию с каждой точкой, получим новую фигуру. Пока мы изобразили ряд ее точек, отвечающих вершинам треугольника и середине его

стороны AB. Строго говоря, мы еще не знаем, будут ли точки, лежащие до преобразования на одной прямой (например, B, M, A), лежать на одной прямой после преобразования. На этот и другие сходные вопросы мы вскоре дадим ответ, а пока введем необходимые определения.

Определение. Преобразование фигуры, при котором каждой ее точке A ставится в соответствие точка A', лежащая на луче, соединяющем A с некоторой выбранной фиксированной точкой O, и такая, что OA' и OA находятся в заданном постоянном отношении k:

$$OA':OA = k,$$

называется *преобразованием подобия (гомотетией) первого рода с центром O и коэффициентом подобия k.*

Если $k < 1$, то точки фигуры приближаются к центру; если $k > 1$, то удаляются от него. Если $k = 1$, то фигура совершенно не изменяется, все ее точки остаются на месте: формально можно считать, что она претерпевает *тождественное преобразование.*

Можно также строить точки преобразованной фигуры не на лучах, ведущих в них из O, а на продолжениях этих лучей (рис. 264). Такое преобразование, в отличие от описанного ранее,

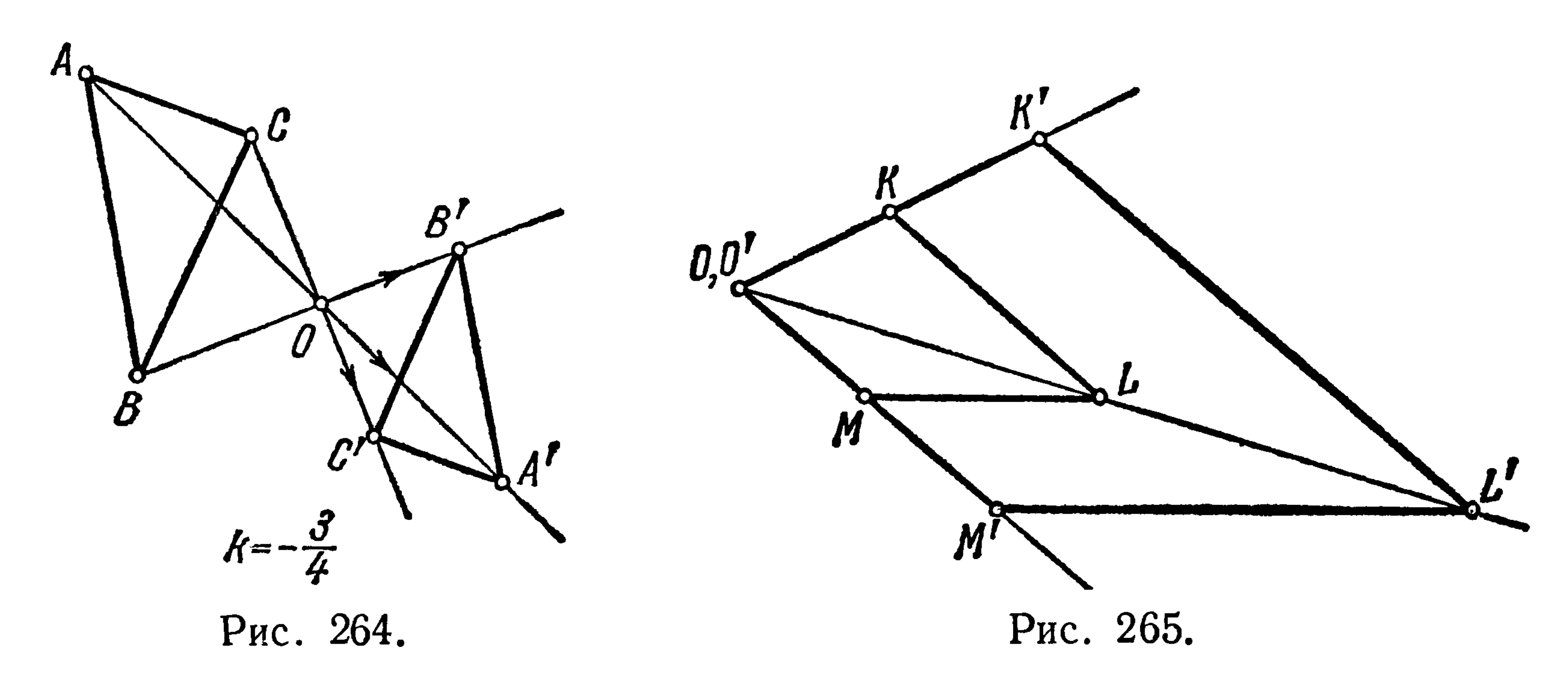


Рис. 264. Рис. 265.

называют *преобразованием подобия второго рода.* Удобно считать, что в этом случае коэффициент подобия равен отрицательному числу: $k < 0$; такое условие выглядит естественно, так как мы привыкли, что изменение знака связано с изменением направления на прямой, и позволяет не различать преобразований подобия первого и второго рода, говоря просто о преобразованиях подобия с коэффициентом k (положительным или отрицательным). Не исключается случай, когда центр подобия сам принадлежит данной фигуре, как одна из ее точек (рис. 265); в этом случае по определению полагают, что образ O' точки O совпадает с O.

206. Свойства преобразования подобия. Пусть рассматривается некоторая фигура и фигура, полученная из нее преобразованием подобия (центр O, коэффициент k, см. рис. 263). Установим основные свойства преобразования подобия.

1. *Преобразование подобия устанавливает между точками фигур взаимно однозначное соответствие.*

Это значит, что при заданном центре O и коэффициенте подобия k всякой точке первой фигуры отвечает единственным образом определенная точка второй фигуры и что, обратно, всякая точка второй фигуры получена преобразованием единственной точки первой фигуры.

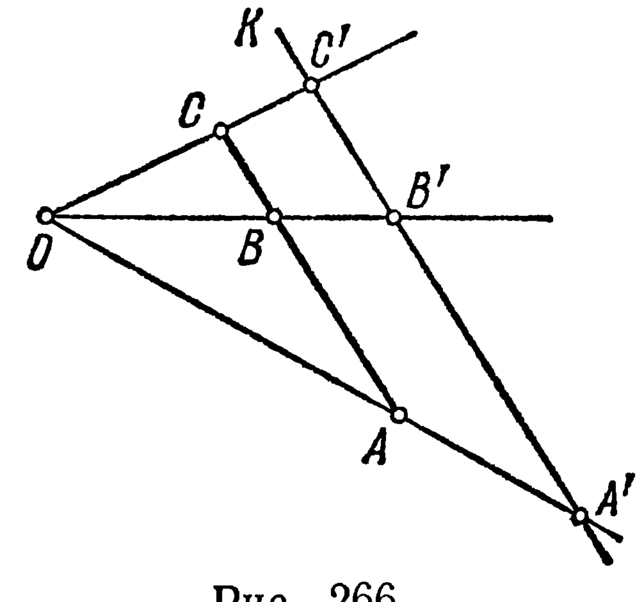


Рис. 266.

Доказательство. То, что любой точке A исходной фигуры отвечает определенная точка A' преобразованной фигуры, следует из определения, указывающего точный способ преобразования. Легко видеть, что, и обратно, преобразованная точка A' определяет исходную точку A однозначно: обе точки должны лежать на одном луче при $k > 0$ и на противоположных лучах при $k < 0$, и отношение их расстояний до начала луча O известно: $OA' : OA = k$ ($OA' : OA = |k|$ при $k < 0$). Поэтому точка A, лежащая на известном нам расстоянии от начала O, определена единственным образом.

Следующее свойство можно назвать свойством взаимности.

2. *Если некоторая фигура получена из другой фигуры преобразованием подобия с центром O и коэффициентом подобия k, то, и обратно, исходная фигура может быть получена преобразованием подобия из второй фигуры с тем же центром подобия и коэффициентом подобия $k_1 = 1/k$.*

Это свойство, очевидно, следует хотя бы из рассуждений, приведенных при доказательстве свойства 1. Читателю остается проверить, что соотношение $k_1 = 1/k$ верно для обоих случаев: $k < 0$ и $k > 0$.

Фигуры, получаемые одна из другой преобразованием подобия, называют *гомотетичными* или *подобно расположенными*.

3. *Любые точки, лежащие на одной прямой, преобразуются при гомотетии в точки, лежащие на одной прямой, параллельной исходной (совпадающей с ней, если она проходит через O).*

Доказательство. Случай, когда прямая проходит через O, ясен; любые точки этой прямой переходят в точки этой же прямой. Рассмотрим общий случай: пусть (рис. 266) A, B, C — три точки основной фигуры, лежащие на одной прямой; пусть A' — образ точки A при преобразовании подобия. Проведем $A'K \parallel AC$;

покажем, что образы B и C также лежат на $A'K$. Действительно, проведенная прямая и прямая AC отсекают на OA, OB, OC пропорциональные части: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$. Таким образом, видно, что точки B', C', лежащие на лучах OB и OC и на прямой $A'K$ (аналогично получится и при $k < 0$), являются соответственными для B и C. Можно сказать, что при преобразовании подобия всякая прямая, не проходящая через центр подобия, преобразуется в прямую, параллельную себе.

Из сказанного уже видно, что всякий отрезок преобразуется также в отрезок.

4. *При преобразовании подобия отношение любой пары соответствующих отрезков равно одному и тому же числу — коэффициенту подобия.*

Доказательство. Следует различать два случая.

1) Пусть данный отрезок AB не лежит на луче, проходящем через центр подобия (рис. 266). В этом случае данные два отрезка — исходный AB и ему подобно соответствующий $A'B'$ — суть отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла AOB. Применяя свойство п. 203, находим $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = k$, что и требовалось доказать.

O B A B' A'

Рис. 267.

2) Пусть данный отрезок, а значит, и ему подобно соответствующий лежат на одной прямой, проходящей через центр подобия (отрезки AB и $A'B'$ на рис. 267). Из определения подобного преобразования имеем $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$, откуда, образуя производную пропорцию, находим $\frac{OA'-OB'}{OA-OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$, что и требовалось доказать.

5. *Углы между соответствующими прямыми (отрезками) подобно расположенных фигур равны.*

Доказательство. Пусть $\angle BCA$ — данный угол и $\angle B'C'A'$ — угол, соответствующий ему при преобразовании подобия с центром O и некоторым коэффициентом k. На рис. 263, 264 представлены два варианта: $k > 0$ и $k < 0$. В любом из этих случаев по свойству 3 стороны углов попарно параллельны. При этом в одном случае обе пары сторон одинаково направлены, во втором — обе противоположно направлены. Таким образом, по свойству углов с параллельными сторонами углы равны.

Итак, доказана

Теорема 1. *У подобно расположенных фигур любые соответствующие пары отрезков находятся в одном и том же постоянном отношении, равном коэффициенту подобия; любые пары соответствующих углов равны.*

Таким образом, из двух подобно расположенных фигур любая может считаться изображением другой в некотором выбранном масштабе.

Пример 1. Построить фигуру, подобно расположенную с квадратом $ABCD$ (рис. 268) при данном центре подобия O и коэффициенте подобия $k={}^2/_3$.

Решение. Соединяем одну из вершин квадрата (например, A) с центром O и строим точку A' такую, что $OA':OA={}^2/_3$. Эта точка и будет соответствовать A в преобразовании подобия. Дальнейшее построение удобно провести так: соединим остальные вершины квадрата с O и через A' проведем прямые, параллельные соответствующим сторонам AB и AD. В точках их пересечения с OB и OD и будут помещаться вершины B' и D'. Так же проводим $B'C'$ параллельно BC и находим четвертую вершину C'. Почему $A'B'C'D'$ также является квадратом? Обосновать самостоятельно!

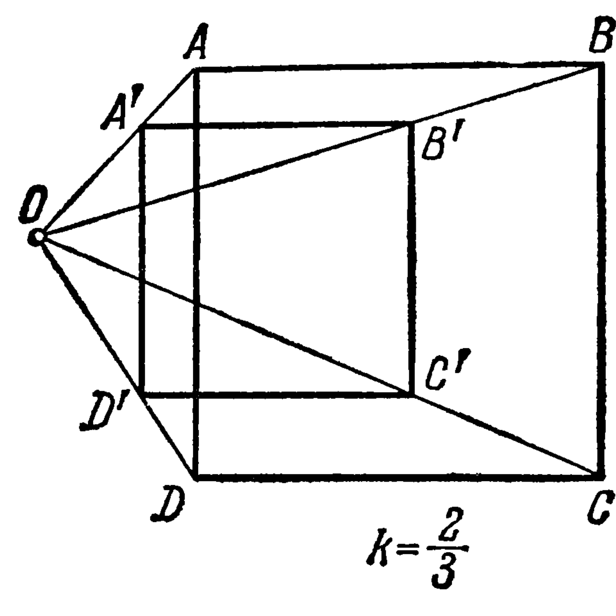


Рис. 268.

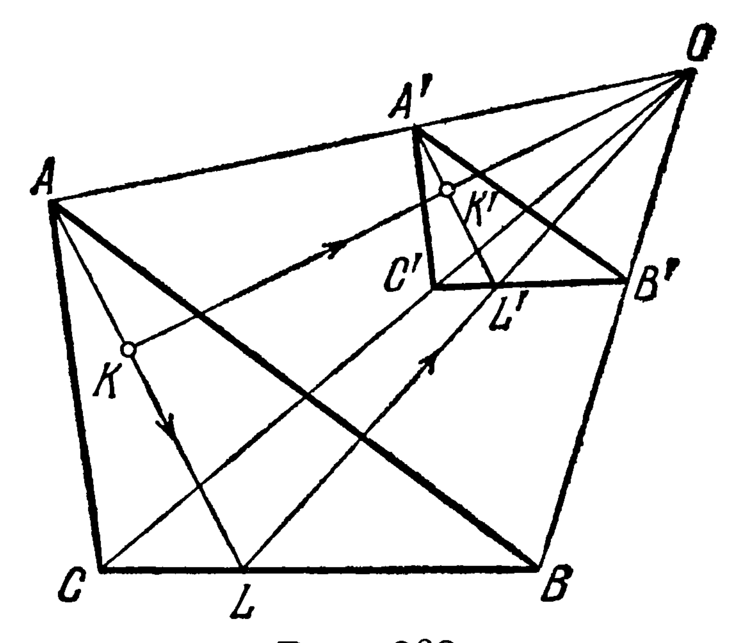


Рис. 269.

Пример 2. На рис. 269 показана пара подобно расположенных треугольных пластинок. На одной из них изображена точка K. Построить соответствующую точку на второй.

Решение. Соединим K с одной из вершин треугольника, например с A. Полученная прямая пересечет сторону BC в точке L. Находим соответствующую точку L' как пересечение OL и $B'C'$ и строим искомую точку K' на отрезке $A'L'$, пересекая его прямой OK.

Теорема 2. *Фигура, гомотетичная окружности (кругу), есть снова окружность (круг). Центры кругов подобно соответствуют.*

Доказательство. Пусть C — центр окружности Ф радиуса R (рис. 270), O — центр подобия. Коэффициент подобия обозначим через k. Пусть C' — точка, подобно соответствующая центру C окружности Ф. (Мы еще не знаем, будет ли она сохранять роль центра!) Рассмотрим всевозможные радиусы окружности Ф: CA, CB, ...; все они при преобразовании подобия

перейдут в отрезки, параллельные себе и имеющие равные длины $R'=kR$. Таким образом, все концы преобразованных радиусов разместятся вновь на одной окружности Ф′ с центром C' и радиусом R', что и требовалось доказать.

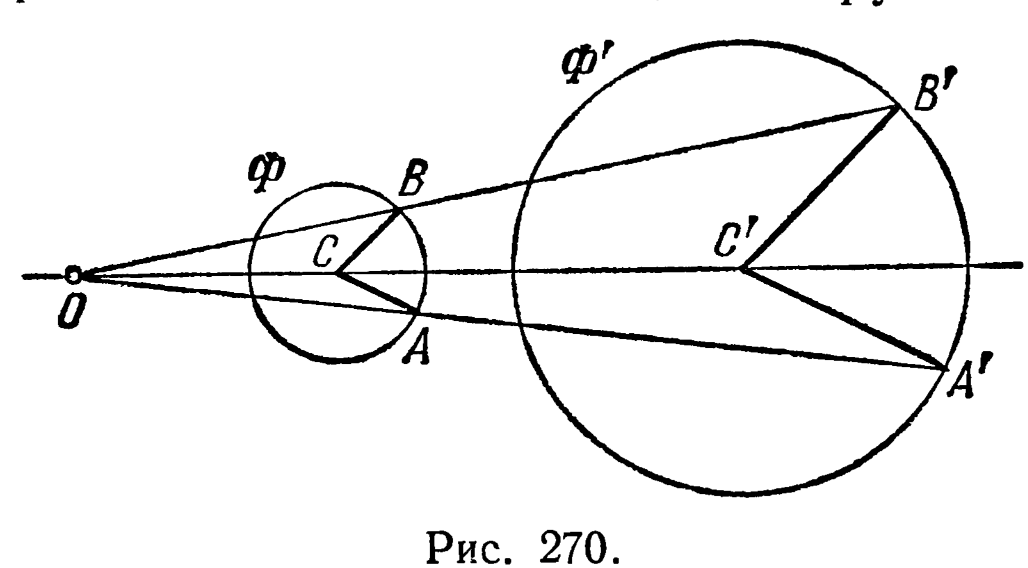


Рис. 270.

Обратно, *любые две окружности находятся в гомотетичном соответствии* (в общем случае даже двояком, с двумя разными центрами).

Действительно, проведем любой радиус первой окружности (радиус CM на рис. 271) и оба параллельных ему радиуса второй окружности. Точки пересечения линии центров CC' и прямых, соединяющих конец радиуса CM с концами радиусов, параллельных ему, т. е. точки O' и O'' на рис. 271, могут быть приняты за центры гомотетии (первого и второго рода). В случае концентрических окружностей имеется единственный центр

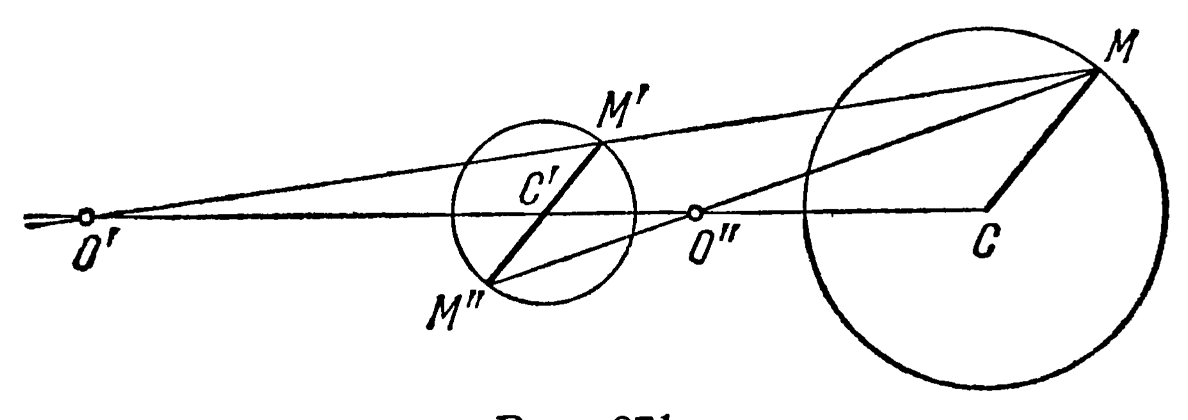


Рис. 271.

гомотетии — общий центр окружностей; равные окружности находятся в соответствии гомотетии с центром в середине отрезка CC', $k=-1$.

§ 3. Общее подобное соответствие фигур

207. Подобные фигуры. Рассмотрим две фигуры (ломаные линии) $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (рис. 272), полученные одна из другой преобразованием подобия (гомотетии) с центром преобразования O и коэффициентом подобия k. В п. 206 мы отметили основные свойства таких фигур: соответствующие отрезки у них находятся в постоянном отношении k, а соответственные углы равны.

Представим себе теперь, что мы поместили одну из наших фигур, например $A'B'C'D'$, в новое положение $A''B''C''D''$. Можно по-прежнему рассматривать соответствие между точками (отрезками, углами) этой фигуры и фигуры $ABCD$, оставшейся в

исходном положении. Так как при перемещении размеры фигуры не изменяются, то и теперь отрезки $A''B''$ и AB, $B''C''$ и BC и т. д. пропорциональны:

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''D''}{CD} = k,$$

а соответственные углы равны: $\angle A''B''C'' = \angle ABC$, $\angle B''C''D'' = \angle BCD$. Однако другие свойства, такие, как принадлежность соответственных точек лучам, проходящим через центр подобия, или параллельность соответствующих отрезков фигур, уже не

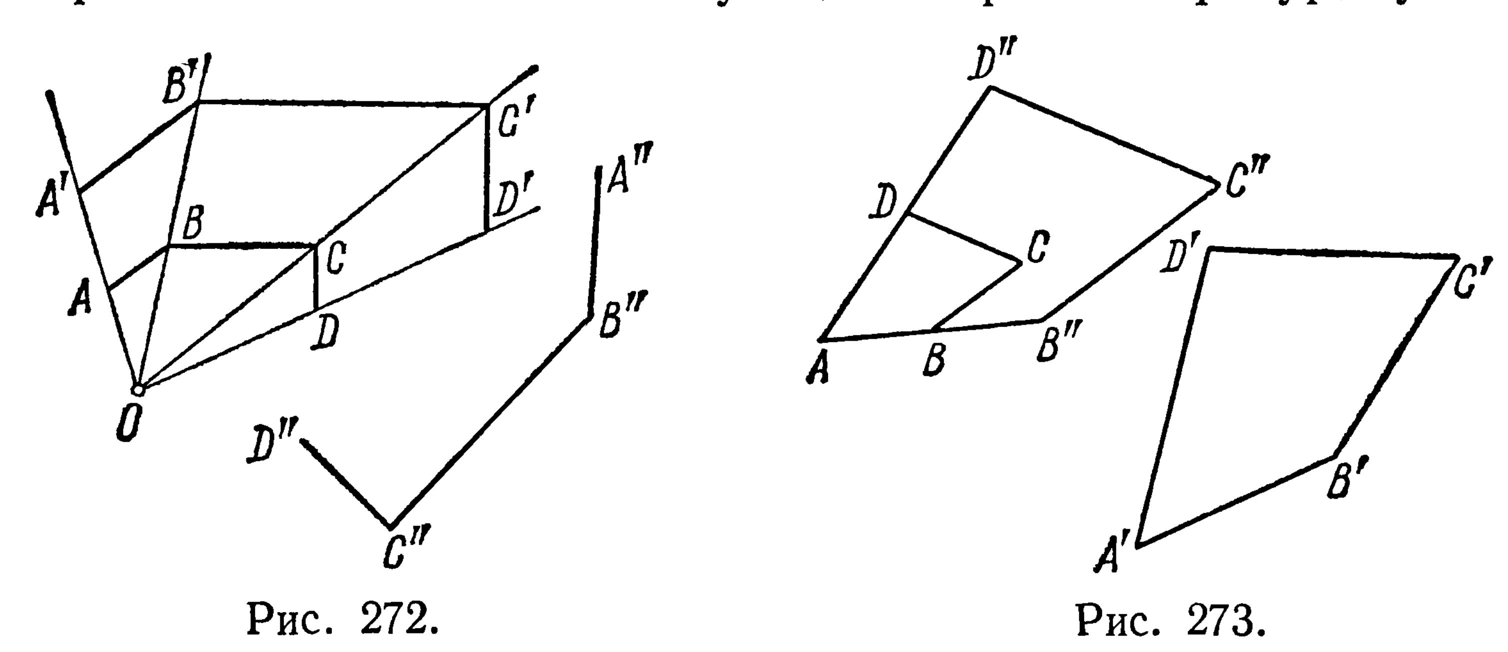


Рис. 272. Рис. 273.

имеют места; они нарушены перемещением $A'B'C'D'$ в новое положение. Если, однако, вернуть фигуру $A''B''C''D''$ в ее исходное положение $A'B'C'D'$, то все эти свойства вновь будут верны; это подводит нас к следующему определению.

Определение. Две фигуры называются *подобно соответствующими*, если между их точками (и, следовательно, отрезками, углами) установлено такое взаимно однозначное соответствие, которое при надлежащем перемещении одной из фигур превратится в соответствие гомотетии.

Оказывается, что свойства подобных фигур, выделенные нами как основные, определяют понятие подобия; они могут быть приняты за определение подобия, равносильное данному, как это принято в некоторых учебниках. Именно, справедлива

Теорема. *Если между точками двух фигур установлено соответствие, при котором отрезки, соединяющие соответственные точки, находятся в постоянном отношении и соответственные углы равны, то такие фигуры подобны.*

Доказательство. Достаточно переместить одну фигуру в положение, гомотетичное другой. Пусть, например, у четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (рис. 273) сходно обозначенные стороны пропорциональны:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = k,$$

и соответственные углы равны.

Переместим четырехугольник $A'B'C'D'$ в новое положение $A''B''C''D''$ так, чтобы вершина его A'' совместилась с A, сторона $A''B''$ была направлена вдоль стороны AB и сторона $A''D''$ — вдоль стороны AD, что возможно в силу равенства соответственных углов.

Мы утверждаем, что данные четырехугольники находятся теперь в соответствии гомотетии. В самом деле, для вершин B, B'' и D, D'' их гомотетичное соответствие очевидно. Рассмотрим пару вершин C и C'' и покажем, что они лежат на одном луче AC и притом так, что $AC''/AC=k$. В самом деле, если провести луч AC, то он пересечет прямую $D''C''$ в некоторой точке M (на самом деле в C''!), причем будем иметь $D''M/DC=k$; так как в силу пропорциональности сторон $D''C''/DC=k$, то точки M и C'' совпадают, что и требовалось доказать.

Признаки подобия треугольников

1. *Если две пары сторон треугольников пропорциональны, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть стороны a, b треугольника ABC пропорциональны сторонам a', b' треугольника $A'B'C'$. Преобразуем треугольник ABC подобно с коэффициентом подобия $k=a'/a=b'/b$. Тогда у вновь полученного треугольника $A''B''C''$ и треугольника $A'B'C'$ будут две пары равных сторон и равные углы, заключенные между равными сторонами. Треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ равны по признаку равенства треугольников, исходные же треугольники подобны.

2. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны.*

Доказательство. Один из треугольников преобразуем подобно так, чтобы одна из его сторон стала равна соответствующей стороне другого данного треугольника. Тогда уравниваются все три пары сторон, и второй треугольник будет равен преобразованному; исходные же треугольники подобны.

3. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого, то треугольники подобны (конечно, при этом окажутся равными и третьи углы треугольников).*

Доказательство. Преобразуем один из треугольников подобно так, чтобы одна его сторона стала равна соответствующей стороне второго треугольника. Далее рассуждаем аналогично предыдущему.

Замечание. Для прямоугольных треугольников достаточно уже любого из следующих условий: 1) равенства одной пары острых углов, 2) пропорциональности катетов, 3) пропорциональности одной пары катетов и гипотенуз.

Рассмотрим некоторые приложения понятия подобия. Ранее указывалось (п.187), что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делят друг друга в отношении 2:1, считая от вершины. Рассмотрим рис. 274, где изображены две медианы CM_1 и AM_2 треугольника ABC и средняя линия M_1M_2, соединяющая концы этих медиан. Треугольники AOC и M_1OM_2 подобны, так как имеют равные углы. Коэффициент подобия $k=\frac{M_1M_2}{AC}=\frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{M_1O}{OC}=\frac{1}{2}$; $\frac{M_2O}{OA}=\frac{1}{2}$, т. е. медианы действительно делятся в отношении 2:1. Отсюда следует, что и третья медиана, которая должна делить две другие медианы в том же отношении, проходит через ту же точку O.

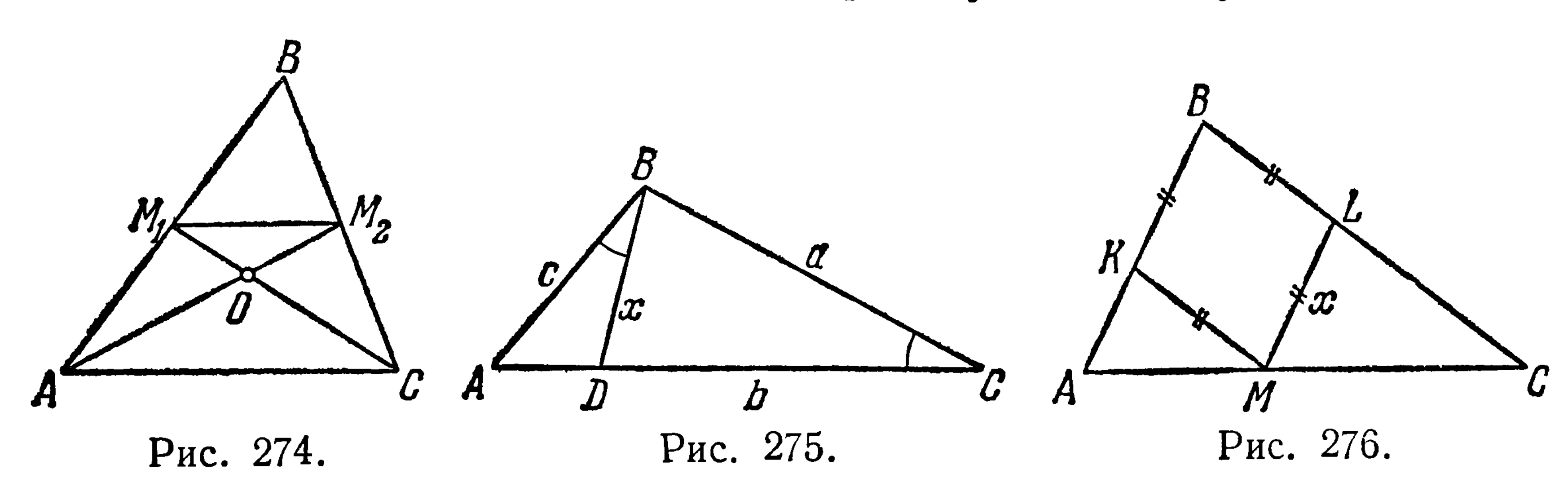


Рис. 274. Рис. 275. Рис. 276.

Задача 1. В треугольнике ABC угол B больше угла C. Линия BD проведена от вершины B к стороне AC так, что образует со стороной AB угол, равный $\angle C$. Найти отрезок BD, зная стороны треугольника a, b, c (рис. 275).

Решение. Весь треугольник ABC подобен треугольнику ABD, отсеченному от него прямой BD, так как угол A у них общий, а углы ACB и ABD равны по построению. Теперь пишем пропорцию $x:c=a:b$, откуда $x=ac/b$.

Задача 2. В треугольник вписан ромб так, как показано на рис. 276. Даны стороны треугольника $AB=c$ и $BC=a$, найти сторону ромба.

Решение. Из подобия треугольников ABC и MLC находим $x:c=(a-x):a$, откуда неизвестная сторона x ромба определяется по формуле $x=ac/(a+c)$.

208. Периметры и площади подобных треугольников. Если два треугольника подобны с коэффициентом подобия k, то стороны их находятся в отношении k, т. е. $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k$. Отсюда получается $\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}=k$, т. е. *периметры подобных треугольников относятся, как соответствующие стороны.*

При подобном преобразовании фигуры все углы сохраняются, отрезки изменяются в одно и то же число раз. Поэтому высота h_a треугольника при преобразовании гомотетии с коэффициен-

том k перейдет в высоту треугольника $h'_{a'}$. Для площади этого треугольника будем иметь

$$S = \frac{1}{2} h'_{a'} a' = \frac{1}{2} k h_a k a = k^2 S, \qquad (208.1)$$

т. е. при преобразовании подобия площадь умножается на квадрат коэффициента подобия. Иначе говоря:

Площади подобных треугольников (и вообще *любых фигур*) *относятся, как квадраты их линейных размеров.*

Этот факт можно было бы предвидеть с более общей точки зрения. Именно, единица измерения площадей — квадрат со стороной единица — переходит в квадрат со стороной k и площадью k^2; в конечном счете площадь любой фигуры (это верно даже и для фигур с криволинейным контуром) измеряется с помощью разложения ее на квадраты (первого и последующих разбиений), и так как все эти квадраты меняют величину площади в k^2 раз, то это же верно и для фигуры произвольного вида.

209. Применение подобия к решению задач на построение.

Задача 1. Построить треугольник, зная два его угла и периметр.

Решение. Знание углов треугольника уже определяет его с точностью до преобразования подобия. Поэтому для решения задачи строим любой треугольник $A_1B_1C_1$ с данными углами (рис. 277). Остается подобно преобразовать треугольник $A_1B_1C_1$

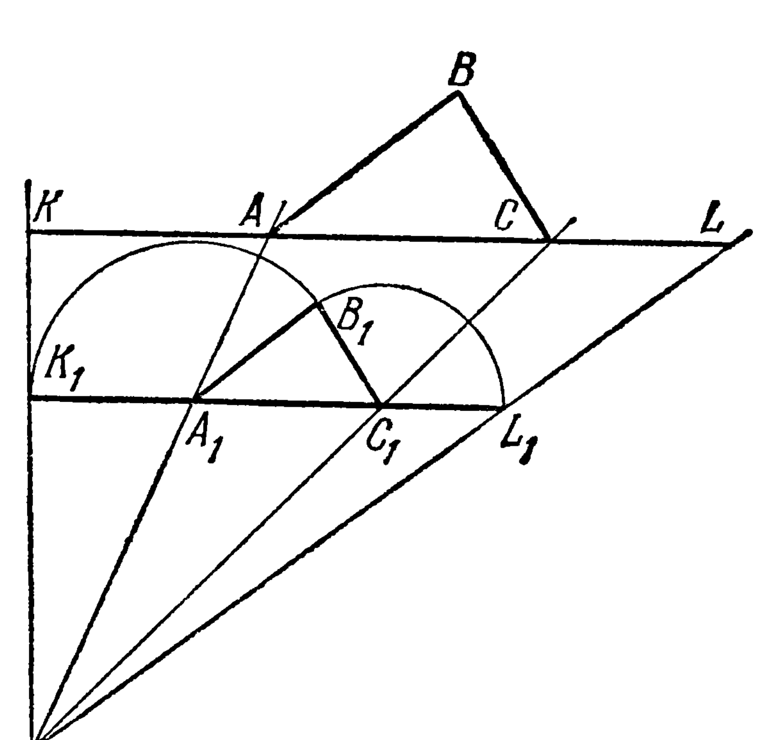


Рис. 277.

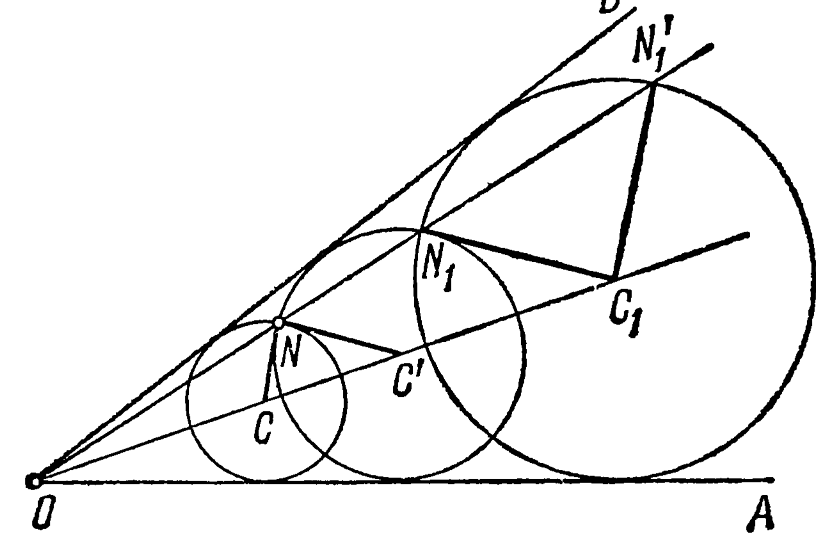


Рис. 278.

так, чтобы периметр его стал равен данной величине. Для этого отложим стороны его A_1B_1 и C_1B_1 на продолжениях стороны A_1C_1; отрезок K_1L_1 будет равен периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Возьмем любой отрезок KL, параллельный отрезку K_1L_1, но равный заданному периметру. Соединим концы обоих параллельных отрезков и примем точку O пересечения линий KK_1 и LL_1 за центр подобия. Построение вершин A и C искомого треугольника видно из рис. 277, стороны его AB и CB параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

В случае $KK_1 \parallel LL_1$ треугольник $A_1B_1C_1$ — уже искомый.

Задача 2. Дан угол, образованный лучами OA и OB, и точка N внутри этого угла. Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку N (рис. 278).

Решение. Окружность, касающаяся сторон угла, должна иметь центр на биссектрисе этого угла. Возьмем на этой биссектрисе произвольную точку C_1 и построим окружность с центром в C_1, касающуюся сторон угла (ее радиус просто равен расстоянию точки C_1 от сторон угла). Если теперь преобразовать эту окружность подобно с центром подобия в вершине угла O, то вновь получится окружность с центром на биссектрисе; такая окружность снова будет касаться сторон угла, так как ее радиус, ведущий в точку касания, перейдет в силу сохранения углов в радиус, перпендикулярный к стороне угла. Остается обеспечить выполнение второго условия: преобразованная окружность должна пройти через точку N. Отсюда вытекает решение задачи. Проведем луч ON до пересечения с окружностью в точках N_1 и N_1' и построим ее радиусы C_1N_1 и C_1N_1', ведущие в эти точки. Через данную точку N проведем прямые NC и NC', параллельные этим радиусам; точки их пересечения C, C' с биссектрисой и дают возможные положения центра искомой окружности. Задача имеет два решения. Как изменится решение, если точка N лежит на биссектрисе угла?

Упражнения

1. Периметр треугольника равен 10 *см*, а его площадь 3 *см*^{2}. Чему равен периметр подобного треугольника, если его площадь 12 *см*^{2}?

2. Доказать, что равнобедренные треугольники, имеющие равные углы при вершине, подобны.

3. Построить треугольник, подобный данному и вписанный в окружность данного радиуса.

4. В данный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы одна его сторона лежала на стороне BC треугольника, а две вершины находились на двух других сторонах треугольника.

Глава XVII

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ И КРУГЕ

§ 1. Углы и пропорциональные отрезки в круге

210. Углы с вершиной на окружности. Рассмотрим угол, вписанный в окружность, т. е. угол, образованный двумя ее хордами, исходящими из одной точки окружности (рис. 279).

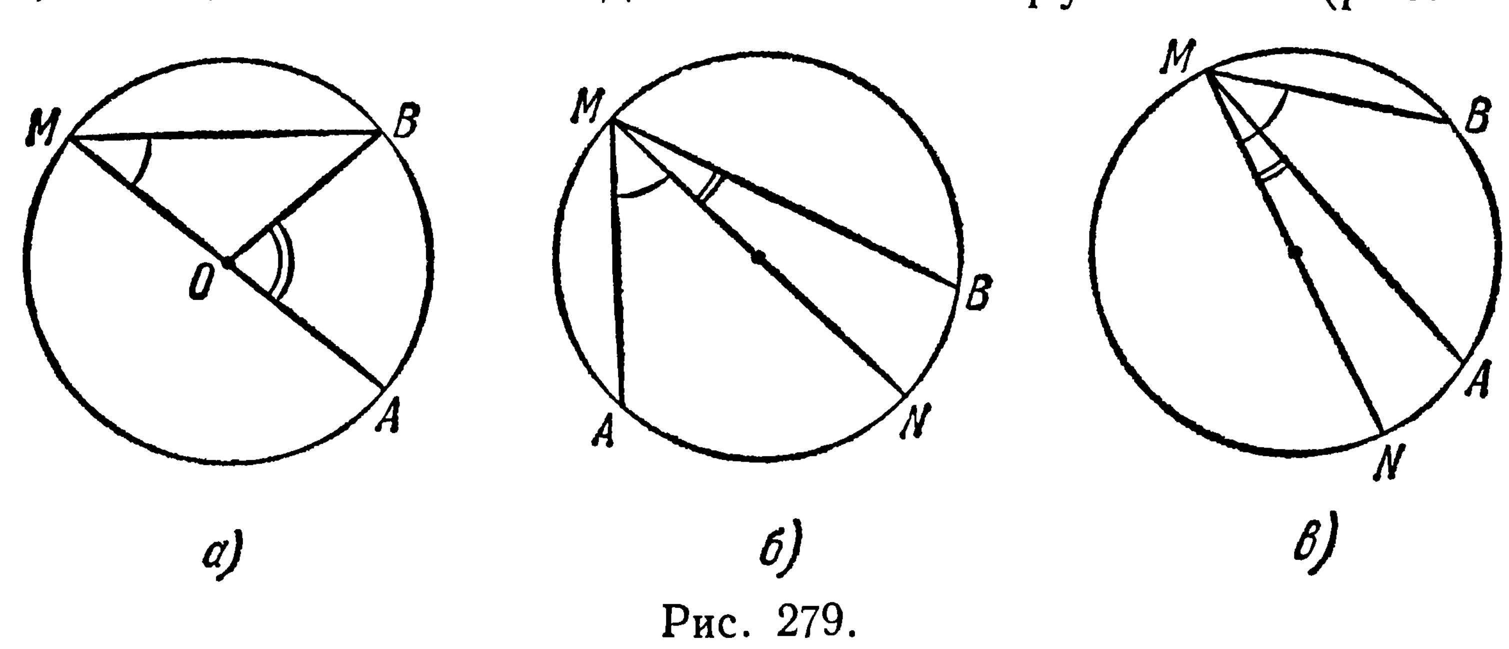


Рис. 279.

О таком угле AMB с вершиной M на окружности говорят, что он *опирается* на дугу $\breve{AB}$ (не содержащую вершины угла!). Справедлива следующая

Теорема. *Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Доказательство удобно провести отдельно для следующих трех случаев:

1) Одна из хорд — сторона угла — проходит через центр окружности (рис. 279, *а*). Проведя радиус OB, увидим, что центральный угол AOB, опирающийся на ту же дугу $\breve{AB}$, что и заданный, является внешним углом равнобедренного треугольника BOM и потому равен удвоенному углу AMB: $\angle AOB = 2\angle AMB$; отсюда видно, что $\angle AMB$ измеряется половиной дуги $\breve{AB}$.

2) Пусть теперь центр окружности лежит внутри заданного угла, как на рис. 279, *б*. Диаметр, проведенный через вершину

данного угла, разобьет его на две части. Для каждой из них в отдельности находим (см. случай 1)): $\angle AMN$ измеряется половиной дуги $\smile AN$, угол NMB — половиной дуги $\smile NB$. Данный угол, равный их сумме, будет измеряться половиной всей дуги $\smile AB$.

3) Пусть, наконец, центр окружности лежит вне угла AMB (рис. 279, *в*). В этом случае также проводим диаметр через вершину угла; отличие от случая 2) состоит лишь в том, что данный угол придется рассматривать не как сумму, а как разность двух углов.

Особо важный случай доказанной теоремы:

Угол с вершиной на окружности, опирающийся на диаметр, — прямой.

Действительно, он опирается на полуокружность и измеряется ее половиной, т. е. равен 90°.

Рассмотрим еще угол между касательной к окружности в некоторой ее точке и секущей, проведенной через ту же точку (рис. 280). Здесь справедливо подобное же утверждение:

Угол между касательной и секущей, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, лежащей внутри измеряемого угла.

Доказательство предоставляем читателю.

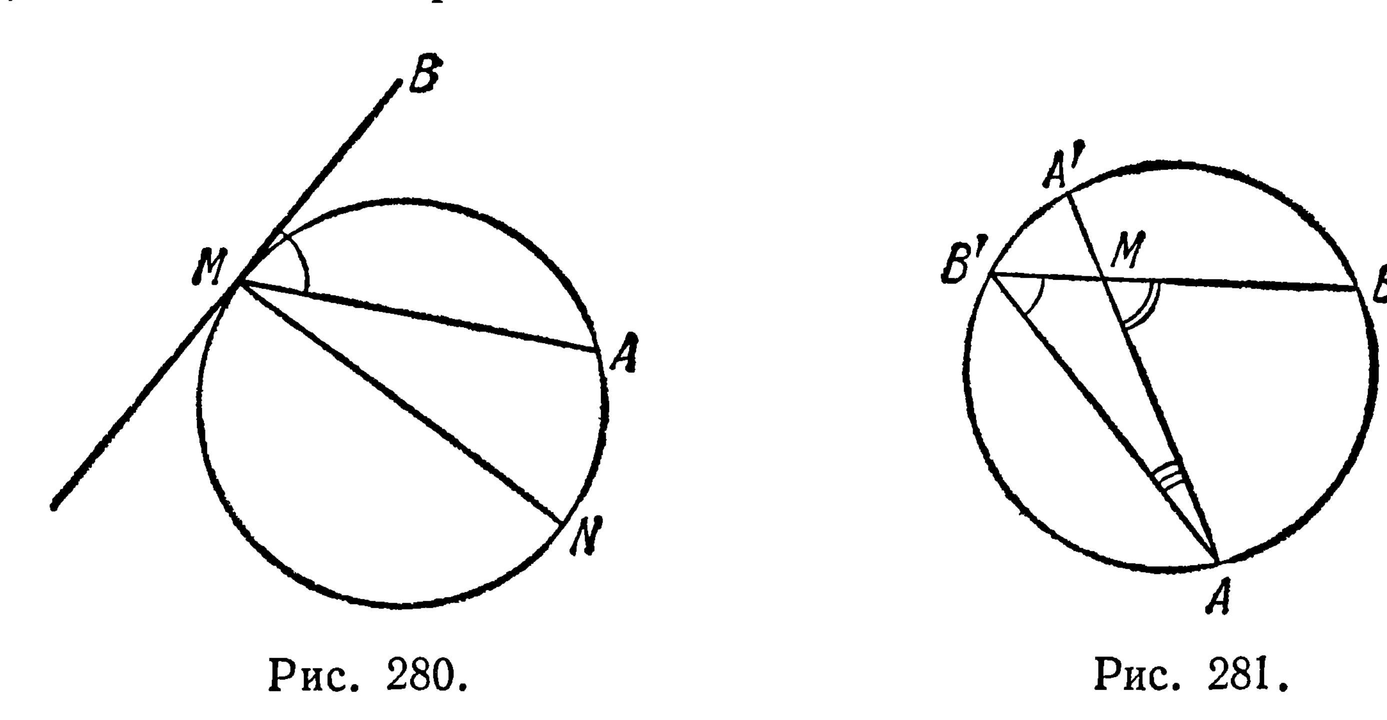


Рис. 280. Рис. 281.

211. Углы с вершиной внутри и вне круга. Пусть теперь угол образован двумя хордами, пересекающимися внутри круга (угол AMB на рис. 281). Тогда справедливо утверждение:

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг $\smile AB$ и $\smile A'B'$, лежащих соответственно внутри данного угла и угла, с ним вертикального.

Доказательство. Соединим точки A и B' хордой AB'; угол $AB'B$ будет измеряться половиной дуги $\smile AB$, угол $A'AB'$ — половиной дуги $\smile A'B'$, а данный угол, равный, как внешний угол треугольника AMB', сумме внутренних, с ним не

смежных углов $AB'B$ и $A'AB'$, будет измеряться полусуммой дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{A'B'}$, что и требовалось доказать.

Докажем, наконец, что

Угол, образованный двумя секущими, проведенными из внешней точки (угол $A'MB'$ на рис. 282), *измеряется полуразностью дуг* $\overset{\smile}{A'B'}$ *и* $\overset{\smile}{AB}$, *лежащих внутри его.*

Для этого проведем хорду AB' и рассмотрим данный угол как разность углов $A'AB'$ и $AB'B$ (снова применяем свойство внешнего угла треугольника). Остальное очевидно.

Можно допустить также, что одна или обе секущие превращаются в касательные (рис. 283). Теорема остается в силе и в этом случае.

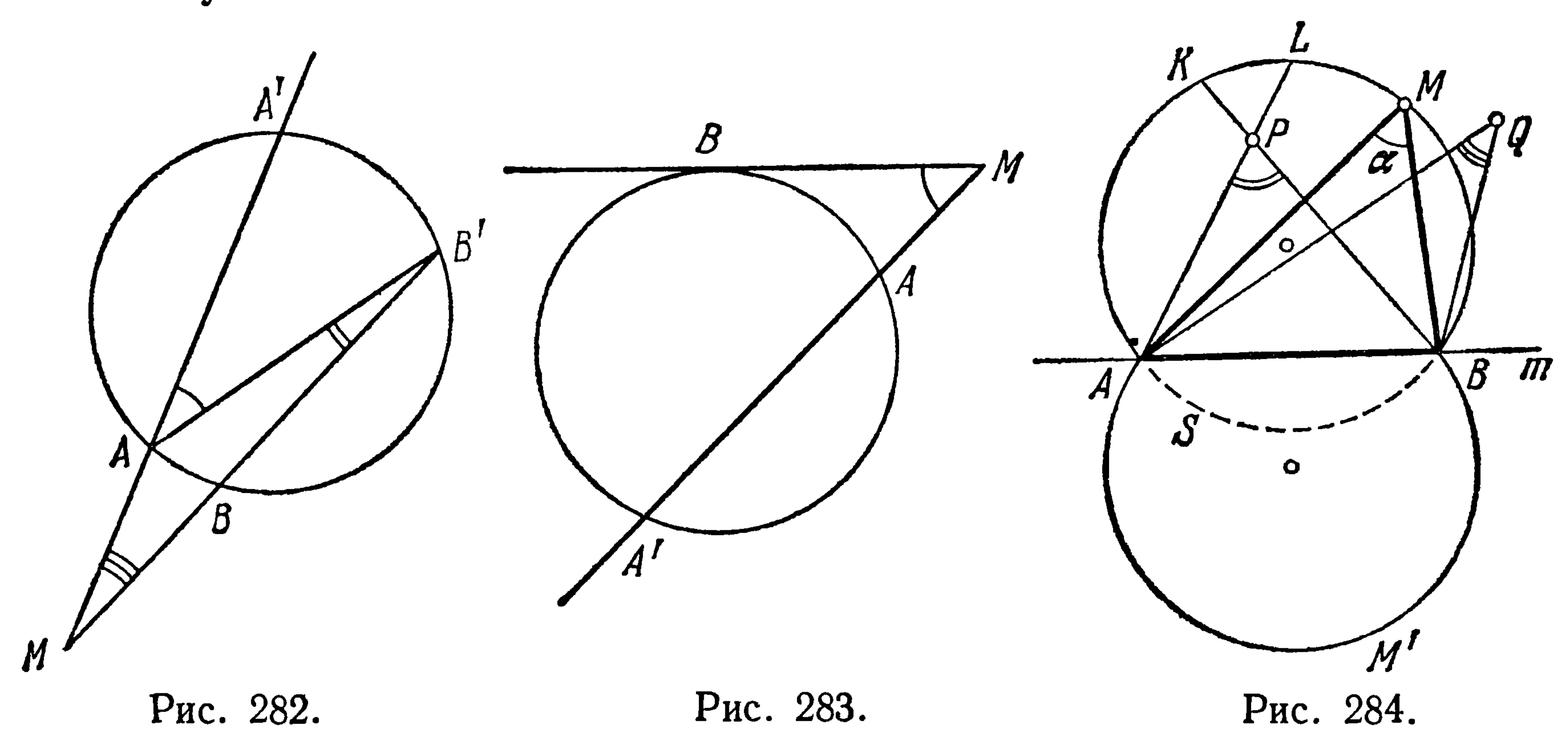


Рис. 282. Рис. 283. Рис. 284.

212. Угол, под которым виден данный отрезок. Пусть AB — некоторый отрезок, лежащий на прямой m, точка M — произвольная точка, не принадлежащая прямой m (рис. 284). Угол α при вершине M треугольника AMB называется *углом, под которым отрезок* AB *виден из точки* M. Найдем геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под одним и тем же постоянным углом α. Для этого опишем вокруг треугольника AMB окружность и рассмотрим ее дугу $\overset{\smile}{AMB}$, содержащую точку M. По предыдущему из любой точки построенной дуги отрезок AB будет виден под одним и тем же углом, измеряемым половиной дуги $\overset{\smile}{ASB}$ (на рис. 284 она показана пунктирной линией). Кроме того, под тем же углом будет виден отрезок и из точек дуги $\overset{\smile}{AM'B}$, расположенной симметрично с $\overset{\smile}{AMB}$ относительно прямой AB. Ни из какой другой точки плоскости, не лежащей на одной из най-

денных дуг, отрезок не может быть виден под тем же углом α. В самом деле, из точки P, лежащей внутри фигуры, ограниченной дугами $\overset{\smile}{AMB}$ и $\overset{\smile}{AM'B}$, отрезок будет виден под углом APB большим, чем α, поскольку угол APB будет измеряться полусуммой дуги $\overset{\smile}{ASB}$ и еще некоторой дуги $\overset{\smile}{KL}$, т. е. будет заведомо больше угла α. Также видно, что для угла с вершиной Q вне этой фигуры будем иметь $\angle AQB < \alpha$. Поэтому точки дуг $\overset{\smile}{AMB}$ и $\overset{\smile}{AM'B}$ и только они обладают требуемым свойством:

Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под постоянным углом, состоит из двух дуг окружностей, симметрично расположенных относительно данного отрезка.

Задача 1. Дан отрезок AB и угол α. Построить сегмент, вмещающий данный угол α и опирающийся на отрезок AB. Здесь под сегментом, вмещающим данный угол, понимают сегмент, ограниченный данным отрезком и любой из двух дуг окружностей, из точек которых отрезок виден под углом α.

Решение. Проведем перпендикуляр к отрезку AB в его середине (рис. 285). На этом перпендикуляре будет помещаться центр окружности, сегмент которой требуется построить. Из конца B отрезка AB проведем луч, образующий с ним угол $d-\alpha$; он пересечет перпендикуляр в центре искомой дуги O (доказать!).

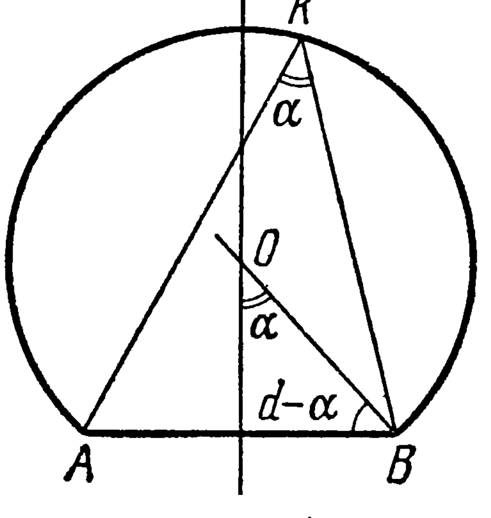


Рис. 285.

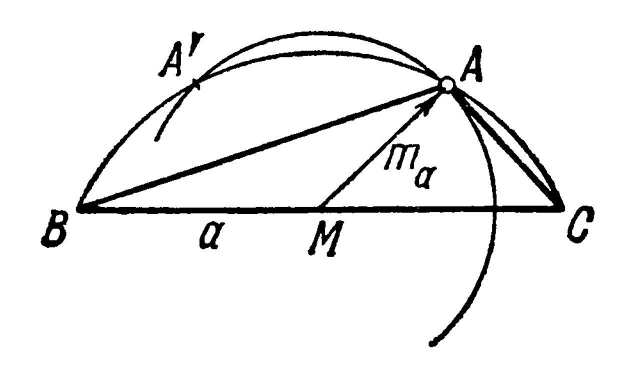


Рис. 286.

Задача 2. Построить треугольник по углу A, стороне $BC = a$ и медиане m_a.

Решение. На произвольной прямой откладываем отрезок BC, равный стороне a треугольника (рис. 286). Вершина треугольника должна помещаться на дуге сегмента, из точек которой данный отрезок виден под углом α (процесс построения на рис. 286 не показан). Затем из середины M стороны BC, как из центра, проведем окружность радиусом, равным m_a. Точки ее пересечения с дугой сегмента и дадут возможные положения вершины A искомого треугольника. Исследовать число решений!

Задача 3. Из внешней точки проведены касательные к окружности. Точки касания делят окружность на части,

отношение которых равно 1:7. Найти угол между касательными.

Решение. Деля полную дугу окружности на части, пропорциональные указанным, находим обе дуги между точками касания: $\alpha = 45°$, $\beta = 315°$. Искомый угол измеряется их полуразностью:

$$\varphi = \frac{315-45}{2} = 135°.$$

Задача 4. На одной из сторон равностороннего треугольника, как на диаметре, построена окружность. Сколько градусов содержит ее дуга, лежащая внутри треугольника?

Решение. Угол в 60° при вершине треугольника, лежащий вне круга, измеряется полуразностью полуокружности и искомой дуги: $60° = \frac{180° - \alpha}{2}$. Отсюда находим $\alpha = 60°$.

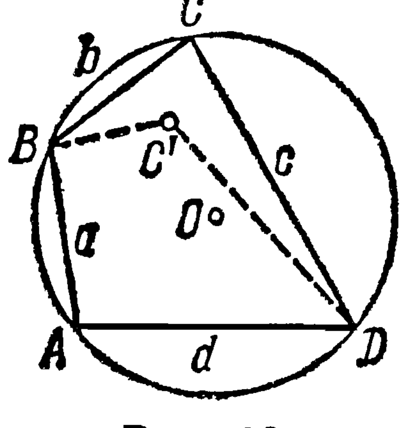


Рис. 287.

213. Четырехугольники, вписанные в окружность. Вокруг всякого треугольника можно описать окружность, иначе говоря, всякий треугольник может считаться вписанным в некоторую окружность. Иначе обстоит дело с четырехугольником: описать окружность вокруг четырехугольника можно, лишь если он удовлетворяет некоторому дополнительному условию, которое мы сейчас и найдем. Пусть $ABCD$ — некоторый четырехугольник, вписанный в окружность (рис. 287). Тогда его противоположные углы, например $\angle A$ и $\angle C$, опираются на дуги, составляющие в сумме всю окружность. Значит, сумма этих углов измеряется половиной окружности, и потому эти два угла составляют в сумме два прямых. Столько же приходится и на долю второй пары противоположных углов $\angle B$ и $\angle D$. Итак,

У любого четырехугольника, вписанного в окружность, суммы пар противоположных углов равны двум прямым.

Докажем, что и обратно, вокруг четырехугольника, обладающего этим свойством, можно описать окружность. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 287), у которого $\angle A + \angle C = 2d$ (а значит, и $\angle B + \angle D = 2d$). Проведем окружность через какие-либо три вершины четырехугольника, например A, B, D. Тогда и четвертая вершина должна поместиться на той же окружности. Так, если бы четвертая вершина (точка C' на рис. 287) оказалась внутри окружности, проведенной через три остальные вершины, то угол в ней имел бы меру, бо́льшую половины дуги $\smile BAD$, и сумма его с углом, измеряемым дугой $\smile BCD$, превзошла бы два прямых, что противоречит условию. Так же опровергается и предположение, будто точка C может ле-

жать вне окружности, проведенной через вершины A, B, D. Остается лишь возможность, что точка C лежит на самой окружности, что мы и хотели установить.

Применим этот признак к решению вопроса: при каких условиях вокруг данного параллелограмма или данной трапеции можно описать окружность? Если дан параллелограмм, то противолежащие углы его равны и потому могут составлять в сумме два прямых лишь тогда, когда каждый из них прямой. Итак,

Из всех параллелограммов прямоугольники и только они обладают тем свойством, что вокруг них можно описать окружность.

Читатель докажет, что центр описанной окружности прямоугольника лежит в точке пересечения его диагоналей. Если окружность описана около трапеции, то снова сумма противоположных углов должна равняться двум прямым. Но у трапеции равна двум прямым сумма углов, образуемых боковой стороной с двумя ее основаниями. Отсюда видно, что должны быть равны углы, прилежащие к одному основанию. Такая трапеция будет равнобочной трапецией:

Из всех трапеций вписанной в окружность может быть только равнобочная трапеция.

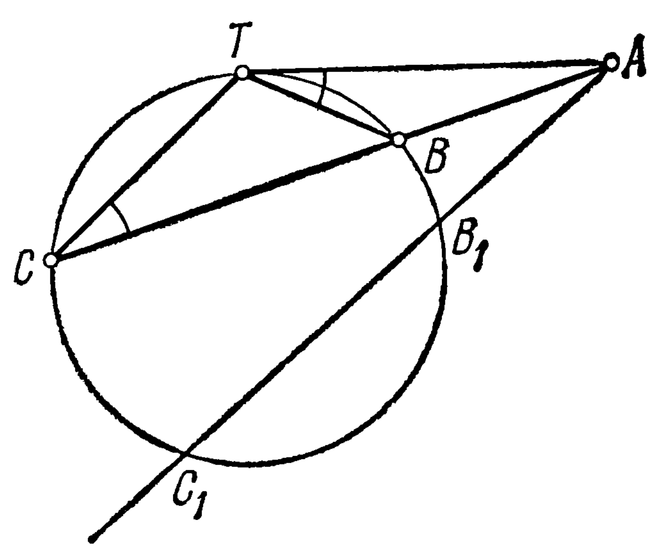


Рис. 288.

214. Пропорциональные отрезки в круге. Рассмотрим сначала секущую AC, проведенную из внешней по отношению к данной окружности точки A (рис. 288). Из той же точки проведем касательную AT. Будем называть отрезок между точкой A и ближайшей к ней точкой пересечения с окружностью *внешней частью* секущей (отрезок AB на рис. 288), отрезок же AC до более далекой из двух точек пересечения — просто *секущей*. Отрезок касательной от A до точки касания также коротко называем *касательной*. Тогда справедлива

Теорема. *Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.*

Доказательство. Соединим точку T с B и C. Треугольники ACT и BTA подобны, так как угол при вершине A у них общий, а углы ACT и BTA равны, поскольку оба они измеряются половиной одной и той же дуги $\smile TB$. Следовательно, $AC:AT=AT:AB$. Отсюда получаем требуемый результат:

$$AC \cdot AB = AT^2.$$

Касательная равна среднему геометрическому между секущей, проведенной из той же точки, и ее внешней частью.

Следствие. *Для любой секущей, проведенной через данную точку A, произведение ее длины на внешнюю часть постоянно:*

$$AC \cdot AB = AC_1 \cdot AB_1.$$

Рассмотрим теперь хорды, пересекающиеся во внутренней точке. Справедливо утверждение:

Если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (имеются в виду отрезки, на которые хорда разбивается точкой пересечения).

Так, на рис. 289 хорды AB и CD пересекаются в точке M, и мы имеем $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Иначе говоря,

Для данной точки M произведение отрезков, на которые она разбивает любую проходящую через нее хорду, постоянно.

Для доказательства заметим, что треугольники MBC и MAD подобны: углы CMB и DMA вертикальные, углы MAD и MCB опираются на одну и ту же дугу. Отсюда находим

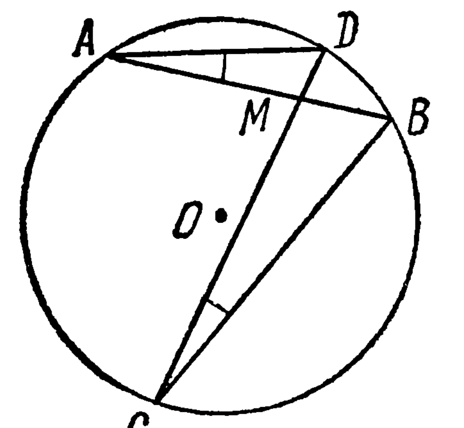


Рис. 289.

$$MD : BM = AM : MC,$$

или

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD,$$

что и требовалось доказать.

Если данная точка M лежит на расстоянии l от центра, то, проведя через нее диаметр и рассматривая его как одну из хорд, найдем, что произведение отрезков диаметра, а значит, и любой другой хорды, равно $R^2 - l^2$. Оно же равно квадрату минимальной полухорды (перпендикулярной к указанному диаметру), проходящей через M.

Теорема о постоянстве произведения отрезков хорды и теорема о постоянстве произведения секущей на ее внешнюю часть суть два случая одного и того же утверждения, различие состоит лишь в том, проводятся ли секущие через внешнюю или внутреннюю точку круга. Теперь можно указать еще один признак, отличающий вписанные четырехугольники:

Во всяком вписанном четырехугольнике произведения отрезков, на которые разбиваются диагонали точкой их пересечения, равны.

Необходимость условия очевидна, так как диагонали будут хордами описанной окружности. Можно показать, что это условие также и достаточно.

215. Задачи на построение.

Задача 1. Провести касательную к окружности из данной точки, лежащей вне ее.

Решение. Угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания, прямой. Этот прямой угол опирается на отрезок,

соединяющий данную точку и центр O окружности (рис. 290). Отсюда виден способ построения: на отрезке OM, как на диаметре, строим окружность; точки A_1 и A_2 ее пересечения с данной окружностью и будут точками касания искомых касательных с окружностью. Соединяя точки A_1 и A_2 с данной точкой M, получим обе касательные, проведенные из M.

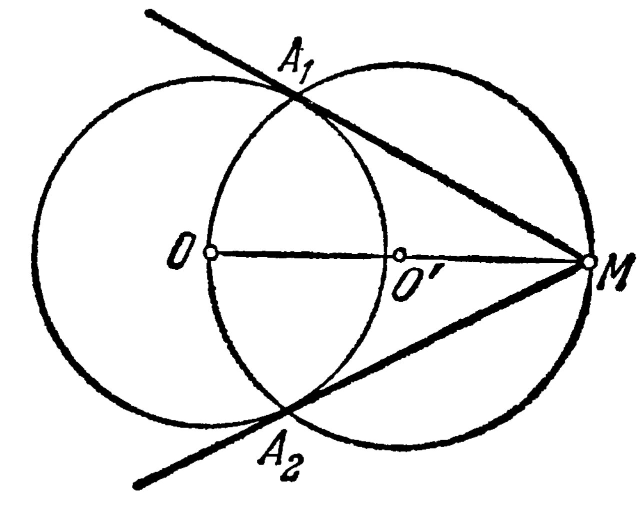


Рис. 290.

Это решение простейшее, но можно решить задачу и по-другому. Например, провести любую секущую через M и найти среднее геометрическое между секущей и ее внешней частью. Это будет длина касательной. Радиусом, равным ей, сделаем на данной окружности засечки, проведя дугу из M, как из центра, и снова найдем точки A_1 и A_2.

Задача 2. Построить общие касательные двух окружностей.

Решение. Рассмотрим две окружности на рис. 291. В данном случае они расположены одна вне другой и не имеют точек

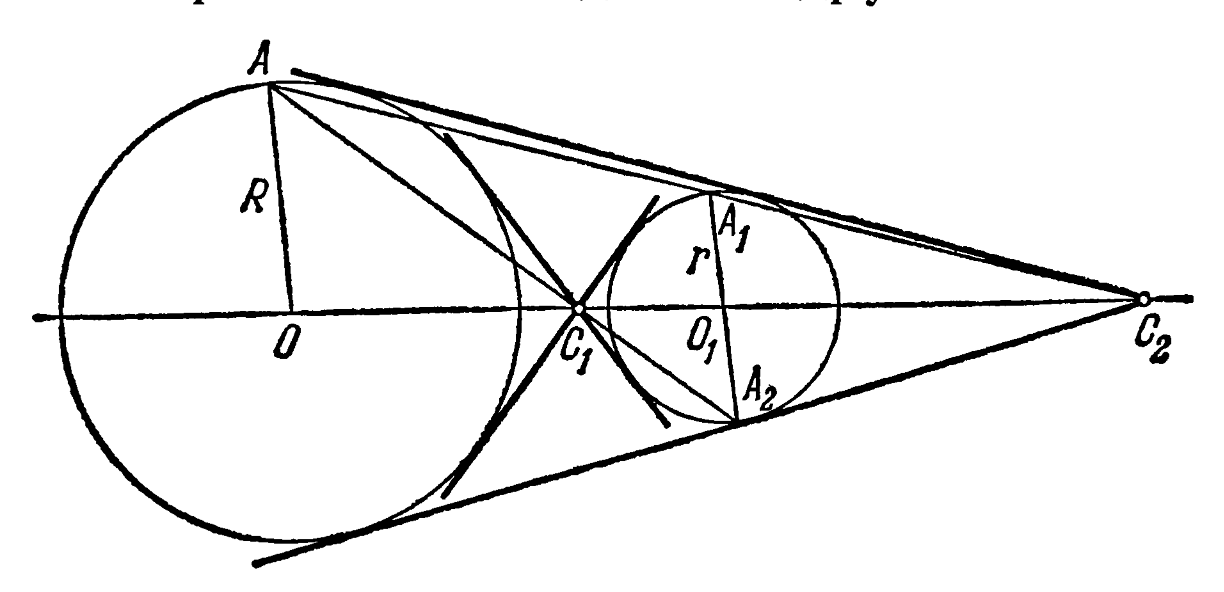


Рис. 291.

пересечения. Это — случай, когда к ним можно провести наибольшее число общих касательных — две «внешних» и две «внутренних». Точки пересечения этих двух пар касательных лежат на линии центров и могут быть найдены, как центры гомотетии данных двух окружностей. Проводим, например, любой из радиусов OA одной окружности (рис. 291) и параллельные ему радиусы O_1A_1 и O_1A_2 второй. Соединим концевые точки радиусов O_1A_1 и O_1A_2 с концом радиуса OA. Линии AA_2 и AA_1 (последняя не параллельна OO_1, если $R \neq r$) пересекут линию центров в искомых центрах гомотетии C_1 и C_2. Касательные, проведенные из C_1 и C_2 к любой из двух окружностей, будут касаться другой.

Напомним и другой способ решения этой задачи. Построим две окружности с центром в центре большей из двух данных окружностей и радиусами, равными сумме и разности радиусов

данных окружностей. Проведем к ним касательные из центра малой окружности (рис. 292). Искомые касательные будут соответственно параллельны: внешние — касательным к малой, внутренние — касательным к большой, вспомогательной окружности.

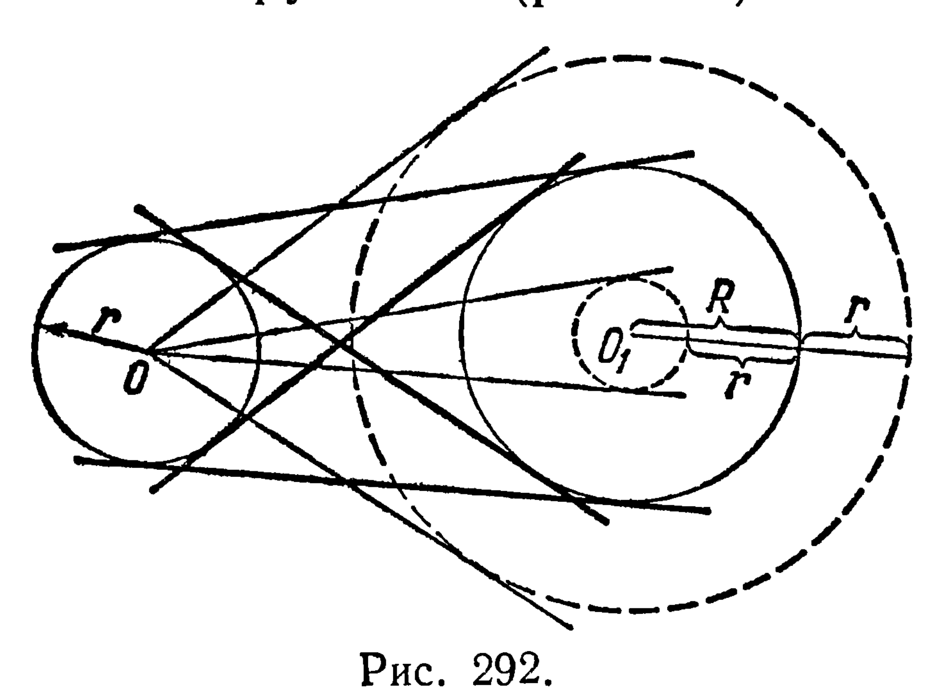


Рис. 292.

Упражнения

1. Дуга содержит 40°. Под каким углом видна из ее точек стягивающая ее хорда?

2. Углы треугольника соответственно равны 50°, 60°, 70°. На стороне, лежащей против угла в 50°, как на диаметре построена полуокружность, пересекающая две другие стороны. На какие дуги полуокружность разбивается точками пересечения?

3. Из внешней точки проведены касательная и секущая к окружности. Касательная меньше секущей на m и больше ее внешней части на n. Найти длину касательной.

4. Определить угол при вершине равнобедренного треугольника, у которого сумма основания и высоты, проведенной к основанию, равна диаметру описанного круга.

5. Доказать, что произведение отрезков любой касательной к окружности, заключенных между точкой касания и двумя параллельными между собой касательными к той же окружности, равно квадрату радиуса окружности.

6. Описать вокруг данной окружности ромб с острым углом в 30°.

7. Из внешней точки провести секущую к окружности так, чтобы ее внутренняя часть имела заданную длину.

§ 2. Метрические соотношения в треугольнике

216. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора. Рассмотрим произвольный прямоугольный треугольник ABC (рис. 293) и проведем высоту $CH = h_c$ из вершины C его прямого угла. Она разобьет данный треугольник на два прямоугольных треугольника ACH и BCH; каждый из этих треугольников имеет с треугольником ABC общий острый угол и потому подобен треугольнику ABC. Все три треугольника ABC, ACH, BCH подобны между собой.

Из подобия треугольников ABC и ACH имеем $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$, или $CH^2 = AH \cdot BH$, откуда $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$, т. е. *высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна среднему геометрическому отрезков c_1 и c_2, на которые она разбивает гипотенузу*:

$$h_c = \sqrt{c_1 c_2}. \qquad (216.1)$$

Далее, из подобия треугольников ABC и ACH найдем $\frac{AC}{AB}=\frac{AH}{AC}$, или $AC^2=AH\cdot BA$, откуда $AC=\sqrt{AB\cdot AH}$. Аналогичным образом найдем $BC=\sqrt{AB\cdot BH}$. Таким образом,

$$a=\sqrt{cc_1},\qquad b=\sqrt{cc_2}, \tag{216.2}$$

т. е. *катет прямоугольного треугольника равен среднему геометрическому гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.*

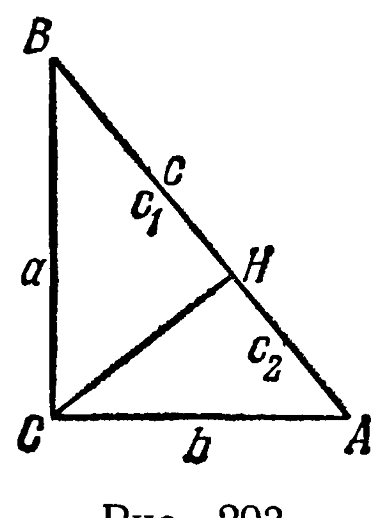
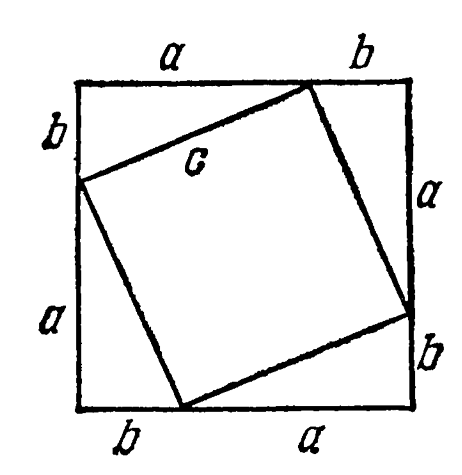


Рис. 293.



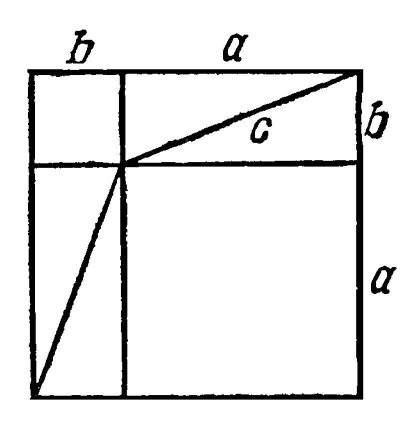


Рис. 294.

Теорема Пифагора. *Сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы:*

$$a^2+b^2=c^2. \tag{216.3}$$

Доказательство. Запишем выражения квадратов катетов a и b треугольника по формуле (216.2):

$$a^2=cc_1,\qquad b^2=cc_2,$$

и сложим эти равенства почленно. Получим

$$a^2+b^2=cc_1+cc_2=c(c_1+c_2)=c^2,$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство имеет алгебраический характер: вычисление показывает, что сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы. Поскольку квадрат длины отрезка можно геометрически истолковать как площадь квадрата, построенного на этом отрезке, как на стороне, то теорему Пифагора можно сформулировать в чисто геометрических терминах: сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. В связи с этим на рис. 294 дано геометрическое обоснование теоремы Пифагора. Один и тот же квадрат со стороной $a+b$ разложен в одном случае на четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a, b и квадрат со стороной c, а в другом случае — на такие же четыре прямоугольных треугольника и на два квадрата со сторонами a и b соответственно. Из этого непосредственно видно, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах a и b.

Пользуясь свойствами прямоугольных треугольников, легко решить задачи на построение отрезков, определяемых формулами

$$x=\sqrt{a^2+b^2},\qquad x=\sqrt{a^2-b^2},\qquad x=\sqrt{ab}$$

(подразумевается, что a и b — некоторые данные отрезки).

Так, построение отрезка $x=\sqrt{a^2+b^2}$ сводится к построению прямоугольного треугольника по двум его катетам, равным a и b. Тогда гипотенуза построенного треугольника и будет искомым отрезком.

Отрезок, выражаемый формулой $x=\sqrt{a^2-b^2}$, где $a>b$, строится как катет прямоугольного треугольника со вторым катетом, равным b, и гипотенузой a (см. п. 189).

Отрезок $x=\sqrt{ab}$, равный среднему геометрическому двух данных отрезков, можно построить так. На произвольной прямой (рис. 295) отложим последовательно отрезки, равные данным

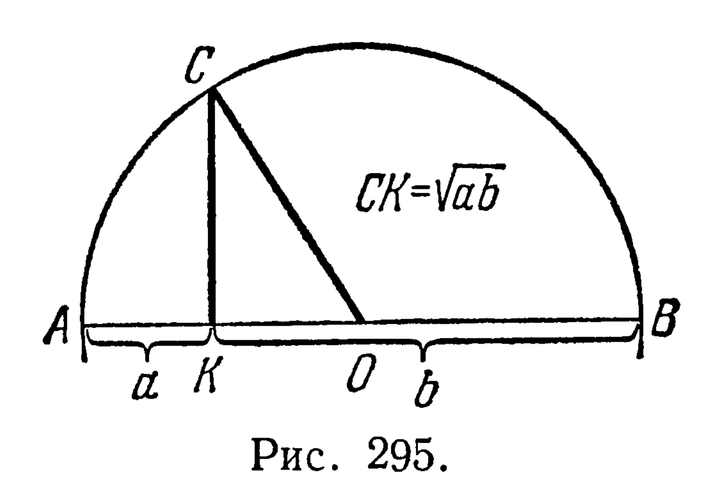


Рис. 295.

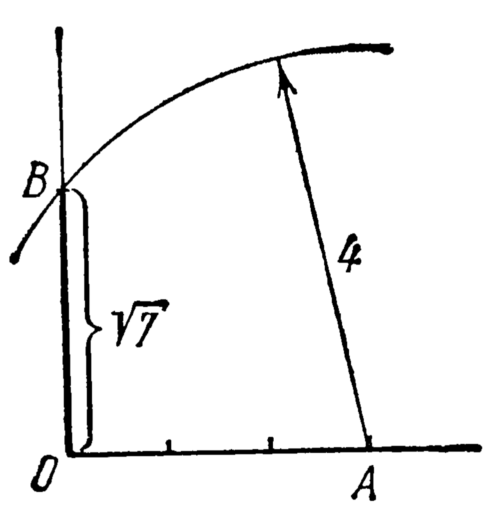


Рис. 296.

($AK=a$, $KB=b$). В точке K, где они примыкают друг к другу, восставим к ним перпендикуляр; если на этом перпендикуляре найти точку C такую, чтобы угол ACB был прямым, то высота CK полученного прямоугольного треугольника и будет средним геометрическим данных отрезков. Поэтому берем середину O данного отрезка AB и из нее, как из центра, проводим окружность радиусом, равным половине AB (строим окружность на отрезке AB, как на диаметре). Точка пересечения ее с перпендикуляром KC и будет искомой точкой C (угол ACB прямой, так как он опирается на диаметр, см. п. 210). Итак, отрезок $x=CK=\sqrt{ab}$ построен.

Иначе можно решить ту же задачу так. Заметим, что имеет место равенство

$$x^2=ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Строим отрезки $(a+b)/2$ и $(a-b)/2$, и задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и одному из катетов.

Пример. Построить отрезок, равный $\sqrt{7}$.

Решение. Используем соотношение $7=16-9=4^2-3^2$. На одной из сторон прямого угла (рис. 296) отложим от вершины отрезок OA, равный 3, и из конца его на другой стороне сделаем засечку радиусом, равным 4. Отрезок, отсеченный на второй стороне прямого угла, и будет искомым: $OB=\sqrt{7}$.

Замечание. Задачу можно решить иначе, пользуясь соотношением $\sqrt{7}=\sqrt{7\cdot 1}$, выражающим искомый отрезок как среднее геометрическое отрезков 7 и 1.

Задача 1. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику ABC.

Указание. Строим прямоугольник, равновеликий данному треугольнику (например, прямоугольник с тем же основанием, что у данного треугольника, но с половинной высотой). Сторона искомого квадрата строится как среднее геометрическое сторон прямоугольника, т. е. a и $h/2$.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике отрезки, на которые высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу, равны 6 и 18. Найти катеты и площадь треугольника.

Решение. Гипотенуза треугольника $c=6+18=24$. Катеты находятся как средние геометрические между гипотенузой и отрезками, на которые она разбита высотой: $a=\sqrt{6\cdot 24}=12$, $b=\sqrt{18\cdot 24}=12\sqrt{3}$. Площадь равна $S=\frac{1}{2}ab=72\sqrt{3}$.

До сих пор при изложении геометрии мы нигде не пользовались тригонометрическими функциями. Дело в том, что введение тригонометрических функций угла основано на сведениях из теории подобия (например, на том, что отношения сторон треугольника не изменяются при подобном преобразовании); кроме того, основное тождество

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1, \qquad (216.4)$$

широко используемое в тригонометрии, есть не что иное, как запись теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной единице.

После изучения этого пункта читатель имеет все сведения из курса геометрии, необходимые для чтения гл. VIII—XII первой части книги. В связи с этим в оставшейся части данной главы и в последующих главах мы уже считаем, что читатель знаком с основными фактами, относящимися к тригонометрическим функциям, хотя бы в объеме гл. VIII. В частности, предполагаются известными следующие соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника (рис. 297):

Рис. 297.

$$a/c=\sin\alpha;\quad b/c=\cos\alpha;\quad a/b=\operatorname{tg}\alpha;\quad b/a=\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (216.5)$$

217. Квадрат стороны, лежащей против острого или тупого угла в треугольнике. Теорема косинусов. Рассмотрим сторону b треугольника ABC, лежащую против угла β (рис. 298).

Вычисление длины этой стороны проведем отдельно в двух случаях, когда угол β острый (рис. 298, *а*) и когда угол β тупой (рис. 298, *б*).

1) β — острый угол (рис. 298, *а*). Проведем в треугольнике ABC высоту $CH = h$. Отрезок BH, который является проекцией стороны BC на сторону AB, обозначим через l. Тогда отрезок AH выразится как $c - l$. Применим теорему Пифагора к каждому из двух треугольников AHC и BHC, на которые данный треугольник разбивается высотой CH. Получим

$$b^2 = h^2 + (c - l)^2, \qquad h^2 = a^2 - l^2.$$

Подставляя h^2 из второго равенства в первое, найдем

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2lc. \qquad (217.1)$$

Квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон треугольника минус удвоенное произведение одной из них на проекцию на нее другой стороны.

2) β — тупой угол (рис. 298, *б*). Проводим то же построение: опускаем высоту $CH = h$ из вершины C; обозначаем, как и в первом случае, проекцию BH стороны BC на сторону AB через l.

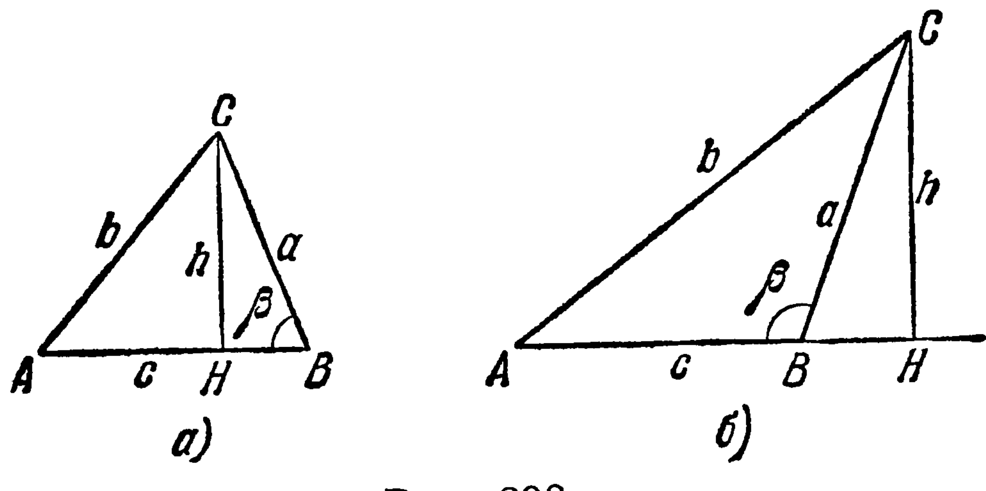


Рис. 298.

Отрезок AH теперь выражается как сумма c и l: $AH = c + l$ (в этом состоит отличие от первого рассмотренного случая). Из прямоугольных треугольников AHC и BHC, используя теорему Пифагора, находим

$$b^2 = h^2 + (c + l)^2, \qquad h^2 = a^2 - l^2$$

и, подставляя h^2 из второго равенства в первое, окончательно получаем

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2lc. \qquad (217.2)$$

Квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других его сторон плюс удвоенное произведение одной из них на проекцию на нее другой стороны.

Следствие. *Квадрат стороны, лежащей против острого (тупого) угла, меньше (больше) суммы квадратов двух других сторон треугольника. Равенство имеет место для стороны, лежащей против прямого угла.*

Пример 1. Стороны треугольника равны 8, 10 и 13. Является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным?

Решение. Находим квадраты сторон и замечаем, что квадрат большей стороны больше суммы квадратов двух других сторон: $169 > 100+64$. Треугольник тупоугольный (тупой угол лежит против наибольшей из сторон).

Равенствам (217.1) и (217.2) можно придать единообразную форму, используя выражение проекции l через косинус угла β. Именно, в случае острого угла β непосредственно имеем $l = a\cos\beta$. В случае тупого угла β проекция l выражается из треугольника BCH на рис. 298, *б* как $l = a\cos(\pi-\beta)$ (угол $HBC = \pi-\beta$). Известна формула приведения (см. п. 106), по которой $\cos(\pi-\beta) = -\cos\beta$. Поэтому в рассматриваемом случае $l = -a\cos\beta$. Теперь видно, что, заменяя l через $a\cos\beta$ в формуле (217.1) и через $-a\cos\beta$ в формуле (217.2), придем к одному и тому же равенству:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad (217.3)$$

известному как

Теорема косинусов. *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.*

В такой формулировке теорема применима к остроугольным, прямоугольным и тупоугольным треугольникам. Естественно, что равенства вида (217.3) могут быть записаны и для остальных сторон треугольника:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad (217.4)$$

Пример 2. Найти диагонали параллелограмма, стороны которого равны 12 и 8, а тупой угол равен 135°.

Решение. Каждая из диагоналей является соответственно стороной в треугольнике, две другие стороны которого равны 12 и 8. Одна из диагоналей лежит против угла в 135°, другая — против угла в 45°. Находим

$$d_{1,2}^2 = 144 + 64 \mp 2\cdot 12\cdot 8\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 208 \mp 96\sqrt{2}.$$

Малая диагональ $d_1 \approx 8{,}5$, большая $d_2 \approx 18{,}5$.

С помощью формулы (217.3) может быть доказана

Теорема 1. *Если в двух треугольниках имеются две пары равных сторон, то третья сторона больше в том треугольнике, где она лежит против большего угла.*

Доказательство. Из равенства (217.3) видно, что при постоянных длинах сторон a, c сторона b будет тем больше, чем меньше $\cos\beta$; так как при возрастании угла β его косинус монотонно убывает (см. п. 97), то справедливость нашего

утверждения доказана. С помощью формулы (217.3) легко доказывается следующая

Теорема 2. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырех его сторон.*

Доказательство. Обозначим стороны параллелограмма через a и b, диагонали — через d_1 и d_2, один из углов параллелограмма — через α (рис. 299). Диагонали можно рассматривать как стороны BD и AC треугольников ABD и ABC, лежащие против углов α и $\pi-\alpha$; по теореме косинусов находим

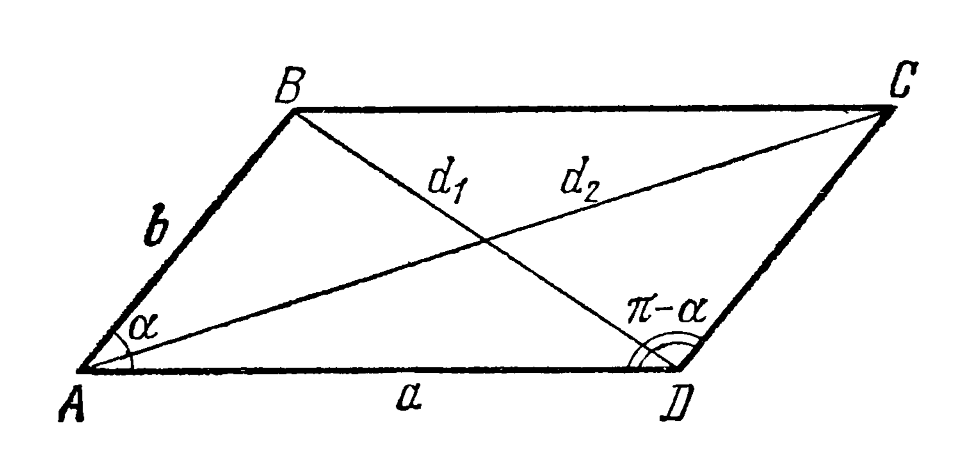


Рис. 299.

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi-\alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$

откуда

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

218. Теорема синусов. Формула Герона. Рассмотрим треугольник ABC с высотой $CH = h_c$, опущенной из вершины C (рис. 300). Площадь треугольника равна (п. 201) половине произведения высоты на основание: $S = \frac{1}{2}ch_c$. Высоту можно выразить из прямоугольного треугольника AHC как $h_c = b\sin\alpha$ в случае острого угла α (рис. 300, *а*) или как $h_c = b\sin(\pi-\alpha)$ в случае тупого

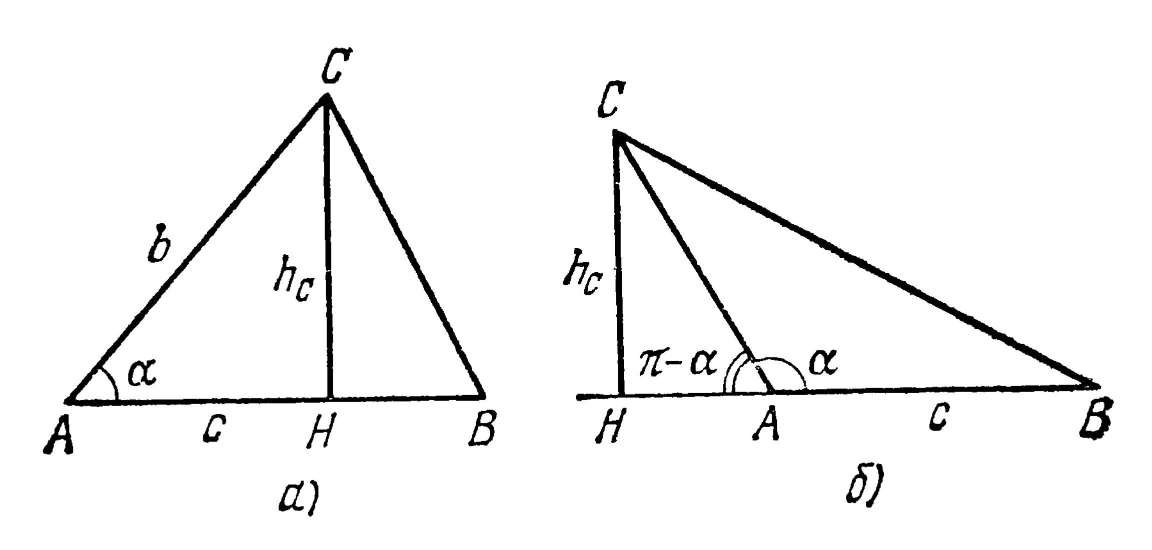


Рис. 300.

угла α (рис. 300, *б*). В силу равенства $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ (п. 106) в обоих случаях имеем $h_c = b\sin\alpha$. Формула для площади треугольника примет вид

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha. \tag{218.1}$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Вместе с формулой (218.1) верны, конечно, и аналогичные формулы:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad S=\frac{1}{2}ac\sin\beta. \tag{218.2}$$

Из равенств (218.1) и (218.2) вытекают пропорции

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2S}, \tag{218.3}$$

выражающие следующую теорему.

Теорема синусов. *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.*

Выведем теперь формулу Герона, дающую выражение площади треугольника через длины его сторон. Для этого выразим $\cos\alpha$ из формулы (217.4):

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

и $\sin\alpha$ из формулы (218.1):

$$\sin\alpha=\frac{2S}{bc}.$$

Возводя оба последних равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем

$$1=\frac{4S^2}{(bc)^2}+\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4(bc)^2},$$

откуда

$$\begin{aligned}16S^2&=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=\\&=(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)=\\&=[a^2-(b-c)^2]\,[(b+c)^2-a^2]=\\&=(a-b+c)(a-c+b)(c+b-a)(a+b+c),\end{aligned}$$

или, вводя для периметра обозначение $2p=a+b+c$,

$$16S^2=16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Окончательно имеем следующую формулу для S (формула Герона):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{218.4}$$

Отсюда получаются также формулы для высот треугольника:

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \tag{218.5}$$

и т. д. Достаточно, конечно, знать на память формулу Герона, так как выражения высот получаются из нее немедленно.

Пример. Найти площадь треугольника и длины его высот, если стороны соответственно равны $a=5$, $b=7$, $c=8$.

Решение. Полупериметр $p=10$; подставляя p и стороны в формулу Герона, находим площадь треугольника:

$$S=\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2}=10\sqrt{3}.$$

Высоты получаются теперь просто:

$$h_a=4\sqrt{3},\quad h_b=\frac{20\sqrt{3}}{7},\quad h_c=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Задача. Найти высоту трапеции, основания которой a и c равны 25 и 11, а боковые стороны $b=13$, $d=15$.

Решение. Проведем через вершину B верхнего основания трапеции прямую BM, параллельную боковой стороне CD (рис. 301). В треугольнике ABM известны все три стороны. По формуле Герона находим площадь этого треугольника ($p=21$):

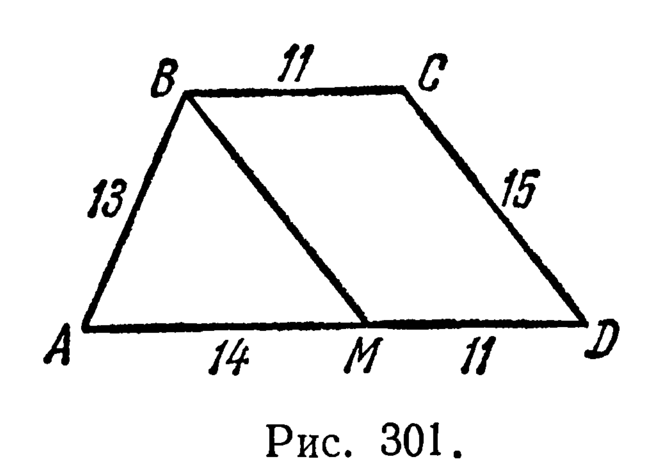


Рис. 301.

$$S=\sqrt{21\cdot 7\cdot 8\cdot 6}=84.$$

Отсюда видно, что высота равна $h=\frac{2\cdot 84}{14}=12$. Чему равны диагонали трапеции?

219. Радиусы вписанной и описанной окружностей. Рассмотрим окружность, вписанную в треугольник (рис. 302). Напомним, что ее центр O помещается на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника. Отрезки OA, OB, OC, соединяющие O с вершинами треугольника ABC, разобьют треугольник на три треугольника: AOB, BOC, COA. Высота каждого из этих треугольников равна радиусу r, и потому их площади выразятся как

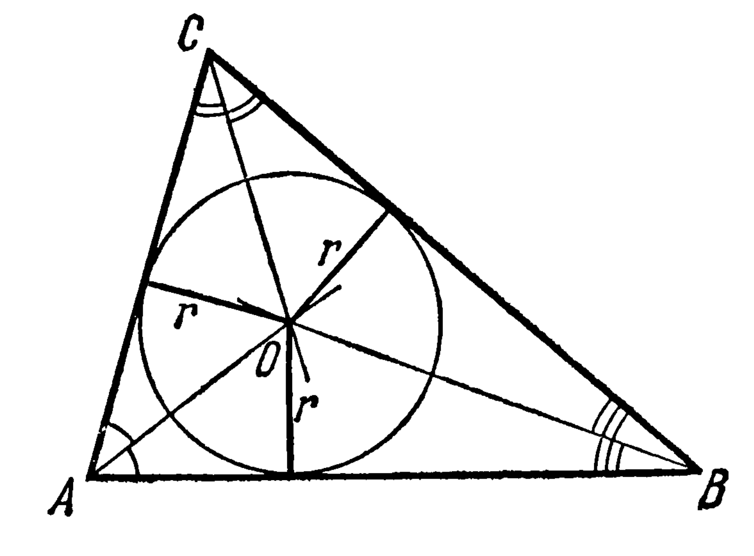


Рис. 302.

$$S_1=\frac{1}{2}rc,\quad S_2=\frac{1}{2}ra,\quad S_3=\frac{1}{2}rb.$$

Площадь всего треугольника S равна сумме этих трех площадей:

$$S=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc=rp, \tag{219.1}$$

где p — полупериметр треугольника. Отсюда

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \tag{219.2}$$

Радиус вписанной окружности равен отношению площади треугольника к его полупериметру.

Для получения формулы для радиуса описанной окружности треугольника докажем следующее предложение.

Теорема: *В любом треугольнике сторона равна диаметру описанной окружности, умноженному на синус противолежащего угла.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и описанную вокруг него окружность, радиус которой обозначим через R (рис. 303). Пусть A — острый угол треугольника. Проведем радиусы OB, OC окружности и опустим из ее центра O перпендикуляр OK на сторону BC треугольника. Заметим, что угол α треугольника измеряется половиной дуги $\smile BC$, для которой угол BOC является центральным углом. Отсюда видно, что $\angle BOC = 2\alpha$, а $\angle COK = \alpha$. Поэтому из прямоугольного треугольника COK находим $a/2 = R\sin\alpha$, или $a = 2R\sin\alpha$, что и требовалось доказать.

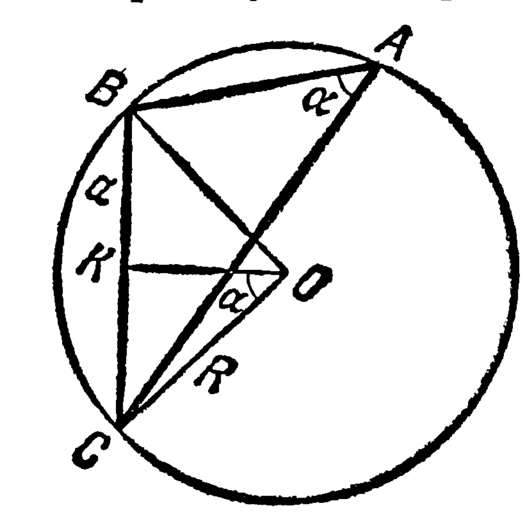


Рис. 303.

Приведенный рис. 303 и рассуждение относятся к случаю острого угла треугольника; нетрудно было бы провести доказательство и для случаев прямого и тупого угла (читатель это проделает самостоятельно), но можно использовать теорему синусов (218.3). Так как $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, то должно быть и $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, откуда

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma. \qquad (219.3)$$

Теорему синусов записывают также в виде

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \qquad (219.4)$$

и сравнение с формой записи (218.3) дает для R

$$R = \frac{abc}{4S}. \qquad (219.5)$$

Радиус описанной окружности равен отношению произведения трех сторон треугольника к его учетверенной площади.

Задача. Найти стороны равнобедренного треугольника, если его вписанная и описанная окружности имеют соответственно радиусы $r = 3$ и $R = 8$.

Решение. Напишем формулы, выражающие радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Для равнобедренного треугольника с боковой стороной m и основанием n площадь выражается формулой

$$S=\frac{1}{2}n\sqrt{m^2-\frac{n^2}{4}}.$$

Далее, $p=m+n/2$, $abc=m^2n$, и равенства для r и R примут вид

$$r=\frac{n\sqrt{4m^2-n^2}}{2(2m+n)},\quad R=\frac{m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}},\quad \frac{r}{R}=\frac{(4m^2-n^2)n}{2m^2(2m+n)},$$

или, сократив дробь на отличный от нуля множитель $2m+n$, будем иметь

$$\frac{r}{R}=\frac{(2m-n)n}{2m^2},$$

что приводит к квадратному уравнению относительно n/m:

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2-2\frac{n}{m}+2\frac{r}{R}=0.$$

Оно имеет два решения:

$$\frac{n}{m}=1\pm\sqrt{1-\frac{2r}{R}}=1\pm\frac{1}{2};\quad n_1=\frac{3}{2}m_1,\quad n_2=\frac{1}{2}m_2.$$

Подставив вместо n его выражения $3m/2$ и $m/2$ в любое из уравнений для r или R, найдем окончательно два ответа к нашей задаче: 1) $m_1=4\sqrt{7}$, $n_1=6\sqrt{7}$; 2) $m_2=4\sqrt{15}$, $n_2=2\sqrt{15}$.

Упражнения

1. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти отношение каждого из катетов к гипотенузе.

2. Основания равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равны a и b. Найти радиус окружности.

3. Две окружности касаются внешним образом. Их общие касательные наклонены к линии центров под углом 30°. Длина отрезка касательной между точками касания равна 108 *см*. Найти радиусы окружностей.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найти площадь треугольника, сторонами которого служат высота и медиана данного треугольника, проведенные из вершины прямого угла, и отрезок гипотенузы между точками их пересечения с гипотенузой.

5. Стороны треугольника равны 13, 14, 15. Найти проекцию каждой из них на две остальные.

6. В треугольнике известны сторона $a=5$ и высоты $h_a=4$ и $h_b=2{,}5$. Найти стороны b и c.

7. Известны две стороны треугольника $a=10$, $c=6$ и медиана $m_b=7$. Найти третью сторону треугольника.

8. Даны две стороны треугольника $b=5$, $c=4$ и угол α между ними: $\alpha=30°$. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

9. Известны стороны треугольника a, b, c. Чему равны отрезки, на которые они разбиваются точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника?

§ 3. Решение треугольников

220. Таблицы функций. В этом параграфе рассматриваются задачи вычислительного характера на отыскание одних элементов треугольника по другим, заданным. При их решении приходится использовать таблицы тригонометрических функций (такие таблицы даны в приложениях I и II, и о них кратко говорилось в п. 110), а также таблицы их логарифмов. Здесь даются более полные сведения о пользовании как этими таблицами, так и таблицами функций вообще. При приведении примеров используются следующие таблицы:

1. В. М. Брадис, Четырехзначные математические таблицы, Учпедгиз, 1964.

2. Б. И. Сегал и К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1959 и последующие годы издания.

Заметим, что таблицы составляются по-разному, поэтому рекомендуется, прежде чем приступать к вычислениям с помощью таблиц, внимательно прочитать указания (объяснения) для пользования, которые всегда прилагаются к таблицам.

Сообщаемые здесь правила пользования таблицами относятся к любым употребительным таблицам функций (квадратов и квадратных корней, логарифмов и т. д.), но иллюстрируем мы их в основном на примере таблиц тригонометрических функций.

А) Устройство таблиц. Таблица функции $y=f(x)$ обычно содержит значения $y_n=f(x_n)$ функции для равноотстоящих значений аргумента $x_n=x_0+nh$, где $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ и h — постоянное положительное число.

x	y
x_0	$y_0=f(x_0)$
$x_1=x_0+h$	$y_1=f(x_1)$
$x_2=x_1+h$	$y_2=f(x_2)$
. . . .	. . . . . .
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=f(x_n)$
.	. . . . . .

Положительное число $h=x_i-x_{i-1}$ (разность двух соседних табличных значений аргумента) называется *шагом* таблицы. Иногда таблицы разбиваются на участки, каждый из которых имеет свой шаг. Точность таблицы определяется количеством верных знаков (цифр) табличных значений функции. Обычно все значения функции в таблице (или в отдельной ее части) округ-

ляются до одного и того же разряда. Этот разряд называют *младшим разрядом* табличных значений функции. Абсолютная погрешность табличных значений обычно не превышает половины единицы младшего разряда.

Приведем для примера два участка таблицы Брадиса для функции $\operatorname{tg} x$.

40°	0,8391
41°	0,8693
42°	0,9004

60°	1,732
61°	1,804
62°	1,881

Здесь шаг $h=1°$; все четыре знака (цифры) в значениях функции верные. Младшим разрядом табличных значений функции является четвертый десятичный разряд (10^{-4}) на первом участке и третий десятичный разряд (10^{-3}) на втором.

Б) Табличные разности. При работе с таблицами используются табличные разности; ограничимся здесь только разностями первого порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ \ldots$$

и вообще

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n. \tag{220.1}$$

Каждая разность обычно записывается мелким шрифтом справа между строками, в которых указаны соседние табличные значения функций.

x	y	Δy
x_0	y_0	
		Δy_0
x_1	y_1	
		Δy_1
x_2	y_2	
		Δy_2
x_3	y_3	
		Δy_3
x_4	y_4	

Все табличные разности выражают целыми числами в единицах младшего разряда табличных значений функции. Табличная разность может быть нулем, положительным или отрицательным числом. В качестве примера приведем табличные разности пер-

вого порядка для функции $y=\sin x$ на различных участках таблицы XII (В. М. Брадис).

x	y	Δy
1,40	0,9854	
1,41	9871	17
1,42	9887	16
1,43	9901	14
1,44	9915	14

x	y	Δy
2,90	0,2392	
2,91	2295	−97
2,92	2198	−97
2,93	2100	−98
2,94	2002	−98

В таблицах Брадиса разности явно не выписаны, а в таблицах Сегала и Семендяева выписаны.

В) Линейная интерполяция. В любых таблицах функций приведены лишь некоторые (обычно равноотстоящие, с шагом h) значения аргумента. Поэтому непосредственно по таблице можно найти только значения функции для этих табличных значений аргумента. Так, например, по таблице в приложении I, где аргументом является угол, измеренный в градусной мере, мы можем найти только тригонометрические функции угла, измеренного целым числом градусов. Остается пока открытым вопрос: как искать, например, $\sin 2°15'$ или $\operatorname{tg} 39°45'$? По таблице же (приложение II), где аргументом является число (или радианная мера угла), можем найти тригонометрические функции аргумента, выраженного с точностью до 0,1. Остается пока открытым вопрос: как искать, например, $\cos 0{,}25$ или $\operatorname{tg} 1{,}425$? В связи с этим будем называть задачу о вычислении значения таблично заданной функции для промежуточного значения аргумента (не имеющегося в таблице) *частной задачей интерполяции*.

Пример 1. В таблице XII (Брадис) находим

x	$\sin x$
0,45	0,4350
0,46	0,4439

т. е. $\sin 0{,}45=0{,}4350$ и $\sin 0{,}46=0{,}4439$. Частной задачей интерполяции является, например, задача о нахождении $\sin 0{,}452$.

Простейшим методом решения такой задачи является *метод линейной интерполяции*. Линейная интерполяция состоит в том, что функция $y=f(x)$, заданная на отрезке $[x_0, x_1]$, заменяется линейной функцией $y=P(x)=a_0+a_1x$, которая удовлетворяет условиям

$$P(x_0)=y_0=f(x_0) \quad \text{и} \quad P(x_1)=y_1=f(x_1). \qquad (220.2)$$

Геометрически это означает, что дугу кривой $y=f(x)$ между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ мы заменяем хордой M_0M_1 (рис. 304).

Коэффициенты a_0, a_1 уравнения $y=a_0+a_1x$ прямой, отрезком которой является хорда M_0M_1, нетрудно получить из условий

$$\begin{cases} y_0=a_0+a_1x_0, \\ y_1=a_0+a_1x_1 \end{cases} \tag{220.3}$$

(выражающих, что прямая проходит через «табличные» точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$). Вычитая верхнее уравнение (220.3) из нижнего, находим,

$$y_1-y_0=a_1(x_1-x_0),$$

$$a_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y_0}{h}$$

и для a_0 имеем $a_0=y_0-\frac{\Delta y_0}{h}x_0$.

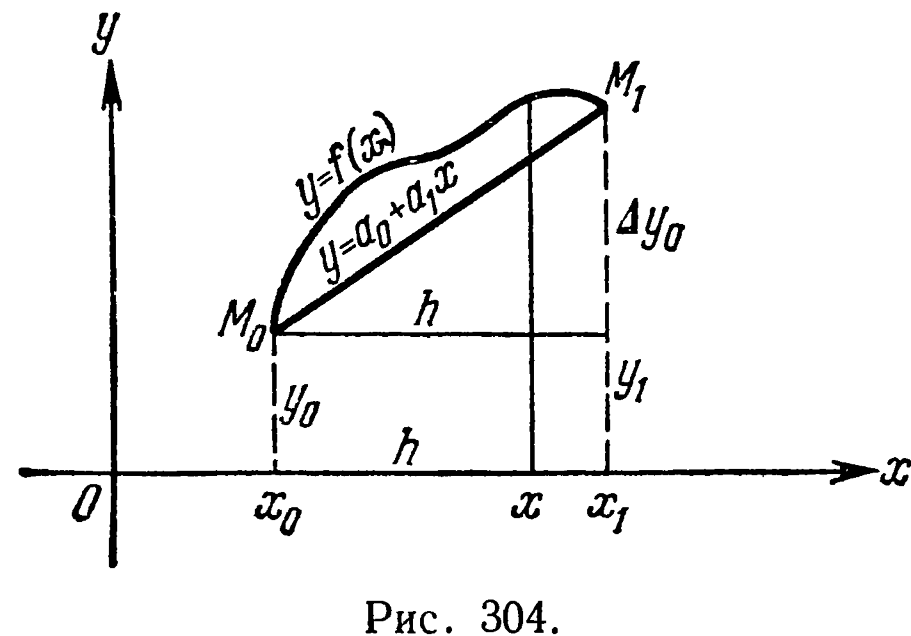


Рис. 304.

После простых преобразований предоставляемых читателю, мы сведем уравнение $y=a_0+a_1x$ (с найденными значениями a_0, a_1) к виду

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0. \tag{220.4}$$

Последняя формула (220.4) называется *формулой линейной интерполяции*. Этой формулой пользуются для отыскания промежуточных (приближенных) значений функции, т. е. тех значений которых нет в таблице. Так как обычно x берется внутри отрезка $[x_0, x_1]$, то выполняются неравенства $0<\frac{x-x_0}{h}<1$, так что к y_0 прибавляется какая-то часть Δy_0. Число $\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0$, которое надо прибавить к y_0, чтобы получить значение линейной функции (220.4) в точке x, называется *поправкой*. Эту поправку принято записывать целым числом единиц того же разряда, что и Δy_0, т. е. младшего разряда табличных значений функции y. На практике формула (220.4) применяется в виде

$$y=y_0+\text{поправка}.$$

Поправки могут быть даны в таблице, а могут и не быть даны. Во втором случае приходится их вычислять самостоятельно. Приведем некоторые примеры.

Пример 2. Найти $\lg 41°2'$ по таблицам Брадиса.

Решение. В таблице имеются следующие значения: $\lg 41°0'=0{,}8693$ и поправка на $2'$, равная 10.

Следовательно,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}0{,}8693\\ 10\end{array}\\ \operatorname{tg} 41^\circ 2' = \overline{0{,}8703.} \end{array}$$

Поправка на $2'$ может быть получена так. В таблице имеются следующие значения:

$$\operatorname{tg} 41^\circ 0' = 0{,}8693,$$
$$\operatorname{tg} 41^\circ 6' = 0{,}8724.$$

В нашем случае $h = 6'$, $\Delta y_0 = 31$ и $\frac{x - x_0}{h} = \frac{41^\circ 2' - 41^\circ 0'}{6'} = \frac{1}{3}$. Следовательно, поправка $\frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 = \frac{31}{3} = 10$. Заметим, что $\Delta y_0 = 31 \cdot 10^{-4}$ и поправка равна $\frac{1}{3} \cdot 31 \cdot 10^{-4}$, но, согласно договоренности, Δy_0 и поправку (которая округлена) записываем целым числом единиц младшего разряда табличных значений.

Пример 3. Найти $\sin 3{,}0052$ по таблицам Сегала и Семендяева.

Решение. В таблице имеются следующие значения:

x	$\sin x$	
3,005	0,13617	
		−99
3,006	0,13518	

В нашем случае $h = 0{,}001$, $\Delta y_0 = -99$ (эта табличная разность указана в таблице между строк) и $\frac{x - x_0}{h} = \frac{3{,}0052 - 3{,}005}{0{,}001} = 0{,}2$. Следовательно, поправка $\frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 = 0{,}2 \cdot (-99) = -20$ (округляем до целых единиц). Значит,

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r}0{,}13617\\ 20\end{array}\\ \sin 3{,}0052 = \overline{0{,}13597.} \end{array}$$

Пример 4. Найти $\sin 0{,}452$ по таблицам Брадиса.

Решение. В таблице XII имеются следующие значения:

x	$\sin x$
0,45	0,4350
0,46	0,4439

Ни табличные разности, ни поправки в этой таблице не выписаны. Вычислим их. В нашем случае имеем $h=0{,}01$, $\Delta y_0=89$ и $\frac{x-x_0}{h}=\frac{0{,}452-0{,}450}{0{,}1}=0{,}2$. Поэтому поправка $\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0=0{,}2\cdot 89=18$ (округляем поправку до целого числа единиц). Следовательно,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}0{,}4350\\ 18\end{array} \\ \hline \sin 0{,}452=0{,}4368. \end{array}$$

В пятизначных таблицах Сегала и Семендяева находим сразу $\sin 0{,}452=0{,}43677$.

Г) Обратная линейная интерполяция. Поставим теперь обратную задачу: по данному значению функции, для которой имеется таблица, найти соответствующее значение аргумента. Если данное значение функции имеется в таблице, то мы просто пишем соответствующее значение аргумента. Например, по таблице VIII Брадиса $\arcsin 0{,}5934=36°24'$ и по таблице XII Брадиса $\arccos 0{,}5978=0{,}93$. Если же данного значения функции в таблице нет, то будем пользоваться *обратной линейной интерполяцией*, находя приближенно соответствующее промежуточное значение аргумента, т. е. фактически приближенное промежуточное значение обратной функции. Если на некотором участке таблицы функция $y=f(x)$ имеет обратную функцию $x=g(y)$ (для этого существенно условие монотонности функции $y=f(x)$, см. п. 35), то значения этой обратной функции (т. е. значения x при заданных значениях y) можно находить приближенно по той же формуле (220.4). Для этого разрешим равенство (220.4) относительно x:

$$x=x_0+\frac{y-y_0}{\Delta y_0}h. \qquad (220.5)$$

Формула (220.5) называется *формулой обратной линейной интерполяции*.

Приведем некоторые примеры.

Пример 5. Найти $\operatorname{arctg} 0{,}2108$ по таблице IX Брадиса.

Решение. Обозначим искомое значение $\operatorname{arctg} 0{,}2108$ через x и $\operatorname{tg} x$ через y. Этим самым сводим задачу к нахождению аргумента x по известному значению функции $y=\operatorname{tg} x=0{,}2108$. Заданное значение $y=\operatorname{tg} x=0{,}2108$ заключено между числами 0,2107 и 0,2126, имеющимися в таблице: $0{,}2107<0{,}2108<0{,}2126$. Обычно из двух табличных значений функции, между которыми заключено заданное значение функции y, в качестве y_0 берут то, которое соответствует меньшему значению аргумента.

В нашем случае имеем $y_0=0{,}2107$; $y_1=0{,}2126$; $\Delta y_0=y_1-y_0=0{,}0019$; $x_0=11°54'$ и $h=6'$. Поправка $x-x_0$, вычисленная

по формуле (220.5), равна

$$\frac{y-y_0}{\Delta y_0}h=\frac{0,2108-0,2107}{0,0019}\cdot 6'=\frac{1}{19}6'\approx 19''.$$

Прибавив эту поправку к табличному значению аргумента $x_0=\operatorname{arctg} y_0=11°54'$, получим $x=\operatorname{arctg} 0,2108=11°54'19''$.

Пример 6. Найти острый угол x по таблице XVI Брадиса, если известно, что $\lg\cos x=\bar{1},8815$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\lg\cos x$. Заданное значение $y=\lg\cos x=\bar{1},8815$ заключено между значениями $\bar{1},8810$ и $\bar{1},8817$, имеющимися в таблице: $\bar{1},8810<\bar{1},8815<\bar{1},8817$. В нашем случае в качестве y_0 возьмем $\bar{1},8817$. Итак, $y_0=\bar{1},8817$; $y_1=\bar{1},8810$; $\Delta y_0=y_1-y_0=-0,0007$; $x_0=40°24'$ и $h=6'$.

Поправка $x-x_0$, вычисленная по формуле (220.5), равна

$$\frac{y-y_0}{\Delta y_0}h=\frac{\bar{1},8815-\bar{1},8817}{-0,0007}\cdot 6'=\frac{2}{7}\cdot 6'\approx 1'43''.$$

Прибавив эту поправку к табличному значению аргумента x_0, получим $x=40°24'+1'43''=40°25'43''$.

221. Решение треугольников. Сводка основных формул. На протяжении этого и следующих пп. 222 и 223 будем придерживаться следующих стандартных обозначений элементов треугольника: стороны обозначаются через a, b, c; противолежащие им углы через A, B, C (т. е. теми же буквами, что соответствующие вершины); высоты через h_a, h_b, h_c; радиусы вписанной и описанной окружностей через r и R соответственно; площадь треугольника обозначаем, как обычно S. Основными элементами треугольника называем его стороны и углы.

Задание некоторых из основных элементов треугольника определяет все остальные его элементы (в том числе и основные). Под решением треугольника понимают отыскание его элементов (обычно лишь основных) по заданным. Для косоугольных треугольников основными являются следующие четыре задачи: I) даны сторона и два угла; II) даны две стороны и угол, заключенный между ними; III) даны две стороны и угол, лежащий против одной из них; IV) даны три стороны; требуется определить остальные основные элементы треугольника.

В простейшем случае прямоугольного треугольника задание одного острого угла определяет и второй. Поэтому для прямоугольных треугольников удобно классифицировать основные задачи несколько иначе: I) даны гипотенуза и острый угол; II) даны катет и острый угол; III) даны гипотенуза и катет; IV) даны два катета; требуется найти остальные основные элементы треугольника.

При решении треугольников используются различные соотношения между элементами треугольника, полученные в пп. 216—

—219 (в первую очередь теорема косинусов и теорема синусов), и некоторые другие, которые легко из них получаются. Для удобства читателя дадим здесь сводку формул, применяемых ниже при решении треугольников.

I. Теорема косинусов ((217.3), (217.4)):

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A, \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B, \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C. \end{aligned}\right\} \tag{221.1}$$

II. Теорема синусов ((218.3), (219.4)):

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{abc}{2S}. \tag{221.2}$$

Теорему синусов также полезно записывать в такой форме:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B};\quad \frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C};\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C} \tag{221.3}$$

(стороны относятся, как синусы противолежащих углов).

III. Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} \qquad (a\neq b). \tag{221.4}$$

Приводим вывод формулы (221.4). Из (221.2) имеем $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, откуда

$$a+b=2R(\sin A+\sin B)=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

и

$$a-b=2R(\sin A-\sin B)=4R\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

Разделив почленно последние равенства, получим

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}},\quad \text{если}\quad a\neq b.$$

IV. Формулы для площади треугольника ((201.1), (218.1), (218.4), (219.1), (219.5)):

$$S=\frac{1}{2}ah_a, \tag{221.5}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{221.6}$$

$$S=pr \tag{221.7}$$

(формула (221.7) чаще используется для вычисления r),

$$S=\frac{abc}{4R} \tag{221.8}$$

(эта формула чаще применяется для отыскания R),

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A. \qquad (221.9)$$

Кроме того, бывает полезна формула

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}. \qquad (221.10)$$

Для ее вывода заметим, что по теореме синусов

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Подставив эти выражения в (221.9), получим формулу (221.10).

Для прямоугольных треугольников помимо соотношений между элементами, указанных выше, имеются известные нам более простые соотношения, которые обычно и используются при решении прямоугольных треугольников. Напомним их (гипотенуза обозначена через c):

$$\left.\begin{aligned} a&=c\sin A=c\cos B,\\ b&=c\sin B=c\cos A;\end{aligned}\right\} \qquad (221.11)$$

$$\left.\begin{aligned} a&=b\,\mathrm{tg}\,A=b\,\mathrm{ctg}\,B,\\ b&=a\,\mathrm{tg}\,B=a\,\mathrm{ctg}\,A,\end{aligned}\right\} \qquad (221.12)$$

$$a^2+b^2=c^2. \qquad (221.13)$$

222. Решение прямоугольных треугольников. Рассмотрим четыре основные задачи на решение прямоугольных треугольников и укажем (в общем виде) один из возможных способов решения каждой из них.

Задача I. Даны гипотенуза c и один из острых углов, например угол A. Вычислить остальные основные элементы.

Решение. Искомые элементы B, a и b находим из равенств

$$B=90^\circ-A,\quad a=c\sin A\quad \text{и}\quad b=c\cos A.$$

Пример 1. Даны $c=0{,}555$ и $A=77^\circ$. Найти a, b и B с помощью таблицы тригонометрических функций (приложение I).

Решение. 1) $B=90^\circ-77^\circ=13^\circ$; 2) $a=c\sin A=0{,}555\times$ $\times 0{,}9744\approx 0{,}541$; 3) $b=c\cos A=0{,}555\cdot 0{,}2250\approx 0{,}125$ (результат вычисления записываем с тремя знаками после запятой).

Для проверки полученных результатов можно использовать любое из соотношений (221.11)—(221.13), не использованных при решении, например $a=b\,\mathrm{tg}\,A$. Имеем $a=0{,}125\cdot\mathrm{tg}\,77^\circ=0{,}125\times$ $\times 4{,}331\approx 0{,}541$. Имеет место совпадение результатов, если последние округлены до трех знаков.

Задача II. Даны катет a и один из острых углов, например угол A. Вычислить остальные основные элементы.

Решение. Согласно формулам п. 221

$$B=90^\circ-A,\quad b=a\operatorname{tg}B,\quad c=\frac{a}{\sin A}.$$

Задача III. Даны катет a и гипотенуза c. Вычислить остальные основные элементы.

Решение. Применяя формулы п. 221, будем иметь

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad b=c\cos A\quad \text{и}\quad B=90^\circ-A.$$

Пример 2. Даны $a=181{,}2$ и $c=262{,}8$. Найти b, A и B.

Решение. Этот пример будем решать с помощью логарифмических таблиц. Найдем A. Имеем $\sin A=a/c$, $\lg\sin A=\lg a-\lg c$. Находим

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r}\lg a=2{,}2582\\ \lg c=2{,}4196\end{array}\\ \hline \lg\sin A=\bar{1}{,}8386.\end{array}$$

Отсюда по таблице XVI Брадиса находим $A=43^\circ36'$; $B=90^\circ-43^\circ36'=46^\circ24'$. Катет b найдем, используя соотношения $b=a\operatorname{tg}B$ и $\lg b=\lg a+\lg\operatorname{tg}B$. В нашем случае

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\lg a=2{,}2582\\ \lg\operatorname{tg}B=0{,}0212\end{array}\\ \hline \lg b=2{,}2794.\end{array}$$

Отсюда находим b, применяя таблицу XIV: $b=190{,}3$.

Итак, $b=190{,}3$, $A=43^\circ36'$ и $B=46^\circ24'$.

Как видно из приведенного примера, при вычислениях с помощью логарифмических таблиц делают следующее:

1) пишут соответствующую формулу,

2) логарифмируют эту формулу,

3) подставив в последнюю формулу числовые данные, находят логарифм искомого элемента (или логарифм тригонометрической функции этого элемента),

4) зная логарифм искомого элемента, находят сам элемент.

Задача IV. Даны катеты a и b. Вычислить остальные основные элементы.

Решение. Согласно формулам (221.12) имеем $\operatorname{tg}A=a/b$, откуда $A=\operatorname{arctg}(a/b)$, далее находим $B=90^\circ-A$, а потом найдем и гипотенузу c по формуле $c=a/\sin A$.

223. Решение косоугольных треугольников.

Задача I. Даны сторона a и два угла A и B; предполагается, что $A+B<180^\circ$.

Угол C находим сразу же:

$$C=180^\circ-(A+B).$$

Остальные основные элементы треугольника (стороны b и c) можно найти, например, по теореме синусов (221.3):

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\quad \text{и}\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Задача всегда имеет решение, и притом единственное.

Пример 1. Дано: $a=40{,}0$, $A=28^\circ$ и $B=31^\circ$. Найти C, b и c.

Решение. $C = 180° - (28° + 31°) = 121°$. Стороны b и c найдем двумя способами: при помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций (приложение I) и при помощи логарифмических таблиц (Брадис).

а) При помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций (приложение I):

$$\sin A = \sin 28° = 0{,}4695, \quad \sin B = \sin 31° = 0{,}5150$$

и

$$\sin C = \sin 121° = \sin (90° + 31°) = \cos 31° = 0{,}8572.$$

Далее имеем

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{40 \sin 31°}{\sin 28°} = \frac{40 \cdot 0{,}5150}{0{,}4695} = 40 \cdot 0{,}5150 \cdot \frac{1}{0{,}4695} \approx 43{,}89 \approx 43{,}9,$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{40 \sin 121°}{\sin 28°} = \frac{40 \cdot 0{,}8572}{0{,}4695} = 40 \cdot 0{,}8572 \cdot \frac{1}{0{,}4695} \approx 73{,}03 \approx 73{,}0.$$

При вычислении b и c деление на $\sin A$ можно заменить умножением на обратное ему число $1/\sin A$, которое можно найти, например, по таблице II (Брадис): $\frac{1}{\sin 28°} = \frac{1}{0{,}4695} = 2{,}130$. Для контроля используем, например, первую из формул (221.1):

$$1600 \approx 43{,}9^2 + 73{,}0^2 - 2 \cdot 43{,}9 \cdot 73{,}0 \cdot 0{,}883 \approx$$
$$\approx 1927 + 5329 - 5659 = 1597.$$

Небольшое расхождение результатов (менее 0,2%) $1600 \approx 1597$ можно отнести за счет погрешности таблиц и вычислений. Результаты можно признать совпадающими.

б) При помощи логарифмических таблиц (Брадис): имеем $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, откуда $\lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$. В нашем случае

$$\begin{aligned} \lg a &= 1{,}6021 \\ \lg \sin B &= \bar{1}{,}7118 \\ -\lg \sin A &= 0{,}3284 \\ \hline \lg b &= 1{,}6423. \end{aligned}$$

По таблице Брадиса: $b = 43{,}88 \approx 43{,}9$. Аналогично вычисляется сторона c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \text{ и } \lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \lg a &= 1{,}6021 \\ \lg \sin C &= \bar{1}{,}9331 \\ -\lg \sin A &= 0{,}3284 \\ \hline \lg c &= 1{,}8636. \end{aligned}$$

По таблице Брадиса: $c \approx 73{,}05 \approx 73{,}0$.

Мы видим, что результаты, полученные способами а) и б), совпадают с точностью до трех знаков.

Задача II. Даны две стороны a и b и угол C между ними.

а) Решение при помощи таблиц приложения I. Сторону c можно найти по теореме косинусов (221.1):

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}.$$

Зная три стороны, можно, снова применив теорему косинусов, найти $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Так как $0°<A<180°$, то

$$A=\arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Наконец, $B=180°-(A+C)$.

б) Решение при помощи логарифмических таблиц. Если при решении треугольника мы будем пользоваться логарифмическими таблицами, то формулы, использованные в первом способе решения, неудобны. Углы A и B в этом случае лучше находить при помощи теоремы тангенсов (221.4).

Заметив, что $A+B=180°-C$, мы можем писать

$$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

После этого формула (221.4) примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}. \qquad (223.1)$$

Так как $0°<|A-B|<180°$, то $0°<\frac{|A-B|}{2}<90°$ и нахождение углов A и B сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2},\\ \frac{A-B}{2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right).\end{cases}$$

Сторону c можно определить по теореме синусов: $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$.

Пример 2. Дано: $a=2{,}21$, $b=2{,}86$, $C=65°20'$. Найти c, A и B.

а) Решение при помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций (Брадис). По теореме косинусов в нашем случае имеем

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2{,}21^2+2{,}86^2-2\cdot 2{,}21\cdot 2{,}86\cos 65°20' \approx$$
$$\approx 4{,}884+8{,}180-5{,}276=7{,}788.$$

(По таблице VIII Брадиса $\cos 65°20'=0{,}4174$). По таблице IV Брадиса (Квадратные корни) находим $c\approx 2{,}79$. Применив снова теорему косинусов, но теперь уже для нахождения угла A, будем иметь

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx\frac{8{,}180+7{,}788-4{,}884}{2\cdot 2{,}86\cdot 2{,}79}\approx\frac{11{,}084}{15{,}959}\approx 0{,}6945;$$

$A \approx \arccos 0{,}6945 \approx 46°01'$. Наконец, $B = 180° - (A + C) \approx 180° - (46°01' + 65°20') = 68°39'$. Для контроля используем, например, теорему синусов: $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$. В нашем случае

$$\frac{a}{b} = \frac{2,21}{2,86} \approx 0,770 \quad \text{и} \quad \frac{\sin A}{\sin B} \approx \frac{\sin 46°01'}{\sin 68°39'} \approx \frac{0,7195}{0,9314} \approx 0,772.$$

Имеется удовлетворительное совпадение результатов.

б) Решение при помощи логарифмических таблиц (Брадис). Используя теорему тангенсов, будем иметь

$$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \tag{223.2}$$

(формулу (223.1) мы пишем в виде (223.2), ибо у нас $b > a$). Найдем $\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}$ при помощи логарифмических таблиц. Прологарифмировав (223.2), получим

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \lg(b-a) + \lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2} - \lg(a+b).$$

В нашем случае

$$\begin{aligned}
\lg(b-a) &= \lg 0,65 &&= \bar{1},8129\\
\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2} &= \lg\operatorname{ctg} 32°40' &&= 0,1931\\
-\lg(a+b) &= -\lg 5,07 &&= \bar{1},2950\\
\hline
\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} &= \bar{1},3010 \quad \text{и} \quad \frac{B-A}{2} \approx 11°18'34''.
\end{aligned}$$

Углы A и B находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{B-A}{2} = 11°18'34'', \\[2mm] \dfrac{A+B}{2} = 57°20'. \end{cases}$$

$A = 46°1'26''$ и $B = 68°38'34''$. Если последние результаты мы округлим до минут, то получим $A = 46°1'$ и $B = 68°39'$. Сторону c можно, например, определить по теореме синусов:

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}, \quad \lg c = \lg a + \lg\sin C - \lg\sin A;$$

$$\begin{aligned}
\lg a &= 0,3444\\
\lg\sin C &= \bar{1},9584\\
-\lg\sin A &= 0,1430, \quad \text{ибо} \quad \lg\sin A = \bar{1},8570\\
\hline
\lg c &= 0,4458, \quad c = 2,791.
\end{aligned}$$

Мы видим, что результаты, полученные способами а) и б) для углов, совпадают с точностью до минуты, а для стороны c совпадают три знака.

Задача III. Даны две стороны треугольника (a и b) и угол, лежащий против одной из них, например угол A.

Эта задача принципиально отличается от двух предыдущих, так как задание двух сторон и угла, лежащего против одной из них, может определять треугольник неоднозначно (в п. 189 уже

было отмечено, что построение треугольника по этим данным может привести либо к двум различным треугольникам, либо к одному, либо задача вообще может не иметь решений). Проведем полное исследование задачи. Рассмотрим три случая: 1) $a>b$; 2) $a<b$; 3) $a=b$.

1) $a>b$ (данный угол A лежит против большей из двух данных сторон).

Соответствующая задача на построение всегда имеет решение, и притом единственное. На рис. 305 показано, как строится

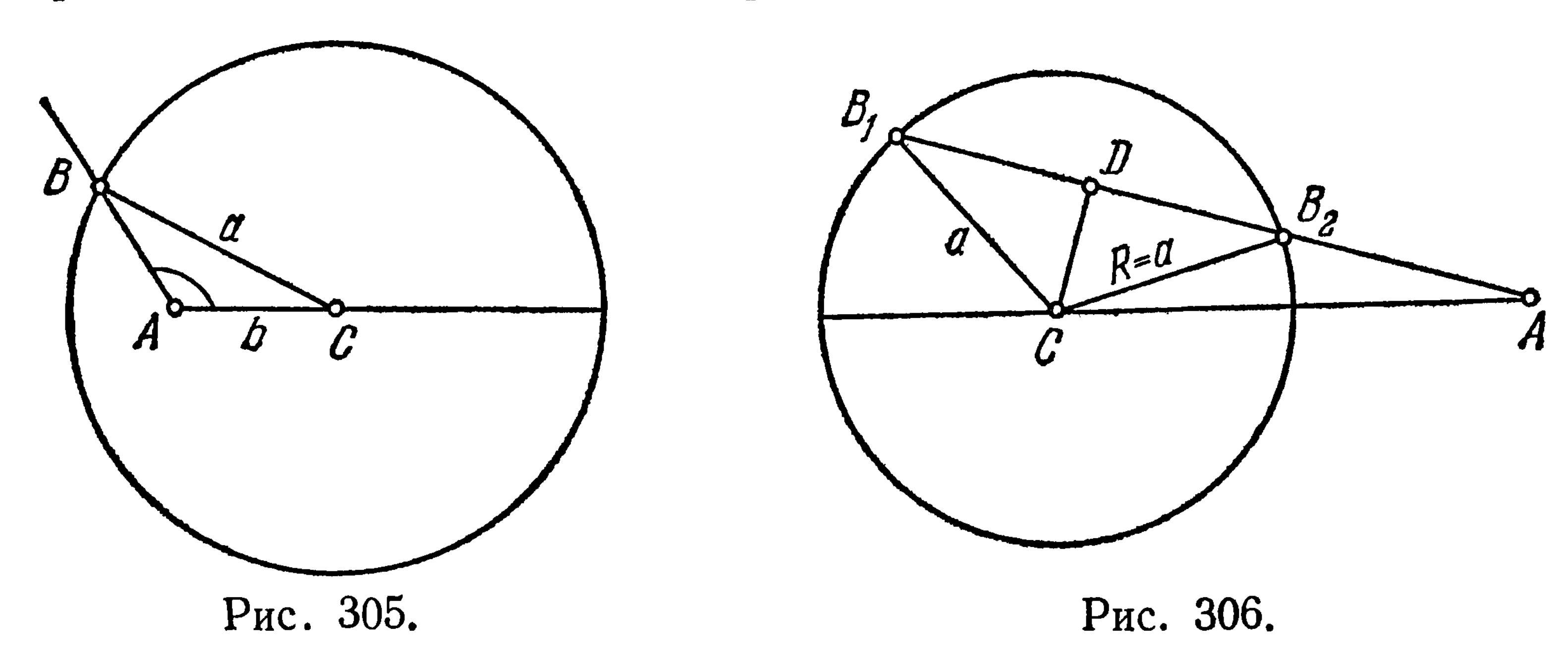


Рис. 305. Рис. 306.

треугольник, если: а) угол A тупой ($CA=b$, $CB=R=a>b$). Рекомендуем читателю построить треугольники, рассмотрев остальные две возможности: б) A — прямой угол; в) A — острый угол.

Острый угол B, который лежит против меньшей стороны b, можно найти, например, по теореме синусов: $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$, откуда $B=\arcsin\left(\frac{b}{a}\sin A\right)$. Третий угол C находится из равенства $C=180°-(A+B)$. Третью сторону c можно найти, например, по теореме синусов: $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$. Итак, если $a>b$ и дан угол A, лежащий против большей стороны a, то задача имеет решение, и притом только одно.

2) $a<b$ (данный угол A лежит против меньшей из двух данных сторон). Заметим, что если угол $A\geqslant 90°$ (A тупой или прямой), то задача не имеет решения, ибо ни тупой, ни прямой угол не может лежать против меньшей стороны. Остается рассмотреть случай, когда $A<90°$ (A — острый угол). Изучим нашу задачу и соответствующую задачу на построение. При этом придется различать три возможности:

а) Окружность радиуса $R=a$ с центром в точке C пересечет другую сторону угла A в двух точках B_1 и B_2 (рис. 306). Это будет иметь место при условии, что $a>CD$, где CD — перпендикуляр, опущенный из C на вторую сторону угла A. Учитывая,

что $CD = b \sin A$ (из прямоугольного треугольника ADC), последнее неравенство можно заменить неравенством $a > b \sin A$ или неравенством $\frac{b}{a} \sin A < 1$.

Итак, если $\frac{b}{a} \sin A < 1$, то соответствующая задача на построение, а следовательно и наша задача, будет иметь два решения. В качестве угла B можно взять острый угол B_1 или тупой угол B_2. Оба значения угла B находятся из уравнения $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ (теорема синусов): $B_1 = \arcsin\left(\frac{b}{a} \sin A\right)$ и $B_2 = 180° - B_1$. Угол $C_1 = 180° - (A + B_1)$ и угол $C_2 = 180° - (A + B_2) = B_1 - A$. Стороны c_1 и c_2 находятся по теореме синусов: $c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$ и $c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A}$.

б) Окружность радиуса $R = a$ с центром в точке C не пересечет другой стороны угла A (рис. 307). Этот случай будет иметь

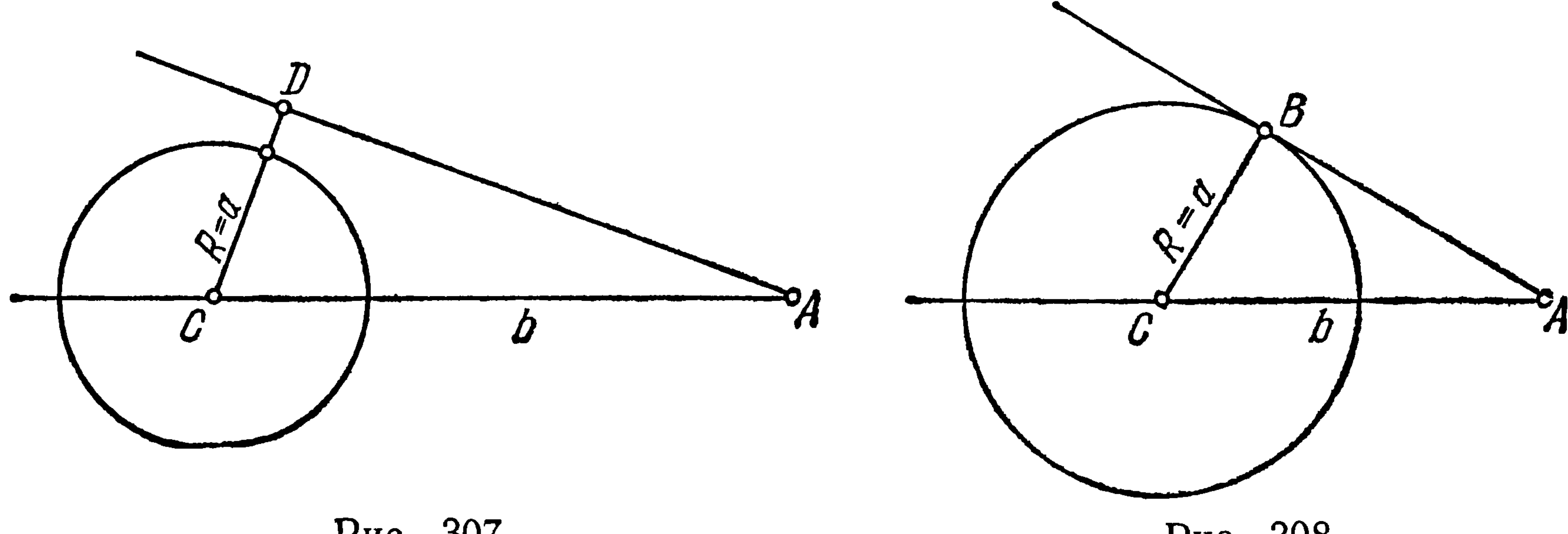


Рис. 307. Рис. 308.

место при условии, что $a < CD$. Учитывая, что $CD = b \sin A$ (из прямоугольного треугольника ADC), последнее неравенство можно заменить неравенством $a < b \sin A$ или неравенством $\frac{b}{a} \sin A > 1$.

Итак, если $\frac{b}{a} \sin A > 1$, то соответствующая задача на построение, а следовательно и наша задача, решения не имеет.

в) Окружность радиуса $R = a$ с центром в точке C коснется другой стороны угла A (рис. 308). Учитывая, что $CB = b \sin A$ (из прямоугольного треугольника ABC), последнее равенство можно заменить равенством $a = b \sin A$. Итак, если $\frac{b}{a} \sin A = 1$, то соответствующая задача на построение, а следовательно и наша задача, имеет решение, и притом единственное.

3) $a = b$ (рис. 309). Искомый треугольник равнобедренный. Решение сводится к построению прямоугольного треугольника ADC с гипотенузой b и острым углом A. Искомый треугольник ABC будет состоять из двух таких равных прямоугольных треугольников (ADC и BDC). Если $a = b$ и угол A острый, то задача

имеет решение, и притом единственное. Остальные основные элементы треугольника находятся по формулам $B = A$, $C = 180° - 2A$, $c = 2AD = 2a \cos A$.

Результаты, полученные при решении задачи III, можно представить в виде одной таблицы-схемы.

$a=b$		$a>b$	$a<b$			
$A \geqslant 90°$	$0<A<90°$	$0<A<180°$	$A \geqslant 90°$	$A<90°$		
				$a<b \sin A$	$a=b \sin A$	$a > b \sin A$
нет решения	одно решение	одно решение	нет решения	нет решения	одно решение	два решения

Пример 3. Даны две стороны $a = 25{,}4$, $b = 56{,}6$ и угол $A = 70°30'$. Найти B, C и c.

Решение. В нашем случае $a < b$ и угол $A < 90°$. Чтобы узнать, сколько возможно решений, найдем $b \sin A$. Имеем $b \sin A = 56{,}6 \cdot \sin 70°30' = 56{,}6 \times 0{,}9426 = 53{,}35$, откуда видим, что $a < b \sin A$, т. е. треугольника с данными нашей задачи не существует.

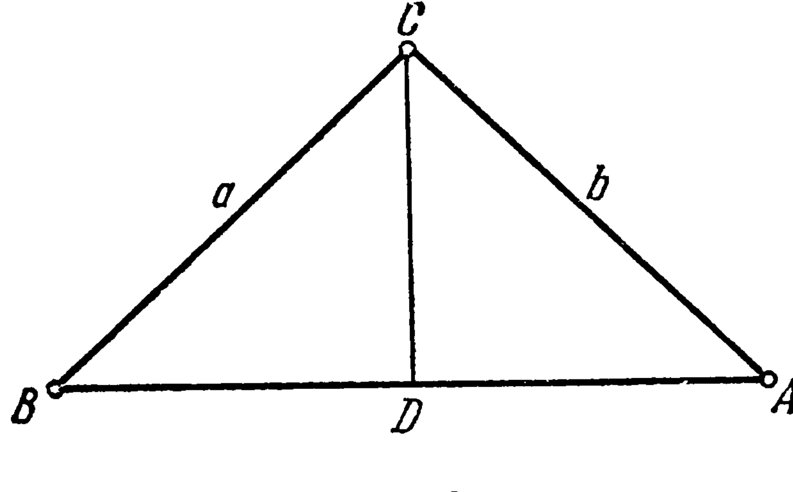


Рис. 309.

Пример 4. Даны две стороны $a = 68{,}5$, $b = 99{,}2$ и угол $A = 28°20'$. Найти B, C и c.

Решение. В нашем случае опять $a < b$ и угол $A < 90°$. Снова ищем произведение $b \sin A$. На этот раз

$$b \sin A = 99{,}2 \cdot \sin 28°20' = 99{,}2 \cdot 0{,}4746 = 47{,}08 < 68{,}5,$$

т. е. $b \sin A < a$, и задача имеет два решения (см. рис. 306). По теореме синусов

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{47{,}08}{68{,}5} = 0{,}687.$$

Имеем два решения:

1. $B_1 = \arcsin 0{,}687 = 43°24'$; $C_1 = 180° - (28°20' + 43°24') = 108°16'$. По той же теореме синусов

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{68{,}5 \cdot 0{,}9496}{0{,}4746} = 137{,}1.$$

2. $B_2 = 180° - B_1 = 136°36'$; $C_2 = 180° - (28°20' + 136°36') = 15°4'$; $c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} = \frac{68{,}5 \cdot 0{,}2599}{0{,}4746} = \frac{17{,}803}{0{,}4746} = 37{,}5.$

Задача IV. Даны три стороны треугольника. Без ограничения общности будем считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. По трем данным сторонам можно построить единственный треугольник, если $c < a+b$, т. е. бо́льшая сторона меньше суммы двух других сторон. Если же $a+b \leqslant c$, то треугольника со сторонами a, b и c не существует. В дальнейшем будем считать, что $c < a+b$.

а) Решение при помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций. Два угла треугольника можно найти по теореме косинусов:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

откуда (так как $0° < A < 180°$ и $0° < B < 180°$)

$$A = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{и} \quad B = \arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}. \qquad (223.3)$$

Угол C можно уже найти проще: $C = 180° - (A+B)$.

б) Решение при помощи логарифмических таблиц. Если при решении треугольника мы будем пользоваться логарифмическими таблицами, то теорема косинусов для этого неудобна. Можно, например, поступить так. Сначала найти площадь S треугольника по формуле Герона (221.6):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где} \quad 2p = a+b+c.$$

Затем, воспользовавшись формулой (221.9): $S = \frac{bc\sin A}{2}$, найти $\sin A = \frac{2S}{bc}$. Так как мы предположили, что a — не наибольшая сторона, то угол A острый и $A = \arcsin\frac{2S}{bc}$. Аналогично получаем $B = \arcsin\frac{2S}{ac}$. Угол $C = 180° - (A+B)$.

Пример 5. Дано: $a = 28$, $b = 35$ и $c = 42$. Найти A, B и C.

В данном случае $c < a+b$ $(42 < 63)$ и пример имеет решение.

а) Решение при помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций. Согласно формулам (223.3) имеем

$$A = \arccos\frac{35^2+42^2-28^2}{2\cdot35\cdot42} = \arccos\frac{2205}{2940} = \arccos 0{,}7500 = 41°24',$$

$$B = \arccos\frac{28^2+42^2-35^2}{2\cdot28\cdot42} = \arccos\frac{1323}{2352} = \arccos 0{,}5625 = 55°46'.$$

Угол C находим так: $C = 180° - (41°24' + 55°46') = 82°50'$.

б) Решение при помощи логарифмических таблиц. Согласно предыдущему имеем

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \lg\sin A = \lg 2S - \lg b - \lg c,$$

откуда

$$\lg 2S = \lg 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \lg 2 + \frac{1}{2}\lg p + \frac{1}{2}\lg(p-a) + \frac{1}{2}\lg(p-b) + \frac{1}{2}\lg(p-c).$$

В нашем случае $p=52,5$, $p-a=24,5$, $p-b=17,5$ и $p-c=10,5$;

$\lg 2=0,3010$	
$\frac{1}{2}\lg p=0,8601$	$\lg p=1,7202$
$\frac{1}{2}\lg(p-a)=0,6946$	$\lg(p-a)=1,3892$
$\frac{1}{2}\lg(p-b)=0,6215$	$\lg(p-b)=1,2430$
$\frac{1}{2}\lg(p-c)=0,5106$	$\lg(p-c)=1,0212$
$\lg 2S=2,9878.$	

Продолжаем работу с логарифмами, ибо сама площадь (S) в этом примере нас не интересует. Итак,

$\lg 2S=2,9878$	
$-\lg b=\bar{2},4559$	$\lg b=1,5441$
$-\lg c=\bar{2},3768$	$\lg c=1,6232$
$\lg\sin A=\bar{1},8205;$	$A=41°25'.$

Аналогично определяем угол B. Имеем $\lg\sin B=\lg 2S-\lg a-\lg c$;

$\lg 2S=2,9878$	
$-\lg a=\bar{2},5528$	$\lg a=1,4472$
$-\lg c=\bar{2},3768$	
$\lg\sin B=\bar{1},9174;$	$B=55°47'.$

Теперь находим $C=180°-(41°25'+55°47')=82°48'$.

Упражнения

1. Найти по таблицам Брадиса:
а) $\operatorname{tg} 22°9'$; б) $\sin 0,884$; в) $\sin 1,973$.

2. Найти с помощью обратной линейной интерполяции по таблицам Брадиса:
а) $\operatorname{arcctg} 0,8018$; б) $\arcsin 0,6485$.

3. Найти острый угол x по таблицам Брадиса, если известно, что:
а) $\lg\sin x=\bar{1},5430$; б) $\lg\operatorname{ctg} x=0,1020$.

4. Решить прямоугольные треугольники по указанным данным (a, b — катеты, c — гипотенуза):
а) $a=19,7$, $A=52°$; использовать таблицы тригонометрических функций (приложение I);
б) $a=953$, $b=2978$; использовать логарифмические таблицы;
в) $c=21,3$, $B=37°$; использовать таблицы приложения I;
г) $c=735,2$, $a=246,1$; использовать логарифмические таблицы.

5. Решить треугольники по указанным данным[1]:

а) $a=30$; $A=18°$ и $B=46°$;	е) $a=31$; $b=22$; $A=95°$;
б) $a=23,4$; $A=70°36'$ и $B=104°12'$;	ж) $a=15,4$; $b=30,8$; $A=15°24'$;
в) $a=40,6$; $b=75,0$; $C=32°$;	з) $a=1,45$; $b=2,34$; $A=72°45'$;
г) $a=51,3$; $b=21,2$; $C=13°30'$;	и) $a=20$; $b=35$; $c=50$;
д) $a=31$; $b=31$; $A=52°$;	к) $a=0,618$; $b=1,173$; $c=1,728$.

[1]) Рекомендуется решать примеры двумя способами: а) при помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций и б) при помощи логарифмических таблиц — и результаты сравнивать.

Глава XVIII

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 1. Правильные многоугольники

224. Выпуклые многоугольники. Вычислим сумму внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника. Для этого выберем какую-либо точку O внутри данного n-угольника (рис. 310) и соединим ее со всеми вершинами A, B, C, ... многоугольника. Он разобьется на n треугольников, каждый из которых имеет сумму внутренних углов, равную 180°. Но сумма углов всех n треугольников слагается из суммы внутренних углов многоугольника и полного угла в 360° при общей вершине O треугольников. Таким образом, сумма внутренних углов многоугольника равна

$$n \cdot 180° - 360° = (n-2)\,180°.$$

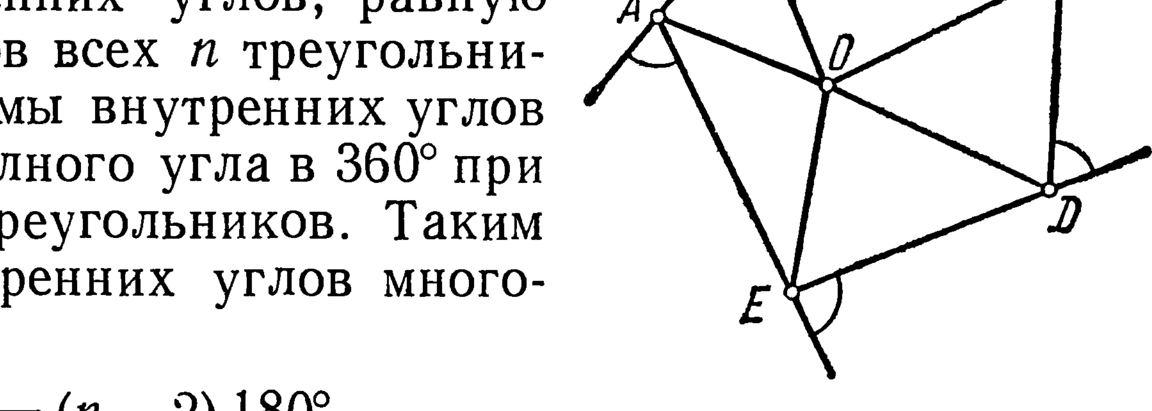


Рис. 310.

Сумма внешних углов n-угольника не зависит от числа его сторон и всегда равна четырем прямым. Действительно, каждый внешний угол равен двум прямым минус смежный с ним внутренний угол (рис. 310). Отсюда

$$\text{сумма внешних углов} = n \cdot 180° - \text{сумма внутренних углов} = n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°,$$

что и требовалось доказать.

Если у двух многоугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ и т. д. соответственно равны и углы между соответственными сторонами равны, то и многоугольники равны.

Действительно, совместим стороны AB и $A'B'$ наших многоугольников так, чтобы точки A и A', B и B' соответственно совпали и оба многоугольника оказались по одну сторону от прямой, на которой лежат совмещенные стороны. Это всегда возможно: оба многоугольника считаются у нас выпуклыми,

значит, каждый из них весь расположится по одну сторону от указанной прямой. Если многоугольники будут расположены по разные стороны от общей стороны, то один из них можно отразить относительно этой прямой (перегнуть по ней чертеж). Теперь в силу равенства углов B и B' стороны BC и $B'C'$ попадут на один луч и вследствие равенства сторон совпадут точки C и C'. Также совпадут точки D и D' и т. д. Оба многоугольника полностью совместятся.

Если у двух многоугольников стороны пропорциональны, а углы между соответственными сторонами равны, то такие многоугольники подобны.

Действительно, преобразуем первый многоугольник подобно с коэффициентом подобия, равным $k = A'B'/AB$. Тогда стороны его все станут равны сторонам второго многоугольника, а углы не изменятся. По признаку равенства многоугольников полученный многоугольник будет теперь равен второму данному многоугольнику, а тем самым исходные многоугольники подобны.

Еще раз обратим внимание на связь между площадями и периметрами подобных многоугольников. Общее правило, известное из п. 208,— отношение линейных размеров (в том числе и периметров) равно коэффициенту подобия, отношение площадей — квадрату этого коэффициента,— остается, конечно, справедливым всегда. Так, из

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{E'A'}{EA} = k$$

получим

$$\frac{A'B' + B'C' + \ldots + E'A'}{AB + BC + \ldots + EA} = k,$$

т. е. *периметры подобных многоугольников относятся, как соответствующие стороны.*

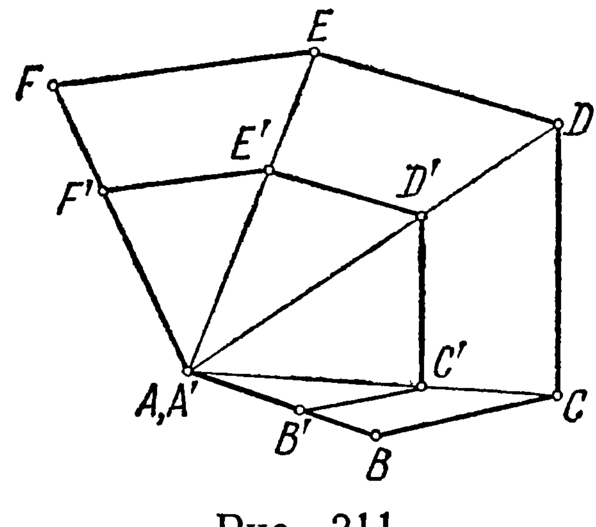


Рис. 311.

Далее, расположим многоугольники так, чтобы они были гомотетичны с центром гомотетии в одной из вершин, например A (рис. 311). Диагонали AC, AD, ..., исходящие из вершины A — центра подобия, разобьют их на треугольники, подобные, как треугольники с параллельными сторонами. Площади треугольников имеют отношения, равные квадрату коэффициента подобия (или, что то же самое, квадрату отношения сторон):

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \ldots = k^2,$$ откуда найдем

$$\frac{S_{A'B'C'\ldots F'}}{S_{ABC\ldots F}} = k^2,$$

т. е. *площади подобных многоугольников относятся, как квадраты их соответствующих сторон.*

225. Правильные многоугольники. Многоугольник называется *правильным*, если равны все его стороны и все углы. Среди треугольников правильным будет равносторонний треугольник и только он. Квадрат (и только квадрат) является правильным четырехугольником. Покажем, что существуют правильные многоугольники с любым числом сторон n, где $n \geqslant 3$. Для этого приведем два способа построения таких многоугольников.

Способ 1. Возьмем произвольную окружность и разделим ее на n равных частей. Такое построение далеко не при всяком n осуществимо циркулем и линейкой, но мы будем здесь считать, что такое построение сделано. Примем точки деления в их последовательном положении на окружности за вершины n-угольника, вписанного в эту окружность. Докажем, что построенный n-угольник — правильный. Действительно, стороны нашего многоугольника (рис. 312) суть хорды, стягиваемые равными дугами,

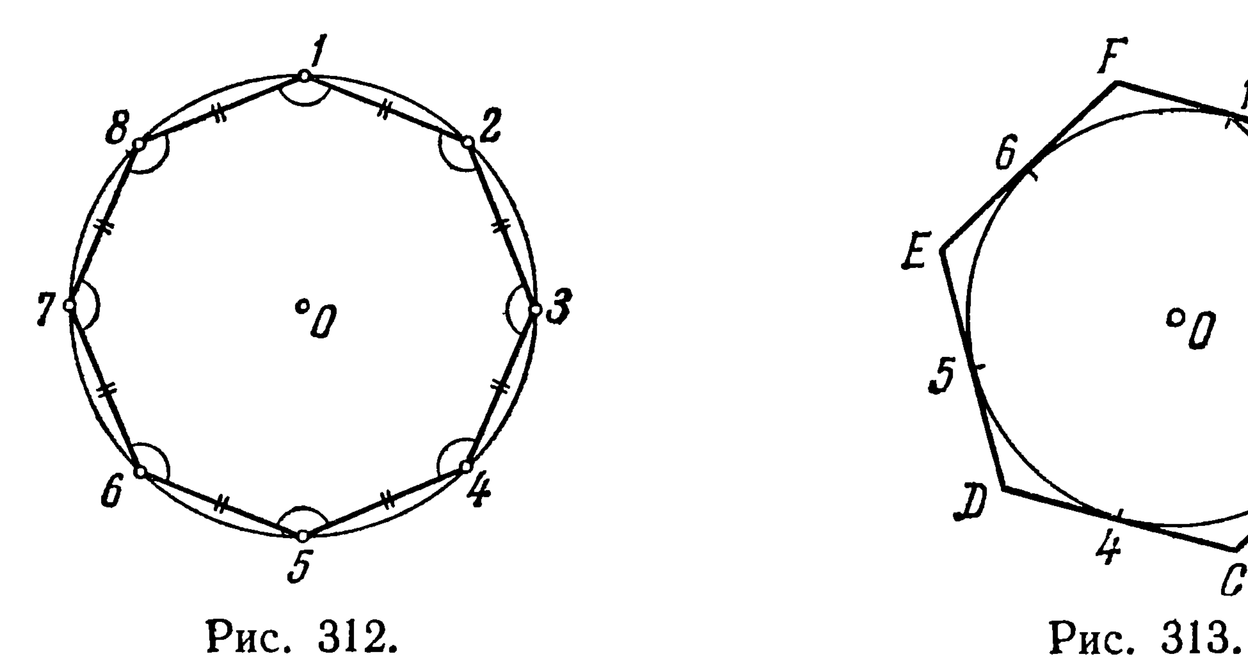


Рис. 312. Рис. 313.

и потому они равны между собой. Все углы опираются на равные дуги и потому также равны. Итак, многоугольник правильный.

Способ 2. Снова разделим окружность на n равных частей и проведем в точках деления касательные к окружности; ограничим каждую из касательных точками ее пересечения с касательными, проведенными в соседних точках деления. Получим правильный многоугольник, описанный около окружности (рис. 313). В самом деле, углы его все равны, так как каждый из них, как угол между касательными, измеряется полуразностью дуг, из которых меньшая всегда равна $(1/n)$-й части окружности, а бо́льшая — полной окружности минус $(1/n)$-я часть. Равенство сторон видно хотя бы из равенства треугольников, образованных парами полукасательных и хордами (например, треугольники $1A2$, $2B3$ и т. д.). Все они равнобедренные, имеют равные углы при вершинах и равные основания.

Два правильных n-угольника с одинаковым числом сторон подобны.

Действительно, стороны их заведомо находятся в постоянном отношении, равном отношению любой пары сторон. Кроме того, по теореме о сумме углов n-угольника всякий правильный n-угольник имеет одни и те же углы, равные $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Условия признака п. 224 выполнены, и n-угольники подобны.

Итак, *для всякого n правильные n-угольники подобны.* Отсюда непосредственно получаем ряд следствий:

1. *Два правильных n-угольника с равными сторонами равны.*

2. *Вокруг всякого правильного n-угольника можно описать окружность.*

Доказательство. Возьмем какой-либо правильный многоугольник с тем же числом сторон, что данный, построенный по первому способу, т. е. вписанный в окружность. Преобразуем его подобно так, чтобы он стал равен данному. Тогда окружность, описанная вокруг него, подобно преобразуется в окружность, описанную вокруг многоугольника, равного данному.

3. *В каждый правильный многоугольник можно вписать окружность.*

Доказательство аналогично. Полезно, однако, провести рассуждения и несколько иначе. Мы уже знаем, что вокруг данного многоугольника можно описать окружность. Возьмем ее центр. Стороны многоугольника служат ее хордами; будучи равны между собой, они должны одинаково отстоять от центра. Поэтому окружность с тем же центром и радиусом, равным расстоянию от центра до сторон многоугольника, будет касаться всех сторон многоугольника, т. е. будет вписанной окружностью.

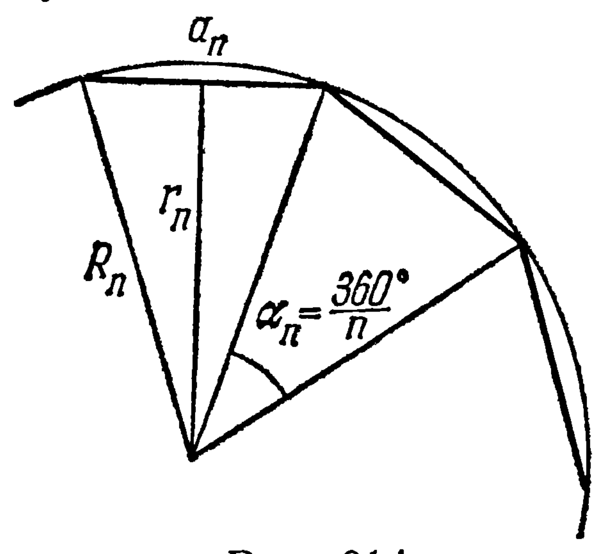


Рис. 314.

Итак, *вписанная и описанная окружности правильного многоугольника имеют общий центр.* Он называется *центром* данного правильного многоугольника. Радиус описанной окружности называется *радиусом* многоугольника, радиус вписанной окружности—его *апофемой.* Ясно, что апофема всегда меньше радиуса.

226. Соотношения между стороной, радиусом и апофемой. При данном n правильный многоугольник с n вершинами определен с точностью до подобия. Поэтому отношения между стороной, апофемой и радиусом должны зависеть только от n. Их легко выразить, пользуясь тригонометрией. Обратимся к рис. 314, где a_n, R_n и r_n обозначают соответственно сторону, радиус и апофему правильного n-угольника. Угол между радиусами, проведенными из центра в соседние вершины многоугольника, равен

$360°/n$. Легко видеть, что имеют место соотношения

$$r_n = R_n \cos \frac{180°}{n}, \qquad a_n = 2R_n \sin \frac{180°}{n}, \tag{226.1}$$

а также

$$\frac{a_n^2}{4} + r_n^2 = R_n^2, \tag{226.2}$$

по которым, зная любую из трех величин a_n, R_n, r_n, можно найти две другие.

В частности, для правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, имеем

$$a_3 = 2R \sin 60° = R\sqrt{3}, \qquad r_3 = R \cos 60° = \frac{1}{2} R; \tag{226.3}$$

для квадрата при тех же условиях

$$a_4 = 2R \sin 45° = R\sqrt{2}, \qquad r_4 = R \cos 45° = R\frac{\sqrt{2}}{2}; \tag{226.4}$$

для правильного шестиугольника

$$a_6 = 2R \sin 30° = R, \qquad r_6 = R \cos 30° = R\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{226.5}$$

В указанных частных случаях легко получить те же результаты и не используя общих формул; рекомендуем выполнить это читателю.

Пример. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a; найти длину стороны правильного шестиугольника, описанного около этой же окружности.

Решение. Сторона треугольника равна a, значит, радиус описанной окружности $R = a/\sqrt{3}$; он служит апофемой шестиугольника, и потому сторона последнего $b = 2R/\sqrt{3} = 2a/3$.

227. Периметр и площадь правильного n-угольника. Выразим периметр и площадь правильного n-угольника через его радиус. Сохраняя обозначения п. 226 и дополнительно обозначая периметр через P_n, будем иметь

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin \frac{180°}{n}.$$

Для вычисления площади заметим, что площадь одного треугольника из числа тех, на которые n-угольник разбивается радиусами, проведенными из центра в вершины, равна

$$S_\triangle = \frac{1}{2} R_n^2 \sin \frac{360°}{n},$$

откуда полная площадь n-угольника получается умножением на n:

$$S_n = \frac{1}{2} nR_n^2 \sin \frac{360°}{n}. \tag{227.1}$$

В частности, для треугольника имеем

$$P_3 = 3R\sqrt{3}, \quad S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2; \tag{227.2}$$

для квадрата

$$P_4 = 4R\sqrt{2}, \quad S_4 = 2R^2; \tag{227.3}$$

для правильного шестиугольника

$$P_6 = 6R, \quad S_6 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}. \tag{227.4}$$

228. Удвоение числа сторон правильного многоугольника. Выше уже отмечалось, что не при всяком числе сторон n можно выполнить построение правильного многоугольника по способу 1 или 2, ограничиваясь лишь циркулем и линейкой. Для некоторых n эта задача решается совсем просто ($n = 3$, 4, 6; читатель должен разобрать эти случаи самостоятельно). Для других n, например $n = 5$,— несколько сложнее (см. ниже, задачи). Гаусс нашел способ построения правильного 17-угольника (хотя, например, правильный 7- или 9-угольник нельзя построить с помощью циркуля и линейки). Гаусс показал также возможность построения правильного 257-угольника с помощью циркуля и линейки. Легко, однако, построить все правильные многоугольники с числом сторон n, последовательно возрастающим в два раза, начиная с некоторого исходного числа, например с $n = 3$, 6, 12, 24, ... или $n = 4$, 8, 16, 32, ...

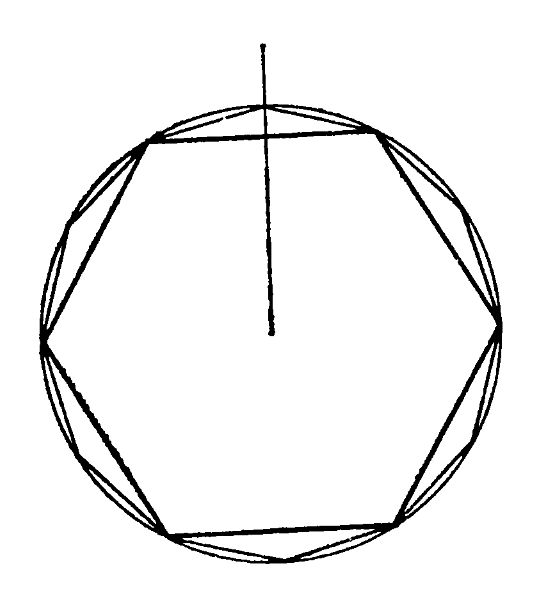


Рис. 315.

Так, пусть на рис. 315 изображен правильный n-угольник (фактически показан 6-угольник), вписанный в окружность радиуса R. Разделим пополам каждую из дуг между соседними вершинами многоугольника. Проще всего разделить пополам обычным способом одну из этих дуг, а затем радиусом, равным стороне многоугольника, сделать из этой точки деления, как из центра, засечку на окружности; из полученной точки тем же радиусом сделаем новую засечку и т. д. В результате окружность окажется разделенной на $2n$ равных частей старыми вершинами многоугольника и новыми точками деления, которые и послужат вершинами правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность.

Непосредственно видно, что периметр и площадь n-угольника меньше периметра и площади $2n$-угольника, вписанного в ту же окружность: при удвоении числа сторон правильного многоугольника (радиус сохраняется!) периметр и площадь его возрастают.

Приведем еще формулы для стороны и апофемы $2n$-угольника. Имеем

$$a_{2n} = 2R\sin\frac{180^\circ}{2n}.$$

Выразим $\sin\frac{180^\circ}{2n}$ через синус двойного угла $\sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2R}$ по формуле

$$\sin\frac{180^\circ}{2n} = \sqrt{\frac{1-\cos(180^\circ/n)}{2}}$$

с учетом равенства

$$\cos\frac{180^\circ}{n} = \sqrt{1-\sin^2\frac{180^\circ}{n}} = \sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}.$$

Найдем

$$\sin\frac{180^\circ}{2n} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}{2}},$$

откуда

$$a_{2n} = 2R\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}{2}},$$

или проще:

$$a_{2n} = R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}. \qquad (228.1)$$

Для апофемы имеем выражение

$$r_{2n} = \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}. \qquad (228.2)$$

Легко провести и процесс удвоения числа сторон многоугольника, исходя не из многоугольника, вписанного в окружность, а из многоугольника, описанного около окружности. В этом случае мы делим пополам дуги окружности между точками касания и проводим в них новые касательные, получая $2n$-угольник, описанный около той же окружности; на рис. 316, исходя из квадрата, мы построили правильный восьмиугольник, описанный около окружности. Разница состоит в том, что прежде мы сохраняли радиус многоугольника: n-угольник и $2n$-угольник вписывались в одну и ту же окружность и имели равные радиусы, теперь же мы сохраняем апофему: n-угольник и $2n$-угольник описываются вокруг одной и той же окружности и имеют равные апофемы. Ясно непосредственно, что при удвоении числа сторон правильного многоугольника с сохранением его апофемы периметр и площадь его убывают.

Задача 1. Найти отношение площадей двух правильных восьмиугольников, один из которых вписан в некоторую окружность, а другой описан вокруг нее.

Решение. Радиус вписанного восьмиугольника, который мы обозначим через R, служит апофемой описанного восьмиуголь-

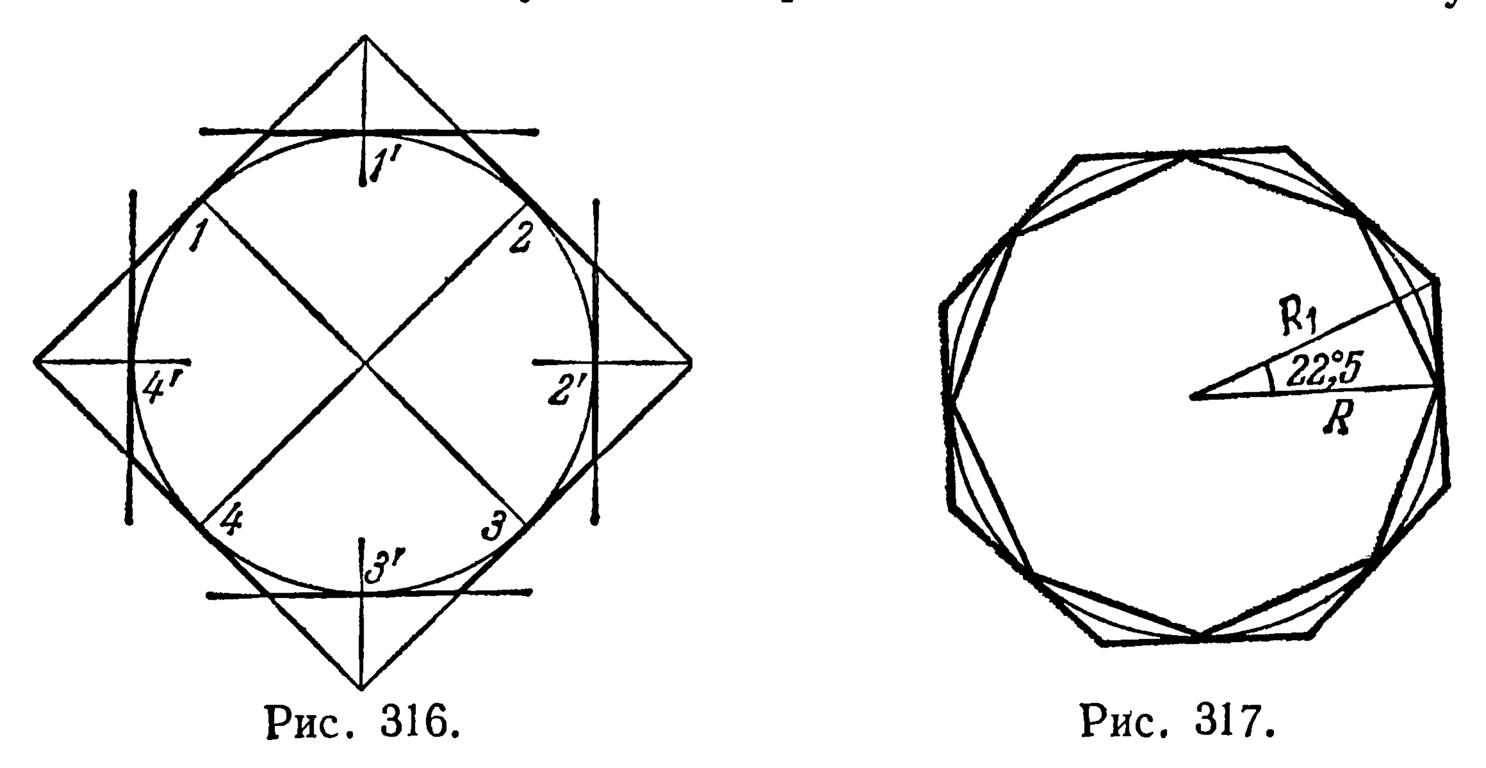


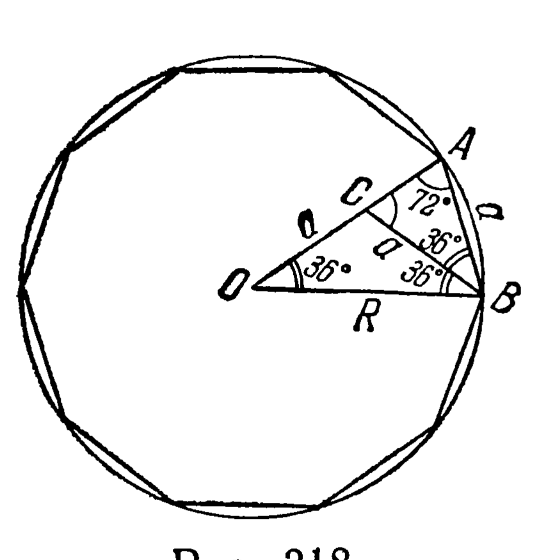
Рис. 316. Рис. 317.

ника. Если мы найдем радиус описанного восьмиугольника, то отношение площадей будет равно квадрату отношения радиусов $R:R_1$ и задача будет решена. На рис. 317 видно, что $R/R_1 = \cos 22°,5$. Отсюда $S/S_1 = \cos^2 22°,5$. Для отыскания последнего выражения не нужно пользоваться таблицами. В самом деле,

$$\cos^2 22°,5 = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad \text{откуда} \quad \frac{S}{S_1} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0,853.$$

Задача 2. Вычислить длину стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

Решение. Пусть a — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 318). Треугольник AOB



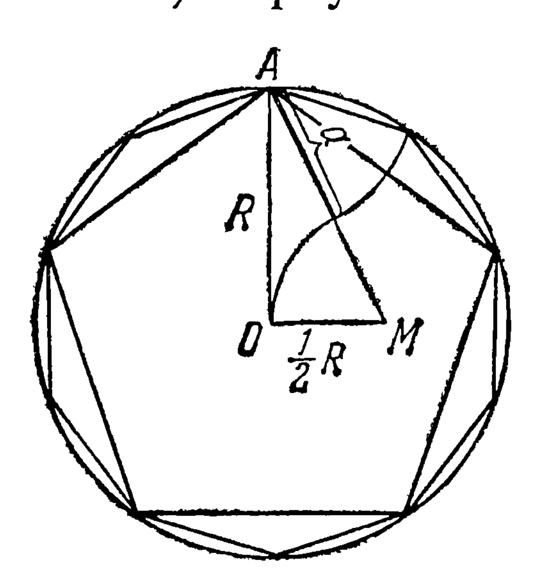


Рис. 318. Рис. 319.

равнобедренный с острым углом при вершине O, равным 36°. Можно сразу написать $a = 2R\sin 18°$, но мы вычислим сторону $AB = a$ не прибегая к тригонометрии. Для этого проведем из

вершины B биссектрису BC. В треугольнике ABC угол C равен 72°. Треугольники AOB и ABC подобны. Отсюда, замечая, что $OC = CB = AB = a$, находим пропорцию $\frac{a}{R} = \frac{R-a}{a}$; из нее получаем уравнение для определения неизвестной стороны: $a^2 + Ra - R^2 = 0$. Имеет смысл только положительное решение $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R \approx 0{,}61R$ (при этом видно, что $\sin 18° = (\sqrt{5} - 1)/4$).

Найденное выражение для стороны a позволяет решить задачу о построении правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность. Для этого по радиусу окружности R построим $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$. С этой целью возьмем прямоугольный треугольник AOM (рис. 319), катетами которого служат радиус окружности R и половина радиуса, перпендикулярного к нему. По теореме Пифагора гипотенуза AM этого треугольника равна $\frac{1}{2} R\sqrt{5}$. Вычитая из нее отрезок OM, равный половине радиуса, получим в остатке отрезок a, который и будет стороной правильного десятиугольника. Сделав ряд засечек, начиная из произвольной точки окружности, получим вершины десятиугольника. На рис. 319 видно, как, соединяя эти вершины через одну, мы вписали в окружность правильный пятиугольник.

Упражнения

1. Построить правильные 12-угольники, вписанные в данную окружность и описанные вокруг нее.
2. Вычислить отношение площади вписанного n-угольника к площади описанного n-угольника при $n = 3, 4, 6$.
3. Вычислить сторону правильного 16-угольника, пользуясь формулой удвоения.

§ 2. Длина окружности. Площадь круга и его частей

229. Длина окружности. Наглядное представление о длине кривой линии, в частности окружности, как о длине нити, навернутой на эту линию, а затем распрямленной, не позволяет математически обоснованно вычислить длину кривой. Следующее определение длины окружности позволяет вычислить эту длину и принципиально близко к общему определению длины кривой, которое рассматривается в курсах высшей математики.

Определение. *Длиной окружности* называется общий предел, к которому стремятся периметры вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Это значит, что в окружность вписываются (и вокруг нее описываются) правильные многоугольники, например шестиугольник

(начинаем с него, как с простейшего), а затем двенадцатиугольник, двадцатичетырехугольник и т. д. Как доказывается, периметры вписанных и описанных многоугольников стремятся при этом к одному и тому же пределу; этот предел и принимается по определению за длину окружности. Можно было бы в определении говорить не об удвоении, а об утроении, упятерении или об увеличении числа сторон на единицу; но удвоение удобнее тем, что при этом рассуждения значительно упрощаются. Можно доказать, что, вообще, периметр правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон стремится к тому же пределу — длине окружности, в которую многоугольник вписан (вокруг которой он описан). Более того, важно лишь, что длины сторон многоугольника стремятся к нулю; при соблюдении этого условия можно даже допустить и произвольные, не обязательно правильные многоугольники (центр окружности должен лежать внутри многоугольников).

Для оправдания данного выше определения длины окружности нам предстоит доказать три утверждения: 1°. Периметры вписанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон стремятся к определенному пределу P'. 2°. Периметры описанных многоугольников при том же условии также имеют определенный предел P''. 3°. Оба указанных предела равны: $P' = P''$.

1°. *Периметры вписанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон стремятся к определенному пределу:*

Действительно, при удвоении числа сторон периметр возрастает: $P'_{2n} > P'_n$. В то же время величина этого периметра остается ограниченной; она заведомо не превышает периметра шестиугольника, описанного вокруг данной окружности. По признаку существования предела монотонно возрастающей, ограниченной сверху последовательности (п. 84) предел периметров вписанных многоугольников существует:

$$\lim_{n \to \infty} P'_n = P' \qquad (n = 6,\ 12,\ 24,\ \ldots).$$

2°. *Периметры описанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон стремятся к определенному пределу.*

Действительно, периметр при этих условиях убывает, но ограничен снизу (подробности оставляем читателю). Полагаем $\lim\limits_{n \to \infty} P''_n = P''$.

3°. *Пределы периметров вписанных и описанных многоугольников равны*: $P'' = P'$.

Заметим сначала, что сторона вписанного правильного n-угольника стремится к нулю при увеличении числа его сторон. В самом деле, периметр ограничен, число же сторон стремится к бесконечности; длина одной стороны $a_n = P'_n/n$ будет бесконечно малой

величиной при $n \to \infty$. Далее, апофема вписанного многоугольника при тех же условиях имеет своим пределом радиус окружности. Это видно из неравенства, связывающего радиус, апофему и сторону (см. рис. 314): $R - \frac{a_n}{2} < r_n < R$.

Отсюда $0 < R - r_n < \frac{a_n}{2}$, и так как $a_n \to 0$, то и $r_n \to R$.

Вспомним теперь, что периметры двух правильных n-угольников относятся, как их апофемы. Имеем для вписанного и описанного n-угольников $\frac{P'_n}{P''_n} = \frac{r_n}{R}$ и при $n \to \infty$ (например, при неограниченном удвоении числа сторон)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P'_n}{P''_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{R} = \frac{R}{R} = 1.$$

По теореме о пределе частного (п. 85) отсюда получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P'_n}{P''_n} = \frac{P'}{P''} = 1,$$

т. е. оба предела, как и требовалось доказать, совпадают.

Теперь получается

Основная теорема о длине окружности. *Отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, не зависящая от диаметра.*

Действительно, имеем

$$\frac{C}{2R} = \frac{\lim P'_n}{2R} = \lim_{n \to \infty} \frac{2nR \sin (180°/n)}{2R} = \lim_{n \to \infty} n \sin \frac{180°}{n}.$$

Из этого равенства видно, что отношение длины окружности к ее диаметру, выраженное в виде предела $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin (180°/n)$, не зависит от самого диаметра; оно обозначается π и равно 3,14159 ... ; поэтому мы и пишем выражение для длины окружности в виде

$$C = 2\pi R. \qquad (229.1)$$

Зная длину окружности, нетрудно вычислить длины любых дуг окружности. Пусть требуется, например, определить длину l дуги окружности радиуса R, отвечающей центральному углу $\alpha°$ (α радиан). Так как равным центральным углам отвечают равные дуги, то всякая дуга составляет такую долю от полной окружности, какую ее центральный угол $\alpha°$ (α радиан) составляет от полного угла 360° (2π радиан). Отсюда получается пропорция $\frac{\alpha°}{360°} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{l}{C}$, и для угла, выраженного в градусной (радианной) мере, имеем соответственно

$$l = \frac{\pi R}{180°} \alpha°, \qquad l = R\alpha. \qquad (229.2)$$

Последняя формула проще:

Длина дуги окружности равна произведению ее радиуса на центральный угол, выраженный в радианах.

В этом проявляется одно из преимуществ радианной меры перед градусной.

Задача 1. Найти длину дуги в одну секунду на экваторе земного шара.

Решение. Примем экваториальный радиус земного шара за 6300 *км*. Тогда имеем

$$l = R\alpha = 6300 \frac{2\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} \approx 31 \text{ м}.$$

Задача 2. Найти длину окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c.

Решение. Имеем для периметра треугольника выражение

$$2p = (1 + \sqrt{2})\, c.$$

Площадь треугольника равна $S = c^2/4$. Но для радиуса вписанной окружности известно соотношение (п. 219) $r = S/p$. Отсюда $r = \frac{c}{2(1+\sqrt{2})}$ и искомая длина равна $C = \frac{\pi c}{1+\sqrt{2}}$.

Задача 3. Найти длину дуги окружности радиуса R, отсекаемой от нее прямой, проходящей на расстоянии d от центра окружности ($d < R$).

Решение. Для косинуса половины центрального угла находим

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{R}; \quad \text{отсюда} \quad \alpha = 2\arccos\frac{d}{R} \quad \text{и} \quad l = 2R\arccos\frac{d}{R}.$$

Задача 4. Найти периметр луночки, образованной дугами двух равных окружностей радиуса R, расположенных так, что каждая из них проходит через центр второй.

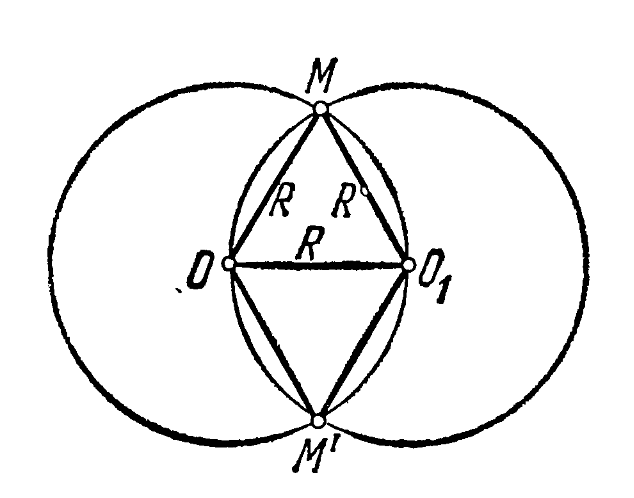


Рис. 320.

Решение. Имеем по рис. 320 $OM = O_1M = OO_1 = R$, т. е. треугольник OO_1M равносторонний. Поэтому центральный угол MOM' содержит 120°. Каждая из дуг, ограничивающих луночку, составляет одну треть полной окружности, а весь периметр равен

$$l = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R = \frac{4\pi}{3} R.$$

230. Площадь круга и его частей. Общее определение площади, данное в п. 167, пригодно и для круга, но оно приводит к сложным вычислениям. Поэтому будем опираться на более специальное.

Определение. *Площадью круга* считают общий предел площадей вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

И здесь справедливы те же соображения, что и при вычислении длины окружности: удвоение числа сторон можно было бы заменить произвольным процессом увеличения их числа, и можно даже отказаться от правильности многоугольников, лишь бы стороны их неограниченно уменьшались, так чтобы многоугольники все теснее примыкали к окружности.

Основной результат формулируется так:

Теорема. *Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.*

Иначе говоря, мы получим формулу вида

$$S=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2.$$

Площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на π.

Доказательство. Докажем формулу $S=\pi R^2$. Напишем выражения площадей вписанного и описанного n-угольников:

$$S'_n=\frac{1}{2}r_nP'_n,\quad S''_n=\frac{1}{2}RP''_n.$$

Зная уже, что при $n\to\infty$ ($n=3, 6, 12, 24, \ldots$) апофема r_n стремится к радиусу R: $r_n\to R$, находим пределы указанных площадей при возрастании n:

$$\lim_{n\to\infty} S'_n=\frac{1}{2}RC,\quad \lim_{n\to\infty} S''_n=\frac{1}{2}RC$$

(предел произведения равен произведению пределов, если они существуют, постоянный множитель выносится за знак предела (п. 85)). Итак, оба предела равны одному и тому же числу:

$$S=\frac{1}{2}RC=\pi R^2, \tag{230.1}$$

принимаемому за площадь круга. Теорема доказана.

В технике чаще применяют формулу (230.1), заменяя в ней R через полудиаметр $D/2$.

Тогда $S=\pi D^2/4$.

Площади кругов, согласно полученным формулам, относятся, как квадраты их радиусов (или диаметров). Это вполне естественно, так как все круги суть подобные фигуры, а площади подобных фигур должны относиться, как квадраты их линейных размеров.

Два сектора одного круга, имеющие равные центральные углы, равны между собой. Доля общей площади круга, приходящаяся на сектор с центральным углом α, пропорциональна углу раствора сектора. Для сектора с углом α, выраженным в градусах или

в радианах, имеем соответственно

$$S_{\text{сект}}=\frac{\pi R^2\alpha^\circ}{360^\circ},\qquad S_{\text{сект}}=\frac{1}{2}R^2\alpha. \qquad (230.2)$$

Итак, *площадь сектора равна половине произведения квадрата радиуса на центральный угол, выраженный в радианах.*

Рассмотрим теперь сегмент круга радиуса R, соответствующий центральному углу α (в радианной мере). Если угол α меньше развернутого, как на рис. 321, то площадь сегмента (область

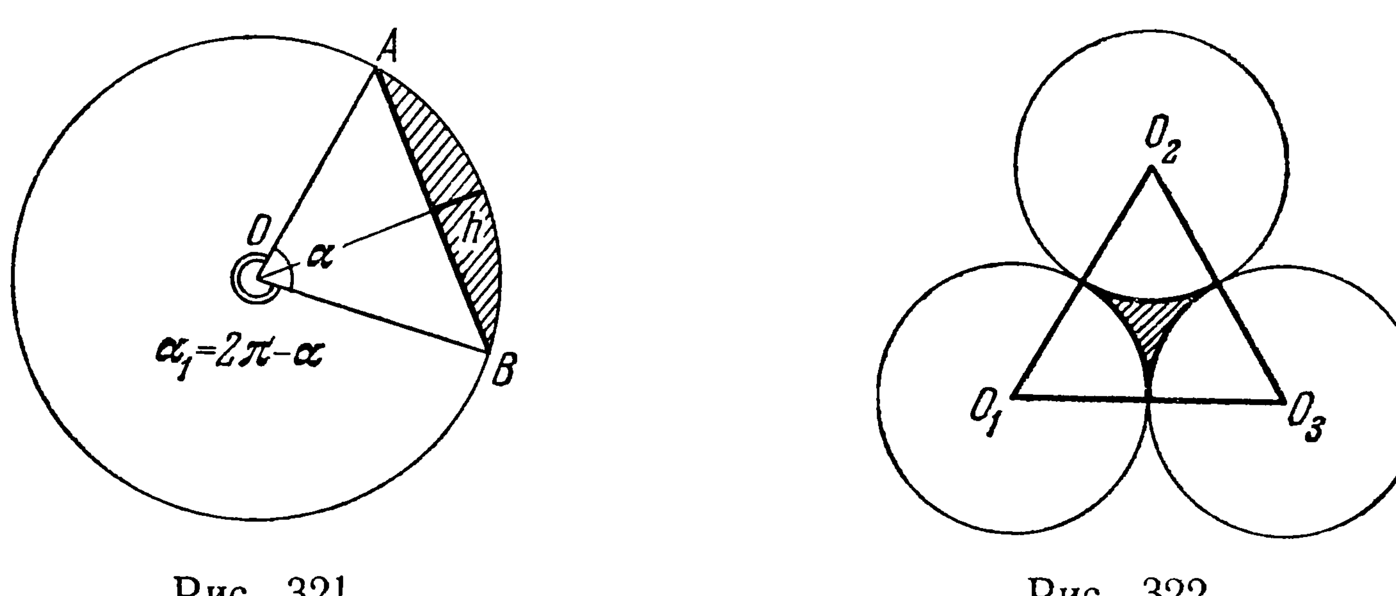


Рис. 321. Рис. 322.

между хордой и дугой окружности, которую эта хорда стягивает) равна разности площадей сектора и треугольника AOB; применяем формулу, выражающую площадь треугольника как половину произведения его сторон на синус угла между ними, и находим для площади сегмента

$$S_{\text{сегм}}=\frac{1}{2}R^2\alpha-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha). \qquad (230.3)$$

Эта формула остается верна и для сегмента, соответствующего углу α, большему развернутого (сегмент, дополняющий только что рассмотренный до полного круга). Действительно, в этом случае следовало бы брать сумму площадей сегмента и треугольника, но так как в этом случае угол α больше развернутого, то синус его отрицателен и формула (230.3) вновь дает искомую величину площади сегмента.

Задача 1. Три равные окружности радиуса R касаются друг друга попарно (рис. 322). Найти площадь заштрихованной фигуры.

Решение. Площадь фигуры, которую надо определить, равна разности площади равностороннего треугольника и площадей трех секторов. Так как сторона треугольника $O_1O_2O_3$ равна $2R$, то площадь его легко вычисляется; она равна $R^2\sqrt{3}$. Секторы имеют центральные углы по 60°, каждый из них составляет одну шестую часть круга, и их суммарная площадь равна поэтому $3\cdot\frac{\pi R^2}{6}=\frac{1}{2}\pi R^2$.

Итак, площадь искомой фигуры

$$S = R^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi R^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) R^2 \approx 0,161 R^2.$$

Задача 2. Найти отношение площадей кругов, ограниченных вписанной и описанной окружностями равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a равна $\frac{1}{2}a^2$, периметр составляет $2p = a(2+\sqrt{2})$, следовательно, для радиуса вписанной окружности имеем $r = S/p = a/(2+\sqrt{2})$. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, т. е. $R = a\sqrt{2}/2$. Находим отношение площадей соответствующих кругов:

$$S_1 : S_2 = r^2 : R^2 = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2} \approx 0,173.$$

Задача 3. Найти выражение площади сегмента через радиус круга и стрелку сегмента (*стрелкой сегмента* называется отрезок его оси симметрии, лежащий внутри сегмента, рис. 321).

Решение. Чтобы воспользоваться формулой, выражающей площадь сегмента, найдем центральный угол α (рис. 321). Легко находим косинус половины центрального угла:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R-h}{R},$$

откуда

$$\alpha = 2\arccos\frac{R-h}{R},$$

и площадь сегмента выразится формулой

$$S = R^2\left\{\arccos\frac{R-h}{R} - \frac{(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}}{R^2}\right\}.$$

Упражнения

1. Хорда окружности делит перпендикулярный к ней радиус пополам. Длина ее равна 10 *см*. Найти длины дуг и площади сегментов, на которые она разбивает окружность и круг.

2. Найти площадь луночки задачи 4 п. 229 (см. рис. 320).

3. Две касательные к окружности радиуса R пересекаются под углом 45°. Найти площадь фигуры, ограниченной ими и меньшей дугой окружности, соединяющей точки касания.

Глава XIX

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Взаимное расположение прямых и плоскостей

231. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Две прямые в пространстве могут быть расположены различным образом. Прежде всего, может случиться, что две прямые имеют общую точку. Тогда они заведомо лежат в одной плоскости. Действительно, чтобы построить такую плоскость, достаточно провести ее через три точки: точку A пересечения указанных прямых (рис. 323) и точки C и B, взятые соответственно на прямых m и n. Имея с каждой из прямых по две общие точки, плоскость будет содержать обе прямые.

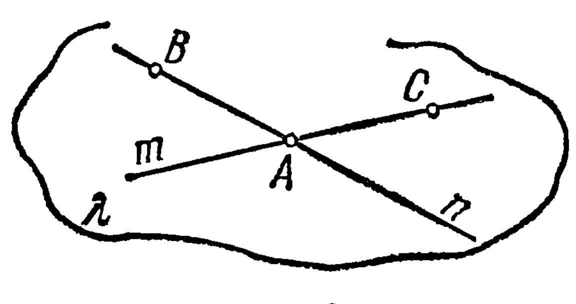


Рис. 323.

Пусть теперь данные прямые не имеют общих точек. Это еще не означает, что они параллельны, так как определение параллельности предусматривает, что прямые принадлежат одной плоскости. Чтобы решить вопрос о расположении наших прямых, проведем через одну из них, например m, и произвольно взятую точку A на другой прямой плоскость λ. Возможны два случая:

1) Построенная плоскость содержит всю вторую прямую (рис. 324). В этом случае прямые m и n принадлежат одной плоскости и не пересекаются и потому параллельны.

2) Плоскость λ пересекает прямую в точке A. Тогда обе прямые не лежат в одной плоскости. Такие прямые называют *скрещивающимися* (рис. 325).

Итак, возможны три основных случая взаимного расположения двух прямых.

1. Прямые лежат в одной плоскости и пересекаются.
2. Прямые лежат в одной плоскости и параллельны.
3. Прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости.

Пример. Из 12 ребер куба можно образовать $12 \cdot 11/2 = 66$ пар прямых. Из них 24 пары скрещивающихся, 24 пересекающихся и 18 пар параллельных прямых. Читатель убедится в правильности этого по модели или чертежу.

Заметим, что в пространстве сохраняет силу постулат о параллельных прямых:

Через точку вне прямой проходит единственная прямая, параллельная ей.

В самом деле, прямая и заданная вне ее точка определяют плоскость, в которой обязана лежать искомая прямая, параллельная данной, ее единственность вытекает из постулата о параллельных.

Отметим, что два известных предложения планиметрии, относящиеся к свойствам параллельных прямых, потребуют для случая пространства особого обоснования (см. п. 232).

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой; два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны.

По поводу второго из указанных предложений заметим, что

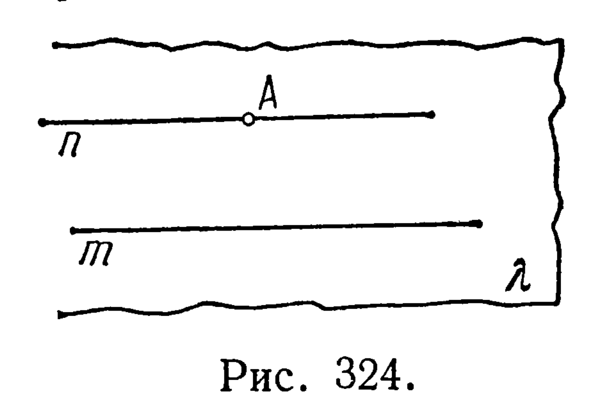


Рис. 324.

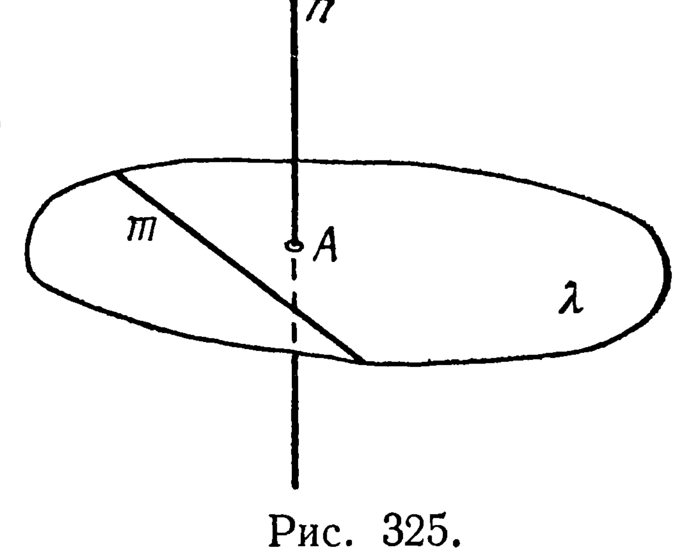


Рис. 325.

на нем основано определение угла между скрещивающимися прямыми: *углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проведенными через произвольную точку M. Очевидно, такое определение опирается на предположение независимости угла от выбора точки M (см. п. 232).

Под *перпендикуляром*, опущенным из данной точки на прямую, понимается прямая, проведенная из данной точки под прямым углом к данной прямой и пересекающая ее. *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести единственный перпендикуляр к ней.*

Действительно, искомый перпендикуляр должен лежать в плоскости, определяемой данной прямой и точкой, и потому к нему применимы положения планиметрии. Однако из точки, лежащей на прямой, можно провести к ней бесчисленное множество перпендикуляров: по одному в каждой плоскости, проведенной через эту прямую.

232. Взаимное расположение прямой линии и плоскости. Прямая может занимать по отношению к плоскости одно из следующих положений: 1) лежать в плоскости, 2) иметь с плоскостью одну общую точку, т. е. пересекать эту плоскость, 3) не иметь с пло-

скостью общих точек. В последнем случае говорят, что плоскость и прямая *параллельны*. Существование параллельных между собой прямых и плоскостей следует из таких рассуждений. Возьмем плоскость λ и какую-либо прямую a, лежащую в ней (рис. 326). Через произвольную точку A, не принадлежащую плоскости λ, в плоскости, содержащей точку A и прямую a, проведем прямую a', параллельную прямой a. Плоскость, проходящая через параллельные прямые a и a', на рисунке обозначена через μ. Теперь видно, что прямая a' не пересекает плоскости λ, так как

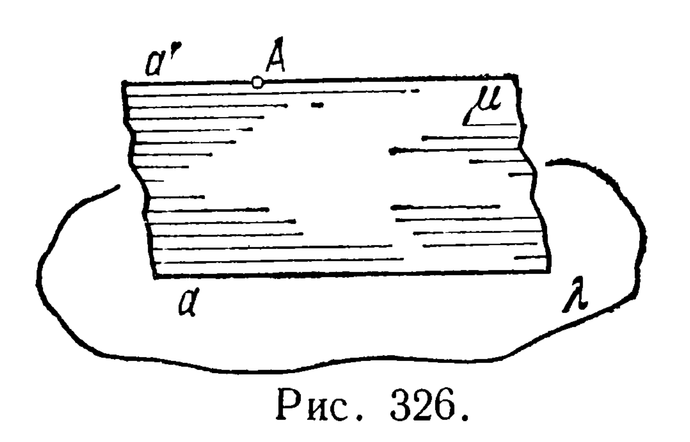


Рис. 326.

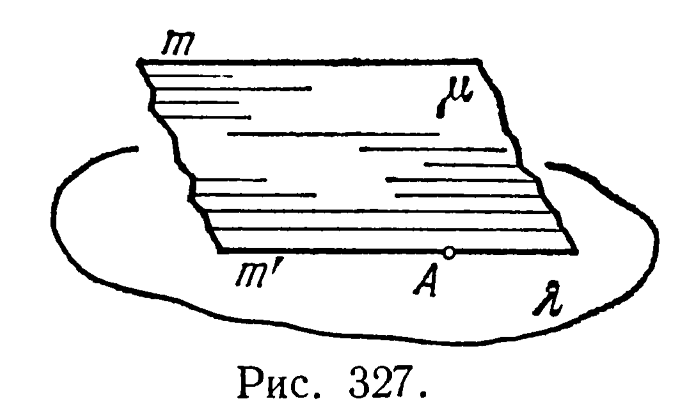


Рис. 327.

в противном случае точка пересечения лежала бы в плоскости μ и, значит, на прямой a. Прямые a и a' пересекались бы в этой точке, что невозможно, так как прямые a и a' по построению параллельны. Наши рассуждения доказывают следующее предложение.

Теорема 1. *Прямая, не лежащая в некоторой плоскости и параллельная одной из прямых, расположенных в этой плоскости, сама параллельна этой плоскости.*

Верна и обратная

Теорема 2. *Если прямая параллельна некоторой плоскости, то в плоскости существуют прямые, параллельные данной прямой.*

Доказательство. Пусть прямая m параллельна плоскости λ (рис. 327). Возьмем в плоскости λ произвольную точку A и проведем плоскость μ через прямую m и точку A. Эта плоскость пересечет данную плоскость λ по прямой m', и, как легко видеть, прямые m и m' будут параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости μ и не могут пересекаться, так как по условию прямая m не имеет общих точек с плоскостью λ. Итак,

Прямая линия параллельна плоскости тогда и только тогда, когда она не лежит в этой плоскости и параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости.

Заметим еще, что если прямая a параллельна плоскости λ и через эту прямую проводятся плоскости μ', μ'', ..., пересекающие λ, то линии пересечения a', a'', ... все параллельны данной прямой a. Они параллельны и между собой: если бы две из них пересекались, то точка их пересечения принадлежала бы плоскости μ' и μ'', а значит, и прямой a, что невозможно (рис. 328).

Теперь уже нетрудно обосновать и предложение (п. 231):

Теорема 3. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Доказательство. Пусть $a \| c$, $b \| c$ (рис. 329). Требуется доказать, что $a \| b$. Проведем плоскости λ, λ' через прямые a и c, b и c. Прямая b параллельна плоскости λ, так как она параллельна одной из прямых этой плоскости. Построим затем плоскость μ, проходящую через прямую b и какую-либо точку M, лежащую на прямой a. Эта плоскость пересечет плоскость λ по прямой, параллельной c и, значит, совпадающей с a. Из доказанного выше предложения следует, что прямая a будет параллельна и прямой b.

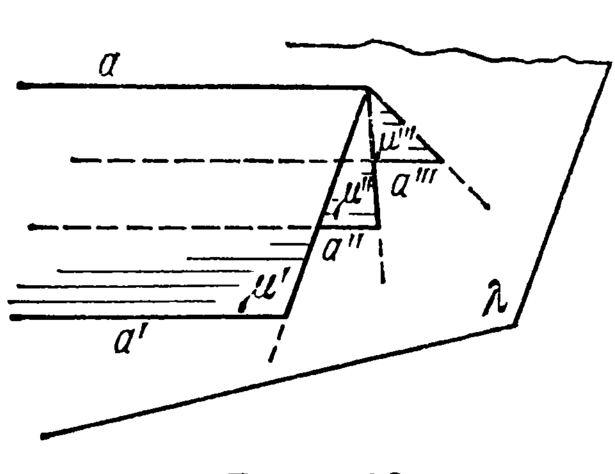


Рис. 328.

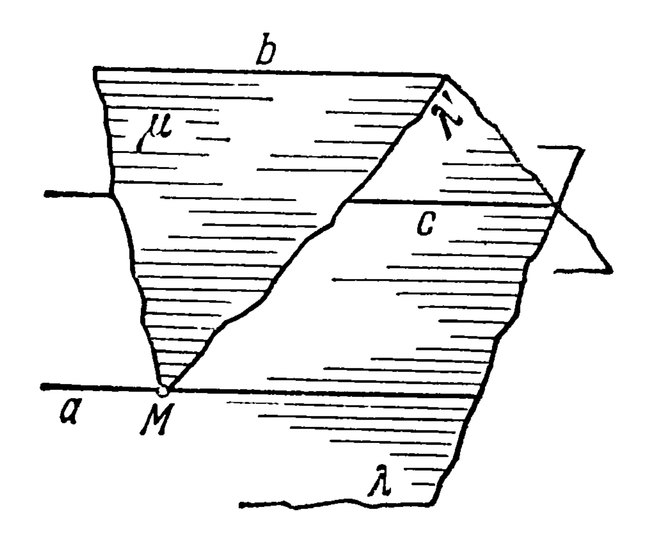


Рис. 329.

Вернемся теперь ко второму предложению, сформулированному в п. 231:

Теорема 4. *Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны.*

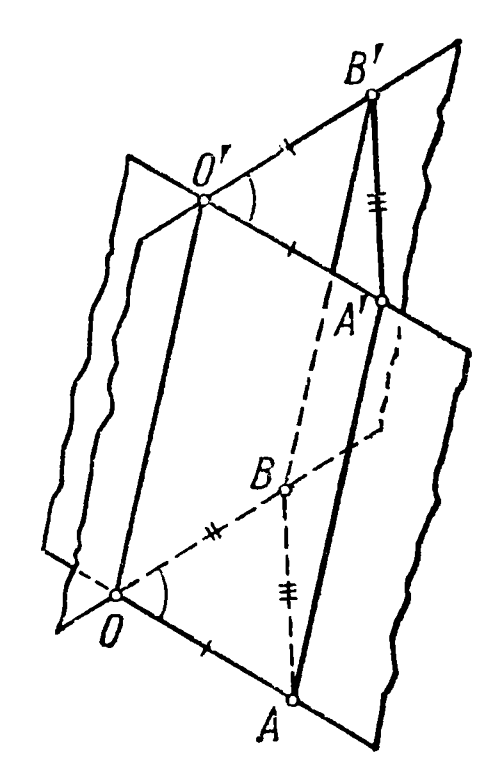


Рис. 330.

Доказательство. Пусть стороны углов AOB и $A'O'B'$ на рис. 330 параллельны и одинаково направлены. Соединим вершины углов O и O' отрезком OO'; на сторонах OA и $O'A'$, OB и $O'B'$ отложим соответственно равные отрезки $OA = O'A'$, $OB = O'B'$; в четырехугольнике $OO'A'A$ стороны OA и $O'A'$ равны по построению и параллельны, поэтому $OO'A'A$ — параллелограмм (существенно, что OA и $O'A'$ одинаково направлены, т. е. OA и $O'A'$ лежат по одну сторону от OO'). Значит, отрезок AA' равен и параллелен OO'. Отрезок BB' также равен и параллелен OO'. Поэтому AA' и BB' — равные и параллельные между собой отрезки. Четырехугольник $AA'B'B$ представляет собой параллелограмм. Поэтому $AB = A'B'$. В треугольниках OAB и $O'A'B'$ три пары равных сторон, и поэтому треугольники равны. Значит, равны и углы O и O', что и требовалось доказать.

233. Взаимное расположение двух плоскостей. В силу аксиомы: *две плоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую* — возможны лишь два случая расположения плоскостей: 1) плоскости имеют общую прямую, т. е. пересекаются; 2) плоскости не имеют ни одной общей точки, такие плоскости называют *параллельными*. Существование параллельных плоскостей вытекает из следующего построения. Возьмем в плоскости λ (рис. 331) какие-

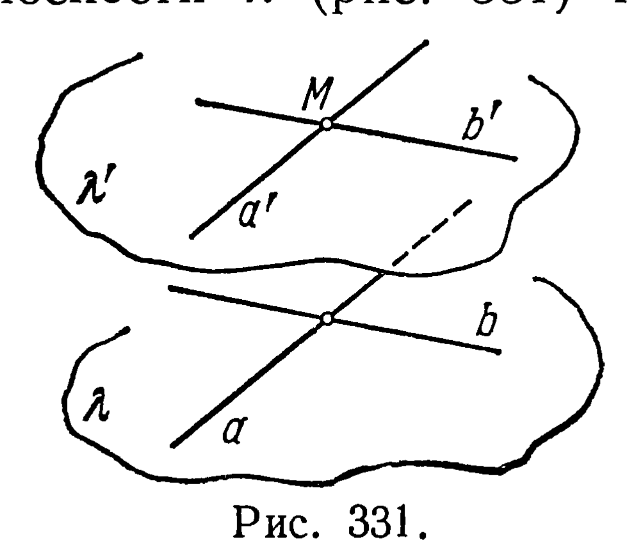


Рис. 331.

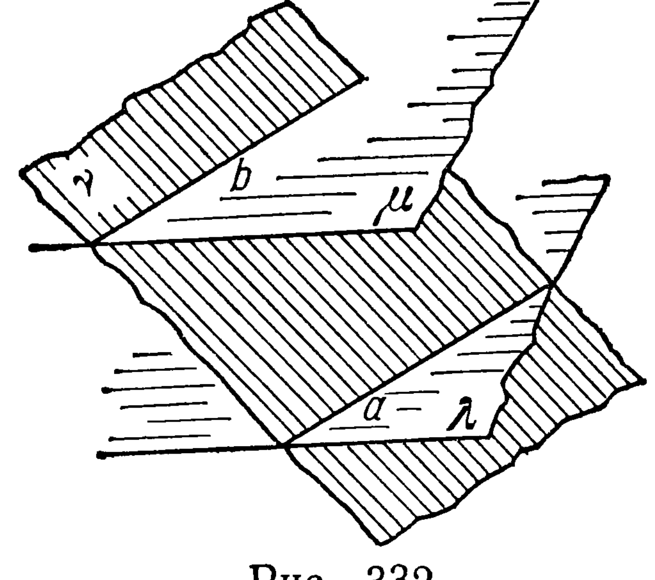


Рис. 332.

либо две пересекающиеся прямые a и b. Через точку M, не принадлежащую плоскости λ, проведем прямые a' и b', соответственно параллельные данным. Покажем, что плоскость λ', содержащая эти прямые, параллельна плоскости λ. Действительно, если бы эти плоскости пересекались по некоторой прямой c, то эта прямая, принадлежа плоскости λ', пересекалась бы по крайней мере с одной из прямых a' и b'; такая точка пересечения была бы точкой пересечения одной из этих прямых с плоскостью λ. Между тем обе прямые по построению параллельны плоскости λ. Таким образом, предположение о пересечении плоскостей λ и λ' ведет к противоречию. Следовательно, плоскости параллельны. Отсюда следует

Признак параллельности плоскостей. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.*

234. Свойства параллельных прямых и плоскостей.

1. *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*

Доказательство. Пусть две параллельные плоскости λ и μ пересечены плоскостью ν; тогда линии их пересечения a и b (рис. 332) лежат в плоскости ν и потому могут быть либо пересекающимися, либо параллельными прямыми. Но, принадлежа двум параллельным плоскостям, они не могут иметь общих точек. Следовательно, они параллельны.

2. *Через точку, лежащую вне данной плоскости λ, можно провести единственную плоскость, параллельную данной* (то, что такую плоскость можно провести, нам уже известно).

Доказательство. Пусть a и b—две какие-либо пересекающиеся прямые в плоскости λ; плоскости, проведенные через каждую из них и точку M, должны пересечь плоскость, проведенную через точку M параллельно данной плоскости, по прямым, параллельным a и b. Но две такие прямые $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$ определяют единственную плоскость, проходящую через них, откуда и следует наше утверждение.

3. *Если две плоскости порознь параллельны третьей, то они параллельны между собой.*

4. *В двух плоскостях λ и μ, пересекающихся по прямой a, прямые, параллельные прямой a, и только они параллельны друг другу.*

Свойства 3 и 4 читатель докажет самостоятельно.

5. *Если плоскости λ и μ, пересекающиеся по прямой a, соответственно параллельны плоскостям λ' и μ', то плоскости λ' и μ' пересекаются по прямой a', параллельной прямой a.*

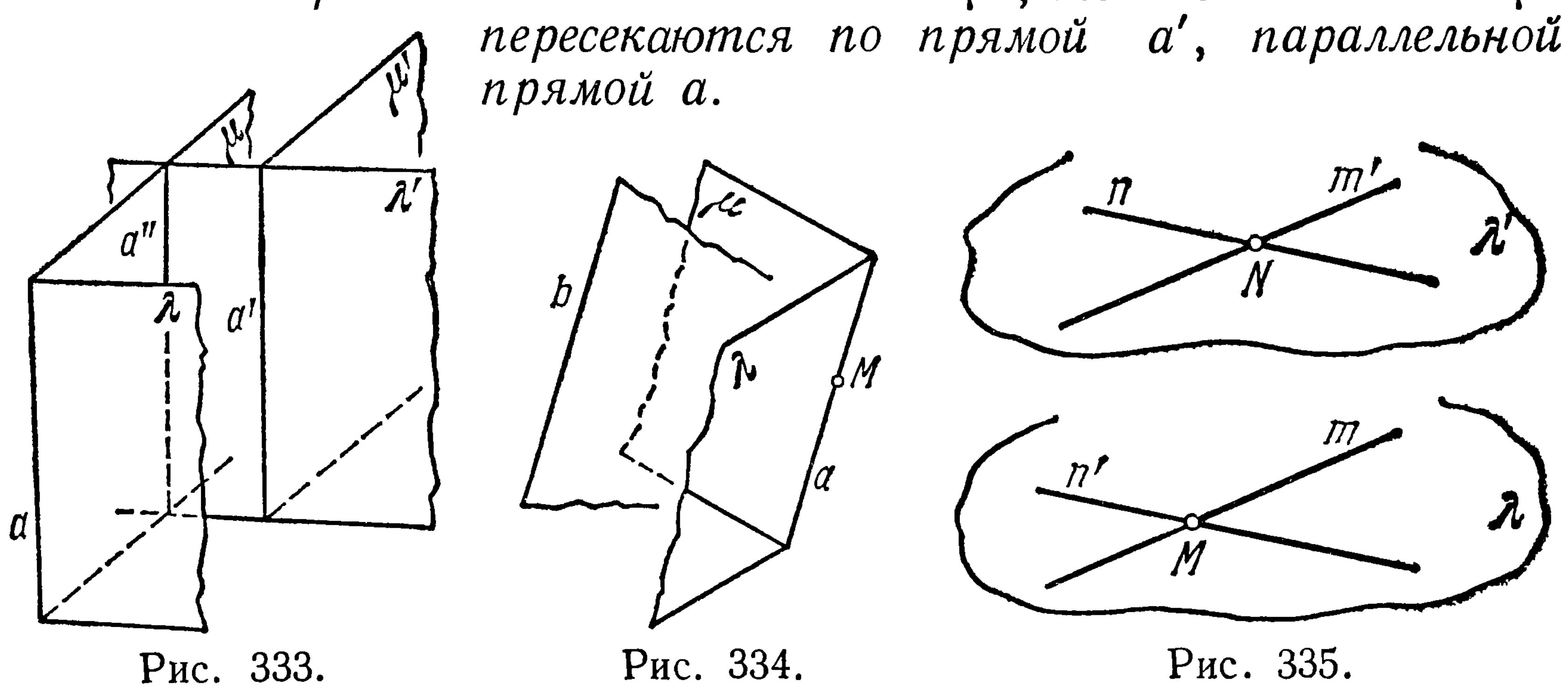


Рис. 333. Рис. 334. Рис. 335.

Для доказательства достаточно рассмотреть прямую a'', получающуюся при пересечении плоскости μ с плоскостью λ' (рис. 333); она окажется параллельной как линии a пересечения λ и μ, так и линии a' пересечения λ' и μ'.

6. *Прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна линии их пересечения.*

Доказательство. Проведем плоскость через прямую b и любую точку M линии a пересечения данных плоскостей (рис. 334); она пересечет каждую из плоскостей λ и μ по прямой, параллельной b, а значит, она пересекает их по одной и той же прямой; эта прямая, принадлежа каждой из плоскостей λ и μ, совпадает с их линией пересечения a.

7. *Если m и n—скрещивающиеся прямые, то существуют плоскости λ и λ', параллельные между собой и содержащие соответственно прямые m и n.*

Доказательство. Выберем на каждой из двух скрещивающихся прямых m и n по одной точке M и N (рис. 335) и

проведем через точку M прямую n', параллельную прямой n, а через точку N прямую m', параллельную m. Пересекающиеся прямые m' и n соответственно параллельны пересекающимся прямым m и n'. Поэтому плоскость λ, проходящая через m и n', параллельна плоскости λ', проходящей через m' и n, т. е. существуют параллельные плоскости, содержащие соответственно прямые m и n.

235. Построения в стереометрии. В стереометрии, как и в планиметрии, часто говорят о построении тех или иных точек, плоскостей, прямых линий. Но здесь уже не имеют в виду фактического построения с помощью геометрических инструментов. Просто предполагают возможным говорить о построении прямой, проходящей через две данные точки; плоскости, проходящей через три данные точки; точки пересечения данных прямой и плоскости; прямой, по которой пересекаются две плоскости; плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости, и т. д. Решение менее очевидных задач на «построение» в стереометрии состоит в анализе этих задач, выяснении существования (и числа) решений и разложении более сложной конструкции на ряд простейших операций, вроде перечисленных выше.

Задача 1. Построить точку пересечения трех плоскостей.

Решение. Если среди данных трех плоскостей есть хотя бы две параллельные, то задача заведомо не имеет решений. Пусть поэтому каждая пара плоскостей из числа данных трех имеет прямую пересечения. Рассмотрим линию пересечения двух

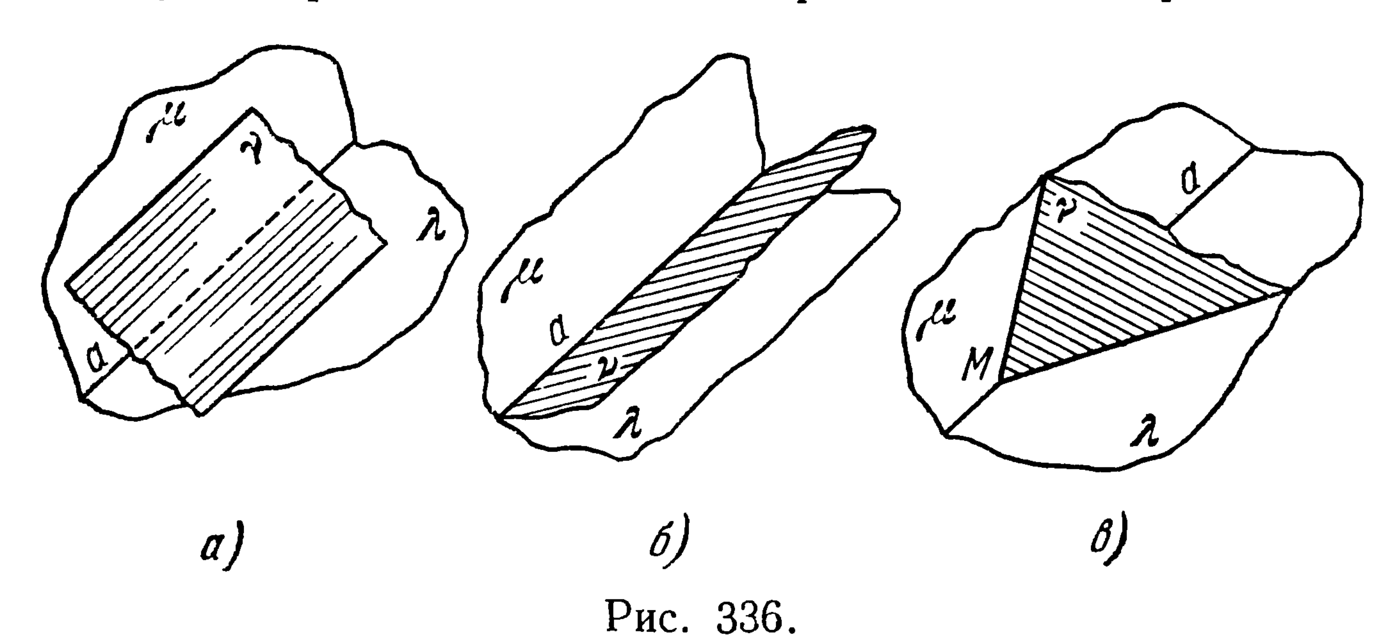


Рис. 336.

плоскостей, например λ и μ (рис. 336). Эта прямая a по отношению к третьей плоскости ν может занимать любое из трех положений: 1) если $a \parallel \nu$, то прямая и плоскость не имеют общих точек и, таким образом, три плоскости не пересекаются; читатель покажет, что все три линии их попарного пересечения параллельны (рис. 336, *а*); 2) прямая a лежит в плоскости ν; тогда все три плоскости имеют общую прямую a (рис. 336, *б*), задача

имеет бесчисленное множество решений, так как каждая точка прямой a является одной из точек пересечения трех плоскостей; 3) прямая a имеет с плоскостью ν единственную общую точку M; в этом случае, который следует рассматривать как наиболее общий, три плоскости имеют единственную точку пересечения M (рис. 336, *в*).

Задача 2. Даны прямые a, b, c. Провести прямую, параллельную прямой a и пересекающую другие данные прямые b и c.

Решение. Укажем план построения, исследование же различных случаев оставим читателю. Через прямые b и c проведем плоскости, параллельные прямой a (это построение однозначно выполнимо, если прямые a и b, а также a и c скрещивающиеся). Линия их пересечения (всегда ли она существует?) и может дать решение задачи (если не окажется параллельной одной из прямых b, c).

§ 2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

236. Перпендикуляр к плоскости. В планиметрии построение перпендикуляра основано на том, что он соединяет данную точку и точку, симметричную с ней относительно рассматриваемой прямой. Если мы хотим составить понятие о перпендикуляре к плоскости, то можно взять любую точку, лежащую вне этой плоскости, отразить эту точку в данной плоскости, как в зеркале, и соединить данную точку с ее отражением; тогда получим перпендикуляр к плоскости. Следует, однако, заметить, что в случае отражения относительно прямой все дело сводилось к сгибу плоскости вдоль данной прямой, т. е. к движению, хотя и производимому в пространстве. Отражение же в плоскости уже не сводится к движению. Поэтому изложение вопроса о перпендикуляре к плоскости сложнее соответствующего изложения вопроса о перпендикуляре к прямой в планиметрии, оно опирается на следующее известное читателю

Определение. Прямая называется *перпендикуляром к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

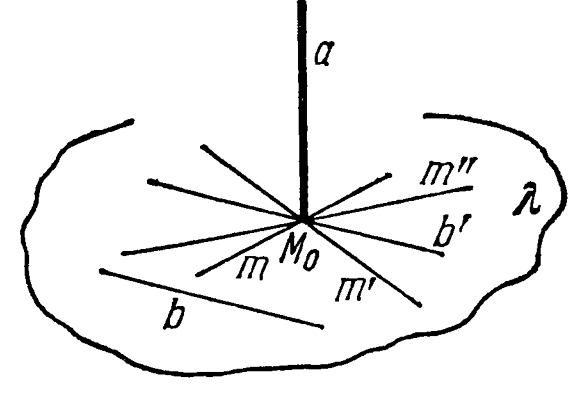


Рис 337.

Так как угол между двумя скрещивающимися прямыми равен по определению углу между пересекающимися прямыми, параллельными данным, то прямая a (рис. 337), перпендикулярная ко всем прямым m, m', m'', ... плоскости λ, проходящим через точку M_0 пересечения прямой a с плоскостью λ, будет перпендикулярна и к плоскости λ. Действительно, она образует прямой угол с любой прямой в плоскости λ, так как она перпендику-

лярна к прямой b', проведенной в этой плоскости через точку M_0 параллельно b. В действительности имеет место гораздо более простой

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Прямая, перпендикулярная к двум пересекающимся прямым плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.*

Доказательство. Пусть на рис. 338 прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым m и n, лежащим в плоскости λ. В силу сделанного выше замечания мы можем, не нарушая общности, предположить, что прямая a проходит через точку M_0 пересечения прямых m и n. Требуется доказать, что прямая a перпендикулярна и к любой прямой p плоскости λ; в силу того же замечания можно предположить, что прямая p проходит через точку M_0. Сделаем следующие вспомогательные построения: на прямой a возьмем произвольную точку M и точку M' на продолжении MM_0 по другую сторону плоскости λ на расстоянии MM_0 от точки M_0. Три прямые m, n, p в плоскости λ пересечем какой-либо прямой c, не проходящей через M_0, точки пересечения обозначим соответственно P, Q, R. Соединим точки M и M' с точками P, Q, R. Треугольники MM_0P и $M'M_0P$ равны, так как они прямоугольные, катеты MM_0 и $M'M_0$ равны по построению, а катет M_0P общий; значит, равны и их гипотенузы: $MP=M'P$ (можно еще проще заметить, что $M'P=MP$, как наклонные с равными проекциями). Отрезки MQ, $M'Q$ также равны. Значит, равны треугольники MPQ и $M'PQ$ (по трем сторонам). Отсюда заключаем, что равны треугольники MQR и $M'QR$: у них между равными сторонами MQ и $M'Q$ и общей стороной QR заключены равные углы: $\angle MQR=\angle M'QR$ (соответственные углы в равных треугольниках). Теперь уже видно, что равны и треугольники MM_0R и $M'M_0R$ (по трем сторонам). Таким образом, углы MM_0R и $M'M_0R$ равны, и так как они смежные, то каждый из них прямой. Утверждение доказано.

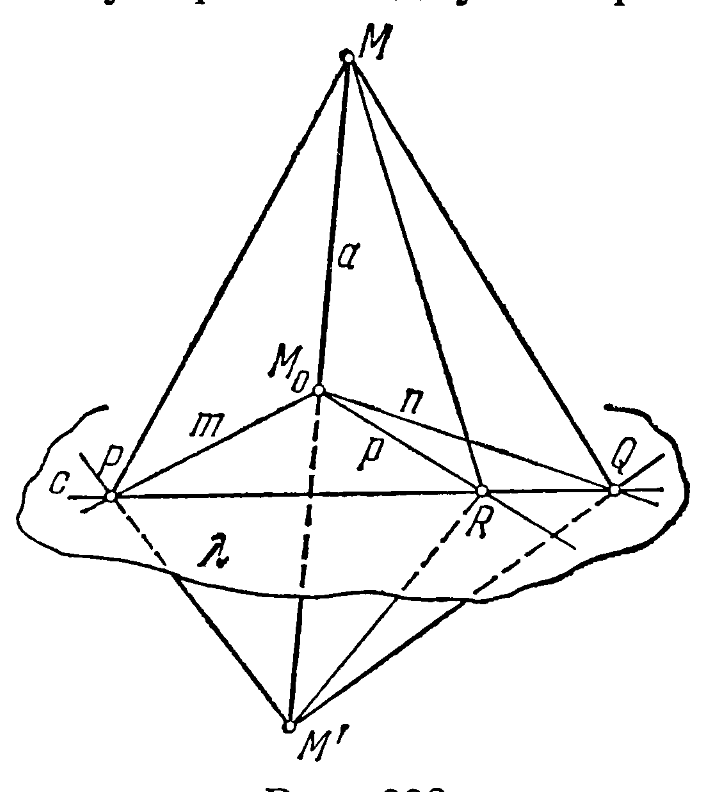


Рис. 338.

К любой прямой можно провести перпендикулярную плоскость.

В самом деле, возьмем произвольную прямую и в любой ее точке проведем к ней два каких-либо перпендикуляра (лежащие в каких-либо двух плоскостях, проведенных через эту прямую). Через них, как через две пересекающиеся прямые, проходит плоскость. По предыдущему, данная прямая служит перпендику-

ляром к этой плоскости. Из проведенных рассуждений также следует вывод: *все прямые, перпендикулярные к данной прямой в одной из ее точек, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к этой прямой.*

В любой точке плоскости также можно восставить перпендикуляр к ней.

Для этого достаточно провести через данную в плоскости точку две прямые, лежащие в этой плоскости, а затем построить в той же точке две плоскости, перпендикулярные к проведенным прямым. Имея общую точку, эти две плоскости пересекутся по прямой, которая будет одновременно перпендикулярна к двум пересекающимся прямым в плоскости и, следовательно, перпендикулярна к самой плоскости.

237. Перпендикуляр и наклонные. Возьмем какую-либо плоскость λ и точку M, не принадлежащую ей (рис. 339). Пусть MM_0—перпендикуляр к плоскости λ, проведенный через точку M.

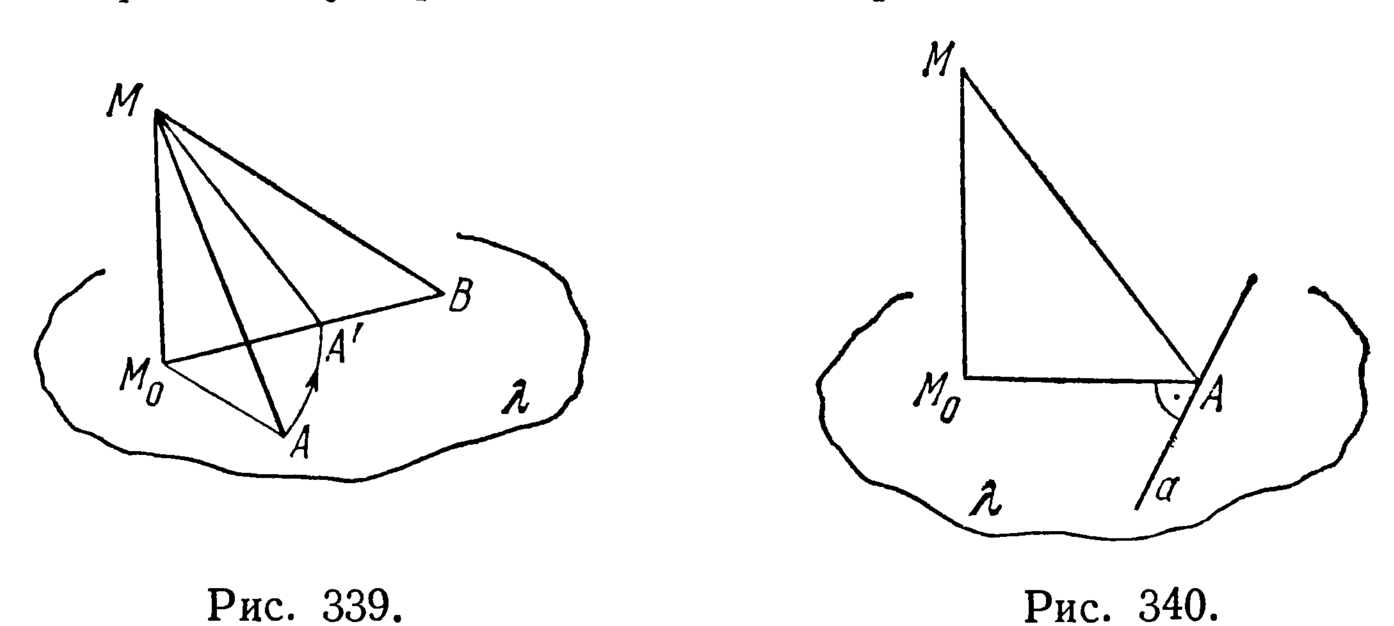


Рис. 339. Рис. 340.

Здесь мы употребляем слово «перпендикуляр», имея в виду также отрезок MM_0 прямой, перпендикулярной к плоскости, между точкой M и точкой M_0 ее пересечения с плоскостью (основанием перпендикуляра). Соединяя другие точки A, B, ... плоскости λ с точкой M, получим отрезки MA, MB, ..., называемые *наклонными*. Каждая из наклонных длиннее перпендикуляра.

Отрезки M_0A, M_0B, ... между основаниями наклонных и основанием перпендикуляра называются *проекциями наклонных.*

Из двух наклонных больше та, у которой бо́льшая проекция (сравниваются наклонные, проведенные из одной точки). Верно и обратное: *бо́льшая из двух наклонных, проведенных из одной точки, имеет и бо́льшую проекцию.*

Сформулируем и докажем теорему «о трех перпендикулярах».

Теорема. *Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна к ее проекции тогда и только тогда, когда она перпендикулярна и к самой наклонной.*

Доказательство. Пусть прямая a (рис. 340) проведена в плоскости λ перпендикулярно к M_0A (или MA); тогда она

перпендикулярна и к MM_0 (как всякая прямая в λ) и, значит, перпендикулярна одновременно к двум непараллельным прямым MM_0 и M_0A (или MM_0 и MA) плоскости MM_0A. Поэтому она перпендикулярна ко всем прямым плоскости M_0MA (и к самой этой плоскости). Мы доказали, что прямая, проведенная в некоторой плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (и обратно).

По существу, понятие наклонной не играет важной роли в этой теореме. Для нас важно, что плоскость MM_0A содержит перпендикуляр к другой плоскости λ (рис. 340). Теорема же наша доказывает, что и вторая плоскость λ содержит перпендикуляр к первой плоскости. Итак:

Если одна из двух пересекающихся плоскостей содержит перпендикуляр к другой, то и вторая плоскость содержит перпендикуляр к первой.

238. Угол между прямой и плоскостью. На понятии проекции наклонной основано определение угла между прямой и плоскостью.

Определение. *Углом между прямой линией и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

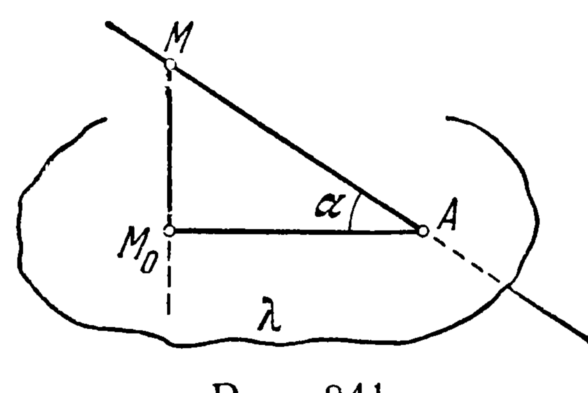


Рис. 341.

На рис. 341 изображен угол α между наклонной AM и ее проекцией AM_0 на плоскость λ.

Примечание. Если прямая параллельна плоскости или лежит в ней, то угол ее с плоскостью считается равным нулю. Если она перпендикулярна к плоскости, то угол объявляется прямым (предыдущее определение здесь в буквальном смысле неприменимо!). В остальных случаях подразумевается острый угол между прямой и ее проекцией. Поэтому *угол между прямой и плоскостью никогда не превышает прямого.* Еще заметим, что здесь вернее говорить о мере угла, а не об угле (действительно, речь идет о мере наклона прямой к плоскости, понятие же угла как плоской фигуры, ограниченной двумя лучами, не имеет сюда прямого отношения).

Убедимся еще в одном свойстве острого угла между прямой линией и плоскостью.

Из всех углов, образованных данной прямой и всевозможными прямыми в плоскости, угол с проекцией данной прямой наименьший.

Доказательство. Обратимся к рис. 342. Пусть a—данная прямая, m—ее проекция на плоскость λ, n—произвольная другая прямая в плоскости λ (мы провели ее для удобства через точку A пересечения прямой a с плоскостью λ). Отложим на прямой n отрезок $AN_0 = AM_0$, т. е. равный основанию наклон-

ной MA, где M_0 — проекция одной из точек наклонной a. Тогда в треугольниках AM_0M и AN_0M две стороны равны: сторона AM общая, AM_0 и AN_0 равны по построению. Но третья сторона MN_0 в треугольнике AN_0M больше третьей стороны MM_0 в треугольнике AM_0M (наклонная больше перпендикуляра). Значит, и противолежащий угол β в $\triangle AN_0M$ больше соответствующего угла α в $\triangle AM_0M$ (см. п. 217): $\beta > \alpha$, что и требовалось доказать.

Угол между прямой и плоскостью — это наименьший из углов между данной прямой и всевозможными прямыми в плоскости.

Справедлива и такая

Теорема. *Острый угол между прямой, лежащей в плоскости, и проекцией наклонной на эту плоскость меньше угла между этой прямой и самой наклонной.*

Доказательство. Пусть n — прямая, лежащая в плоскости λ (рис. 342), a — наклонная к плоскости, m — ее проекция на плоскость. Будем рассматривать прямую n как наклонную к плоскости AM_0M; тогда m будет ее проекцией на указанную плоскость и по предыдущему свойству найдем: $\angle N_0AM > \angle N_0AM_0$, что и требовалось доказать. По теореме о трех перпендикулярах видно, что в случае, когда прямая n в плоскости λ перпендикулярна к проекции наклонной (случай не острого, а прямого угла), прямая также перпендикулярна и к самой наклонной; в этом случае оба угла, о которых мы говорим, прямые и потому равны между собой.

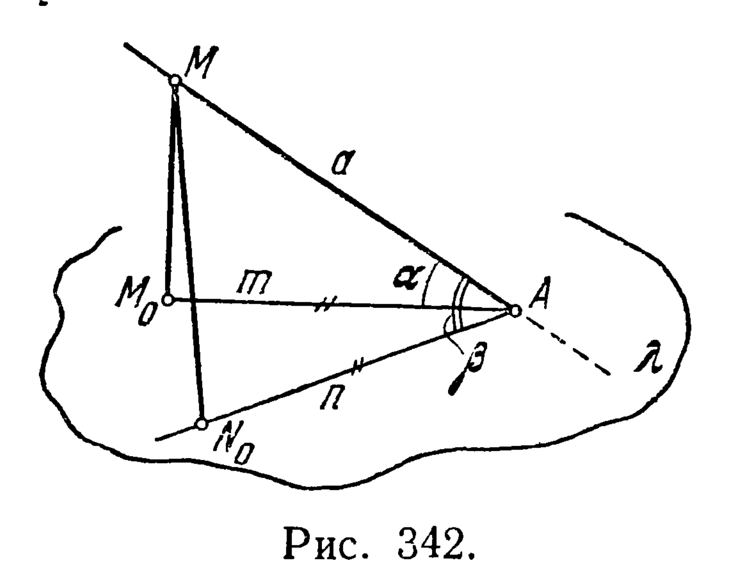


Рис. 342.

Рис. 343.

239. Связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых и плоскостей. Справедливы следующие утверждения, устанавливающие связь между параллельностью и перпендикулярностью:

1. *Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.*

Доказательство. Через данную прямую a (рис. 343) проведем секущую плоскость μ; в пересечении с плоскостями λ и λ', по условию перпендикулярными к прямой a, получим две линии

b и b'. Как два перпендикуляра к одной прямой, лежащие в одной и той же плоскости μ, они будут параллельны между собой. Итак, в плоскостях λ и λ' мы получили две параллельные прямые b и b'. Проведя другую секущую плоскость μ', получим в плоскостях λ и λ' пары пересекающихся прямых b, c и b', c', соответственно параллельных друг другу, что и доказывает параллельность плоскостей λ и λ'.

2. *Прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и к другой.*

3. *Перпендикуляры, проведенные к параллельным плоскостям, параллельны. Плоскости, перпендикулярные к параллельным прямым, параллельны.*

Доказательство свойств 2 и 3 предоставляем читателю.

4. *Проекции параллельных прямых на параллельные плоскости параллельны.*

Доказательство. Пусть прямые a и a' параллельны и плоскости λ и λ' также параллельны (рис. 344). Для построения проекции прямой a на плоскость λ опустим из любой точки M прямой a перпендикуляр на плоскость λ. Проекцию можно определить как пересечение плоскости, содержащей прямую a и этот перпендикуляр, с данной плоскостью λ. При аналогичном построении второй проекции плоскость, содержащая прямую a' и перпендикуляр, опущенный из одной из ее точек на λ', будет параллельна такой же плоскости в построении первой проекции. Обе проекции будут параллельны, как линии пересечения пар соответственно параллельных плоскостей.

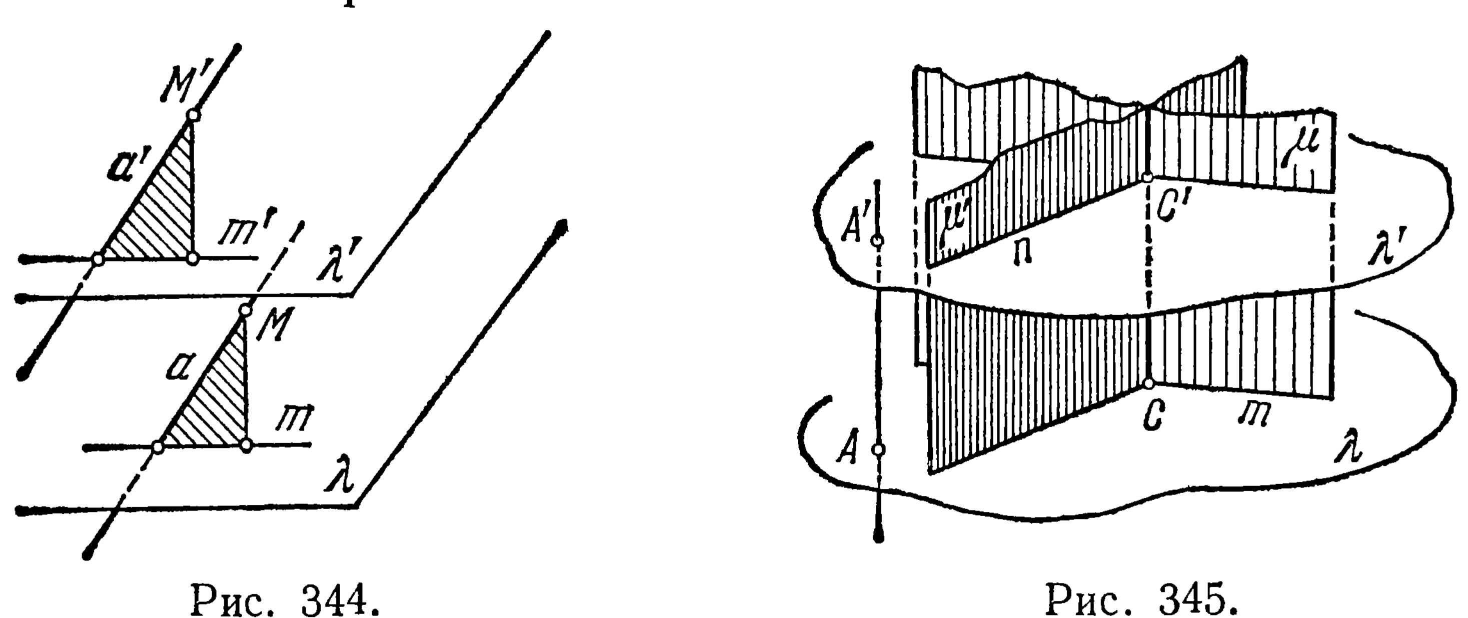


Рис. 344. Рис. 345.

240. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. Покажем, что для двух данных скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр, т. е. единственная прямая, которая не только образует с данными прямыми прямые углы, но и пересекает каждую из них. Представим себе, что через скрещивающиеся прямые m и n проведены параллельные плоскости λ и λ' (рис. 345). Всякая прямая, например AA', перпендикулярная к этим плоскостям, будет уже перпендику-

лярна к данным прямым, но, вообще говоря, не пересечет их. Если, однако, провести через прямую m плоскость μ, параллельную прямой AA', то она пересечет вторую из скрещивающихся прямых n в точке C'. Перпендикуляр к плоскостям λ и λ', проведенный через эту точку, и будет искомым: он не только образует с m и n прямые углы, но и пересекает обе эти прямые. Его можно также получить как линию пересечения плоскостей μ и μ', проходящих соответственно через данные прямые m и n параллельно прямой AA'. Найденный перпендикуляр дает кратчайший путь от одной прямой к другой. Этот кратчайший путь равен расстоянию между параллельными плоскостями, заключающими данные две прямые.

Задача 1. Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABC и $AB'C$ имеют общую гипотенузу $AC=a$, плоскости же треугольников взаимно перпендикулярны. Найти кратчайшее расстояние между их общей гипотенузой и линией BB', соединяющей вершины прямых углов.

Решение. Проведем высоты BH и $B'H$ данных треугольников (рис. 346). Треугольник BHB' равнобедренный и прямоугольный (обосновать!). Его высота HH_1 перпендикулярна

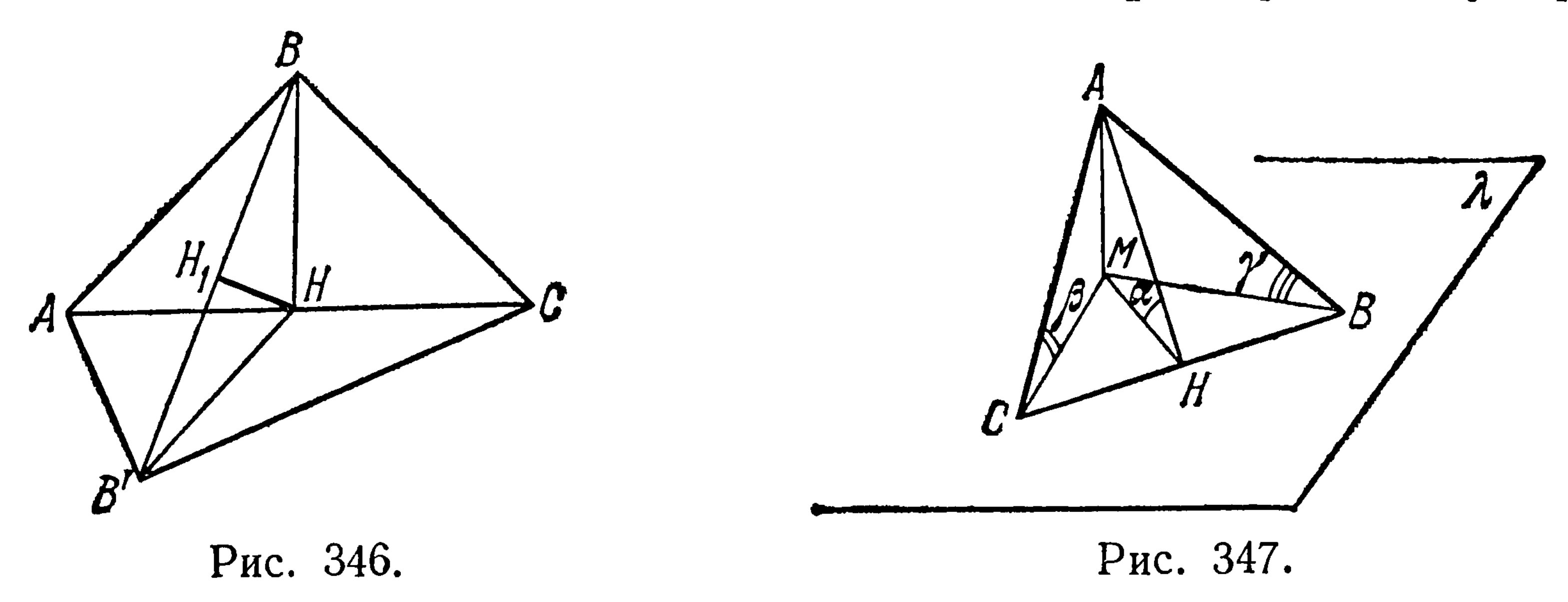


Рис. 346. Рис. 347.

одновременно к обеим прямым AC и BB' и поэтому является общим перпендикуляром этих прямых. Расстояние HH_1 — искомое. Легко находим

$$HH_1=\frac{BH}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 2. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости λ, высота $AH=h$ треугольника наклонена к плоскости λ под углом α. Найти углы наклона его сторон $AB=c$ и $AC=b$ к плоскости λ.

Решение. Опустим из вершины A треугольника ABC перпендикуляр AM на плоскость λ (рис. 347). В треугольнике проведена высота $AH=h$, причем по условию $\angle AHM=\alpha$. Находим $AM=h\sin\alpha$. Теперь из прямоугольных треугольников AMC

и AMB определяем синусы искомых углов:

$$\sin\beta = \frac{h}{b}\sin\alpha, \qquad \sin\gamma = \frac{h}{c}\sin\alpha.$$

Таким образом, $\beta = \arcsin\left(\frac{h}{b}\sin\alpha\right)$, $\gamma = \arcsin\left(\frac{h}{c}\sin\alpha\right)$.

Задача 3. Две наклонные, проведенные к плоскости λ из одной и той же точки M (рис. 348), наклонены к ней под углами α и β. Определить угол между проекциями наклонных, если наклонные образуют между собой угол φ (с вершиной в M).

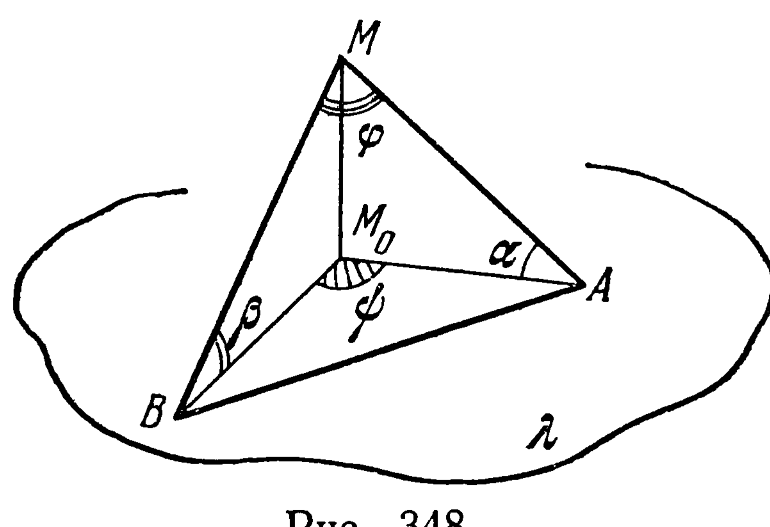


Рис. 348.

Решение. Пусть точка M, из которой проведены наклонные, отстоит от плоскости λ на расстояние h. Тогда длины наклонных соответственно равны $MA = \frac{h}{\sin\alpha}$ и $MB = \frac{h}{\sin\beta}$, а длины их проекций $M_0A = h\operatorname{ctg}\alpha$ и $M_0B = h\operatorname{ctg}\beta$. В треугольнике MAB сторона AB определяется по теореме косинусов:

$$AB^2 = \frac{h^2}{\sin^2\alpha} + \frac{h^2}{\sin^2\beta} - 2\frac{h^2}{\sin\alpha\sin\beta}\cos\varphi,$$

а затем по той же теореме находится косинус искомого угла ψ из треугольника M_0AB:

$$\cos\psi = \frac{-AB^2 + M_0A^2 + M_0B^2}{2M_0A\cdot M_0B} = \frac{\cos\varphi - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Упражнения

1. Наклонная длины 10 образует с плоскостью угол 30°. Какой угол образует с плоскостью наклонная, проведенная из той же точки, если ее длина равна 20?

2. Из некоторой точки плоскости проведены два луча, образующих с плоскостью углы, равные 30°, а между собой угол в 60°. Найти угол между их проекциями на плоскость.

3. Два равносторонних треугольника имеют общую сторону; расстояние между их вершинами, не лежащими на общей стороне, составляет одну треть стороны. Найти кратчайшее расстояние между их общей стороной и линией, соединяющей третьи вершины.

§ 3. Двугранные и многогранные углы

241. Двугранный угол. Две пересекающиеся плоскости разбивают пространство на четыре части. Каждая из этих частей носит название двугранного угла, образованного этими плоскостями. Точнее, *двугранным углом* называется часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями, границей каждой из которых

служит их общая прямая. Плоскости (полуплоскости) называются *гранями*, линия их пересечения — *ребром* двугранного угла. Для двугранных углов обычным образом определяются понятия равенства, неравенства (больше, меньше), сложения и вычитания. Говорят о смежных и вертикальных углах, полном, развернутом и прямом двугранных углах; понятию биссектрисы угла между прямыми аналогично понятие *биссекторной плоскости*, разбивающей каждый из двух вертикальных двугранных углов на две равные части. Приняв полный двугранный угол за 360°, нетрудно будет осуществить измерение двугранных углов в градусной мере. Удобнее, однако, ввести для каждого двугранного угла некоторый плоский угол, служащий *мерой* двугранного угла. Покажем, как это делается.

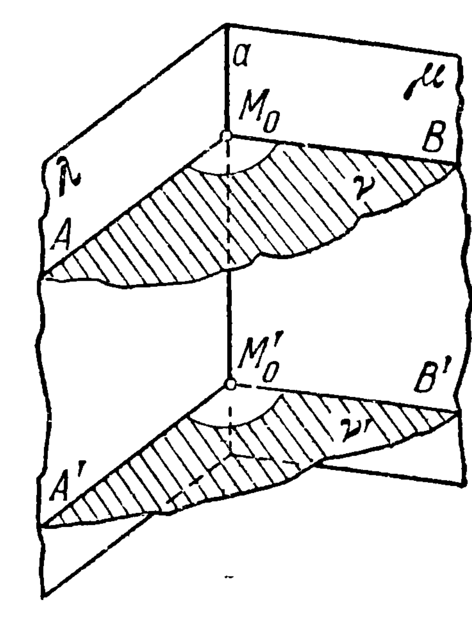


Рис. 349.

Рассмотрим двугранный угол на рис. 349, образованный полуплоскостями λ и μ и имеющий ребро a. Возьмем на ребре произвольную точку M_0 и проведем через нее в каждой плоскости λ и μ прямые M_0A и M_0B, перпендикулярные к ребру угла. Эти прямые образуют плоский угол, принимаемый за меру двугранного угла. Так как обе прямые перпендикулярны к ребру угла, то и плоскость, в которой они лежат, перпендикулярна к нему. Поэтому плоский угол $\hat{A}M_0B$ можно получить, рассекая двугранный угол плоскостью ν, перпендикулярной к его ребру a. Итак, за меру двугранного угла принимается плоский угол, получаемый в пересечении двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной к его ребру (*нормальное сечение* двугранного угла). Так образованный плоский угол $\hat{A}M_0B$ может служить мерой двугранного угла, ибо величина плоского угла не зависит от положения точки M_0. Действительно, стороны двух плоских углов $\hat{A}'M_0'B'$ и $\hat{A}M_0B$, построенных указанным выше способом, попарно параллельны: $A'M_0' \parallel AM_0$, $B'M_0' \parallel BM_0$, и потому углы эти равны (учитываем и одинаковую направленность сторон). Равные двугранные углы измеряются также равными плоскими углами.

В силу принятого определения полный двугранный угол получает в качестве меры также полный плоский угол, развернутый и прямой двугранные углы измеряются соответственно развернутым и прямым плоскими углами; вообще, естественная мера двугранного угла в единицах измерения двугранных углов (градусах) полностью совпадает с его мерой в единицах измерения плоских углов (градусах).

242. Взаимно перпендикулярные плоскости. Две плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются *взаимно перпендикулярными*. В силу сказанного в п. 241 прямой двугран-

ный угол равен смежному с ним и измеряется прямым плоским углом.

Признак перпендикулярности плоскостей. *Две плоскости взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них содержит перпендикуляр к другой плоскости.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть λ — плоскость (рис. 350), a — прямая, перпендикулярная к ней, μ — плоскость, проходящая через прямую a. Требуется доказать, что плоскости λ и μ перпендикулярны. Для этого построим плоский угол, служащий мерой двугранного угла между плоскостями λ и μ. Выбирая

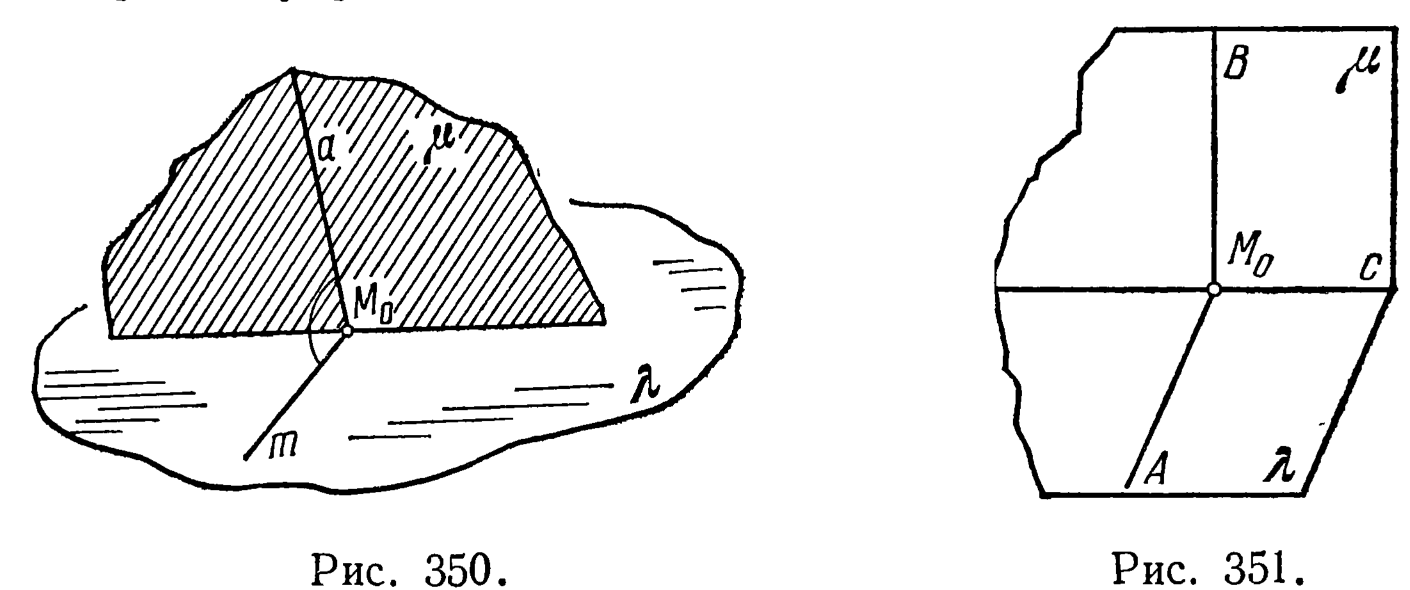


Рис. 350. Рис. 351.

его вершину в точке M_0, заметим, что одна из его сторон (в плоскости μ) уже проведена и совпадает с данным перпендикуляром a. Проведем вторую сторону m в плоскости λ. Принадлежа плоскости λ, она заведомо перпендикулярна к a, и потому плоский угол aM_0m, а вместе с тем и данный двугранный угол прямые.

Необходимость. Пусть плоскости λ и μ (рис. 351) перпендикулярны. Покажем, что в плоскости λ содержится перпендикуляр к плоскости μ. Пусть AM_0B — плоский угол двугранного угла между плоскостями. По условию он должен быть прямым: $\angle AM_0B = d$. Но по построению плоского угла AM_0B имеем также $AM_0 \perp c$. Прямая AM_0, будучи перпендикулярной одновременно к двум прямым плоскости μ, перпендикулярна к этой плоскости, что и требовалось доказать. Ясно также, что плоскость μ в свою очередь содержит перпендикуляр BM_0 к плоскости λ. Свойство одной плоскости содержать перпендикуляр к другой плоскости симметрично — с этим мы встретились еще в теореме о трех перпендикулярах.

Часто используется следующее предложение:

Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей, сама перпендикулярна к ней.

Доказательство предоставляем читателю.

243. Трехгранные углы. Фигура, образованная тремя лучами, исходящими из одной точки O и не лежащими в одной плоскости, и тремя частями плоскостей, заключенных между этими лучами,

называется *трехгранным углом* (рис. 352). Точка O называется *вершиной* угла, лучи a, b, c — его *ребрами*, части плоскостей (a, b), (b, c), (a, c) — *гранями*. Грани суть плоские углы, называемые также *плоскими углами* данного трехгранного угла. Углы между плоскими гранями называются *двугранными углами* данного трехгранного угла.

Теорема 1. *В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для наибольшего из плоских углов. Пусть $\angle ab$ — наибольший плоский угол трехгранного угла на рис. 353. Построим в плоскости (a, b) угол bb', равный углу bc; его сторона b'

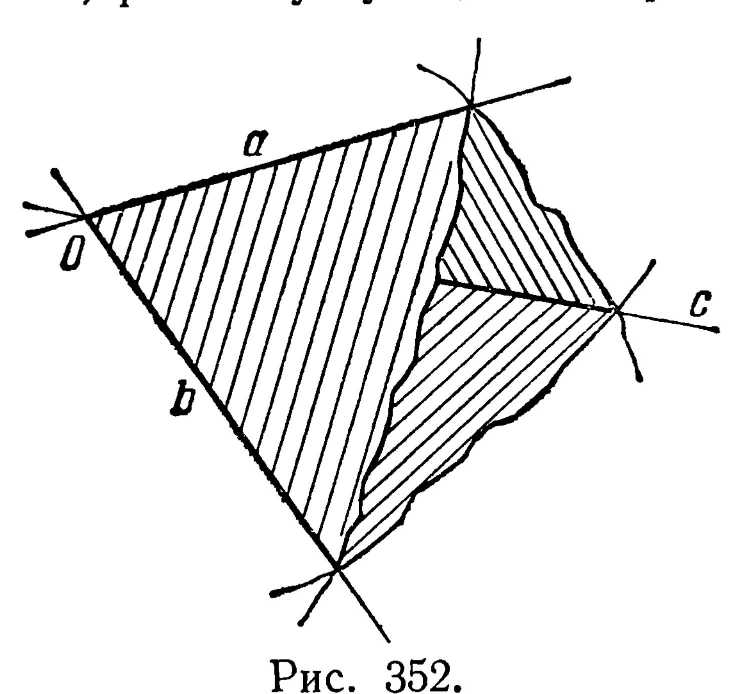


Рис. 352.

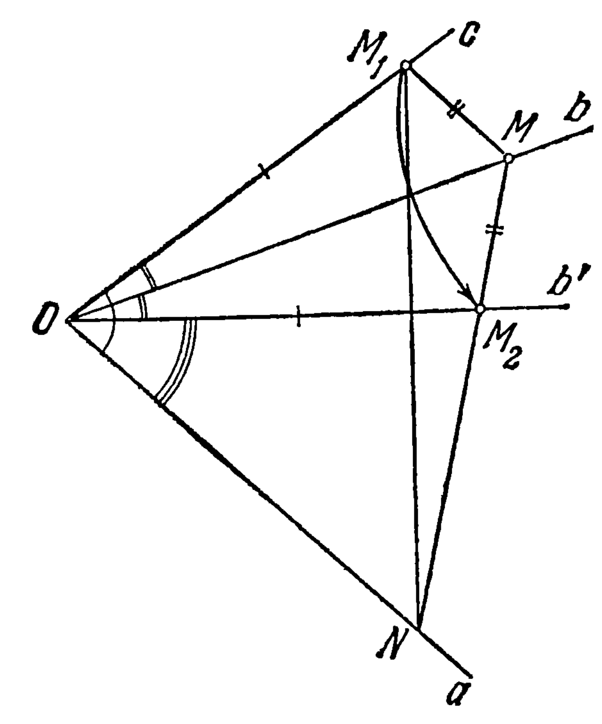


Рис. 353.

пройдет внутри угла ab (ибо угол ab наибольший из плоских углов!). Отложим на прямых c и b' какие-либо равные отрезки $OM_1 = OM_2$. Проведем через точки M_1 и M_2 произвольную плоскость, пересекающую лучи a и b в точках N и M соответственно.

Треугольники OMM_1 и OMM_2 равны, как имеющие равные углы, заключенные между равными сторонами. Покажем, что угол с вершиной O в $\triangle NOM_1$ больше угла с той же вершиной в $\triangle NOM_2$. Действительно, эти углы заключены между парами равных сторон, третья же сторона больше в треугольнике NOM_1:

$$NM_1 > NM - MM_1 = NM_2.$$

Отсюда видно, что сумма двух плоских углов bc и ac больше третьего плоского угла ab, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Сумма плоских углов трехгранного угла меньше четырех прямых.*

Доказательство. Возьмем три точки A, B и C на ребрах трехгранного угла и проведем через них секущую плоскость, как показано на рис. 354. Сумма углов треугольника ABC равна $2d$. Следовательно, сумма шести углов OAC, OAB, OCA, OCB, OBC, OBA больше, чем $2d$ (так как по предыдущей теореме $\angle OAC + \angle OAB > \angle BAC$, $\angle OCA + \angle OCB > \angle BCA$, $\angle OBC + \angle OBA > \angle ABC$). Но сумма углов трех треугольников OAB, OBC, OCA в гранях трехгранного угла равна $6d$. Таким образом, на долю плоских углов трехгранного угла остается меньше четырех прямых: $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 4d$. Эта сумма может быть сколь угодно малой («трехгранный шпиль») или сколь угодно близкой к $4d$: если уменьшать высоту пирамиды

$SABC$ на рис. 355, сохраняя ее основание, то сумма плоских углов при вершине S будет стремиться к $4d$.

Сумма двугранных углов трехгранного угла также имеет границы. Ясно, что каждый из двугранных углов $< 2d$ и потому сумма их менее $6d$. Для той же пирамиды на рис. 355 эта сумма по мере уменьшения высоты пирамиды приближается к своей границе $6d$. Можно также показать, что сумма эта

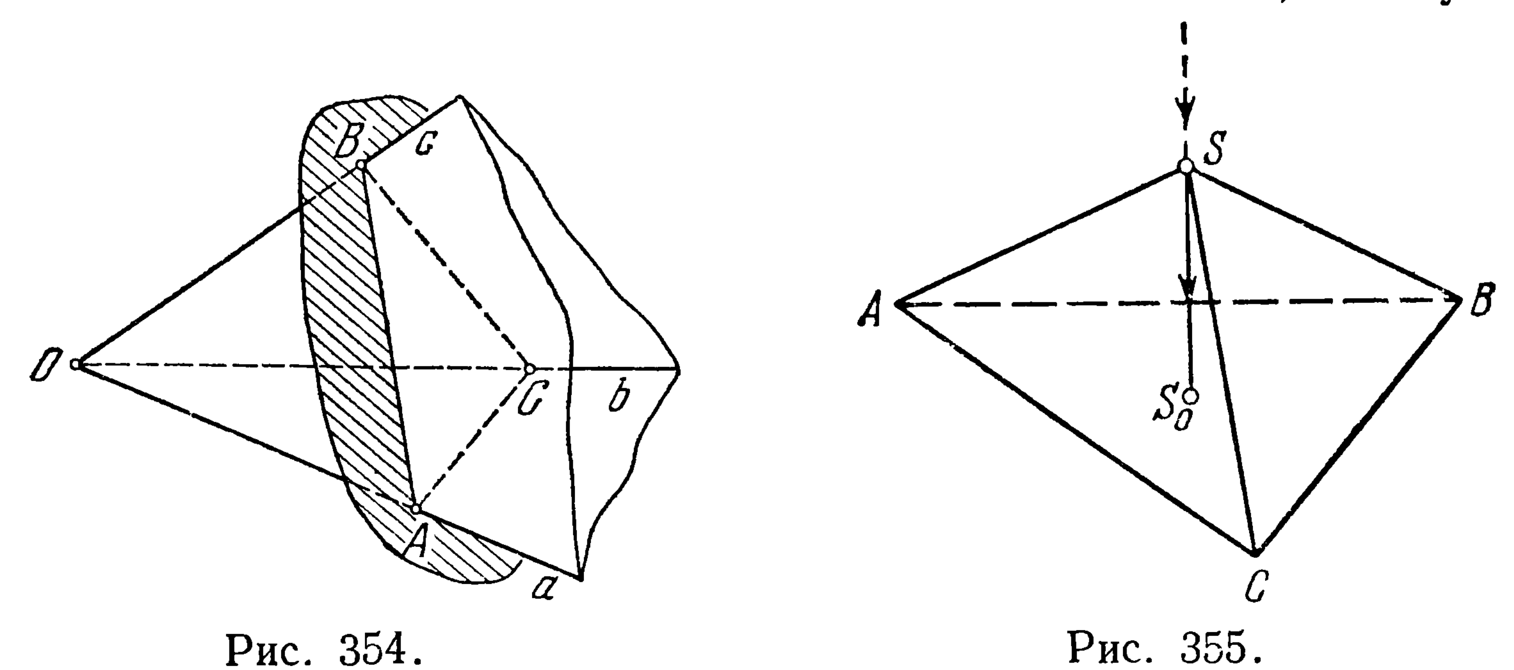


Рис. 354. Рис. 355.

всегда $> 2d$, хотя может отличаться от $2d$ сколь угодно мало. Таким образом, для плоских и двугранных углов трехгранного угла имеют место неравенства

$$0 < \angle ab + \angle bc + \angle ca < 4d,$$
$$2d < \angle a + \angle b + \angle c < 6d.$$

Имеется существенное сходство между геометрией треугольника на плоскости и геометрией трехгранного угла. При этом можно проводить аналогию между углами треугольника и двугранными углами трехгранного угла, с одной стороны, и между сторонами треугольника и плоскими углами трехгранного угла — с другой. Например, при указанной замене понятий сохраняют силу теоремы о равенстве треугольников. Приведем соответствующие формулировки параллельно:

Треугольники	Трехгранные углы
Если стороны двух треугольников соответственно равны, то треугольники равны.	Если плоские углы двух трехгранных углов соответственно равны, то углы равны.
Если в треугольниках равны по две стороны и углы, заключенные между ними, то треугольники равны.	Если в трехгранных углах равны по два плоских угла и двугранные углы между их гранями, то трехгранные углы равны.
Если в двух треугольниках равны по два угла и прилежащие к ним стороны, то треугольники равны.	Если в двух трехгранных углах равны по два двугранных угла и плоские углы в прилежащей к ним грани, то трехгранные углы равны.

Однако два трехгранных угла, у которых равны соответственные двугранные углы, равны между собой. Между тем два треугольника, углы которых соответственно равны, подобны, но не обязательно равны. Для трехгранных углов, как и для треугольников, ставится задача решения трехгранного угла, т. е. задача отыскания одних его элементов по другим заданным. Приведем пример подобной задачи.

Задача. Даны плоские углы трехгранного угла. Найти его двугранные углы.

Решение. Отложим на ребре a отрезок $OA=1$ (рис. 356) и проведем нормальное сечение ABC двугранного угла a. Из прямоугольного треугольника OAB находим $AB = \operatorname{tg} \angle ab$; $OB = \sec \angle ab$. Также имеем $AC = \operatorname{tg} \angle ac$, $OC = \sec \angle ac$.

Для BC находим по теореме косинусов (п. 217), примененной к треугольнику BAC (для краткости плоские углы обозначаем просто ab, ac, bc, двугранные — a, b, c):

$$BC^2 = \operatorname{tg}^2 ab + \operatorname{tg}^2 ac - 2 \operatorname{tg} ab \operatorname{tg} ac \cos a.$$

Теперь применим теорему косинусов к треугольнику BOC:

$$BC^2 = \sec^2 ab + \sec^2 ac - 2 \sec ab \sec ac \cos bc.$$

Получим

$$\sec^2 ab + \sec^2 ac - 2 \sec ab \sec ac \cos bc = \operatorname{tg}^2 ab + \operatorname{tg}^2 ac - 2 \operatorname{tg} ab \operatorname{tg} ac \cos a,$$

или

$$1 + \operatorname{tg} ab \operatorname{tg} ac \cos a = \sec ab \sec ac \cos bc.$$

Отсюда находим

$$\cos bc = \cos ab \cos ac + \sin ab \sin ac \cos a \qquad (243.1)$$

и аналогично

$$\cos ac = \cos ab \cos bc + \sin ab \sin bc \cos b \text{ и т. д.}$$

По этим формулам можно найти двугранные углы, зная плоские углы. Отметим еще без доказательства замечательное соотношение

$$\frac{\sin a}{\sin bc} = \frac{\sin b}{\sin ac} = \frac{\sin c}{\sin ab}, \qquad (243.2)$$

называемое *теоремой синусов*.

Объяснение глубокой аналогии между геометрией трехгранного угла и геометрией треугольника нетрудно получить, если провести следующее построение. Поместим в вершину трехгранного угла O центр сферы единичного радиуса

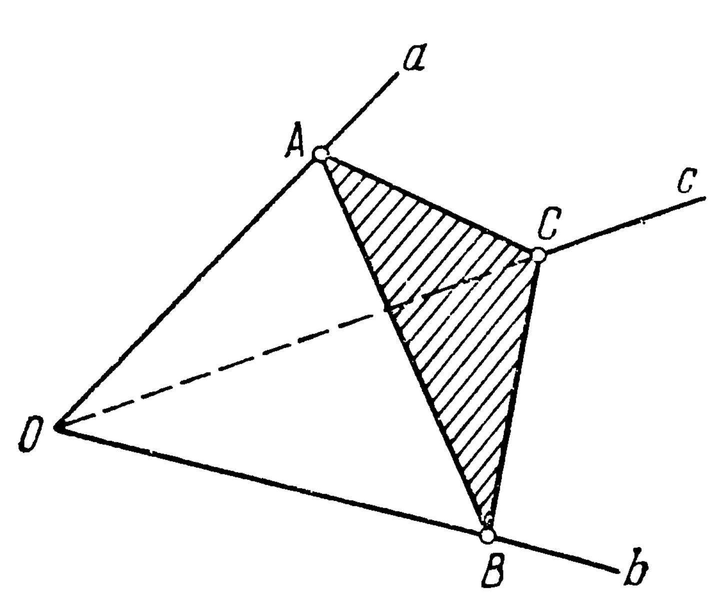


Рис. 356.

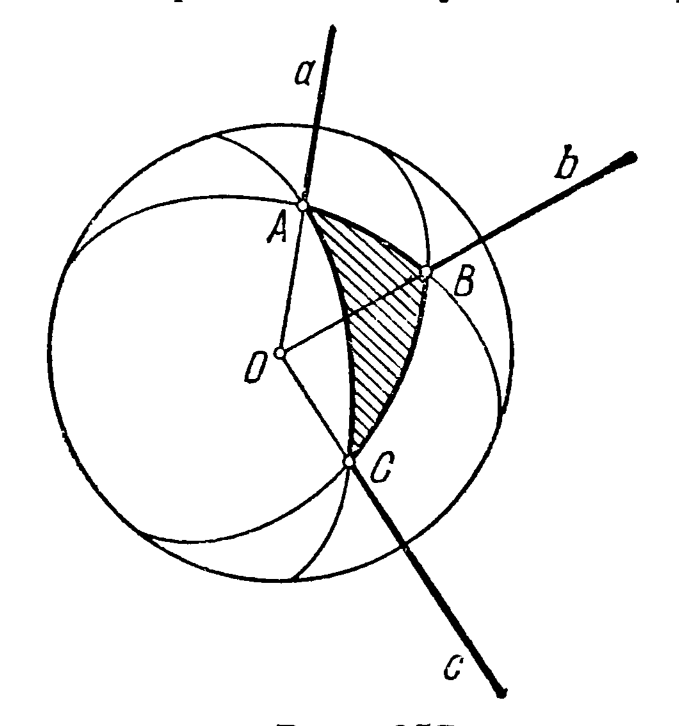


Рис. 357.

(рис. 357). Тогда ребра пересекут поверхность сферы в трех точках A, B, C, грани угла высекут на сфере дуги больших кругов AC, AB, $\overset{\frown}{BC}$. На сфере образуется фигура ABC, называемая *сферическим треугольником*. Дуги («стороны» треугольника) измеряются плоскими углами трехгранного угла, углы при вершинах суть плоские углы двугранных углов. Поэтому решение трехгранных углов есть не что иное, как решение сферических треугольников, которое составляет предмет сферической тригонометрии. Соотношения (243.1) и (243.2) относятся к числу основных соотношений сферической тригонометрии. Сферическая тригонометрия имеет важное значение для астрономии. Таким образом, теория трехгранных углов есть теория сферических треугольников и потому во многом сходна с теорией треугольника на плоскости. Различие этих теорий состоит в том, что: 1) у сферического треугольника и углы и

стороны измеряются в угловой мере, поэтому, например, в теореме синусов фигурируют не стороны, а синусы сторон AB, AC, BC; 2) сумма углов сферического треугольника не равна $2d$, она всегда больше $2d$, например, у треугольника (рис. 358), вырезанного из сферы тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, она равна $3d$.

Пример. Угол a трехгранного угла — прямой, прилежащие к нему плоские углы $ab=60°$, $ac=30°$. Найти остальные элементы трехгранного угла.

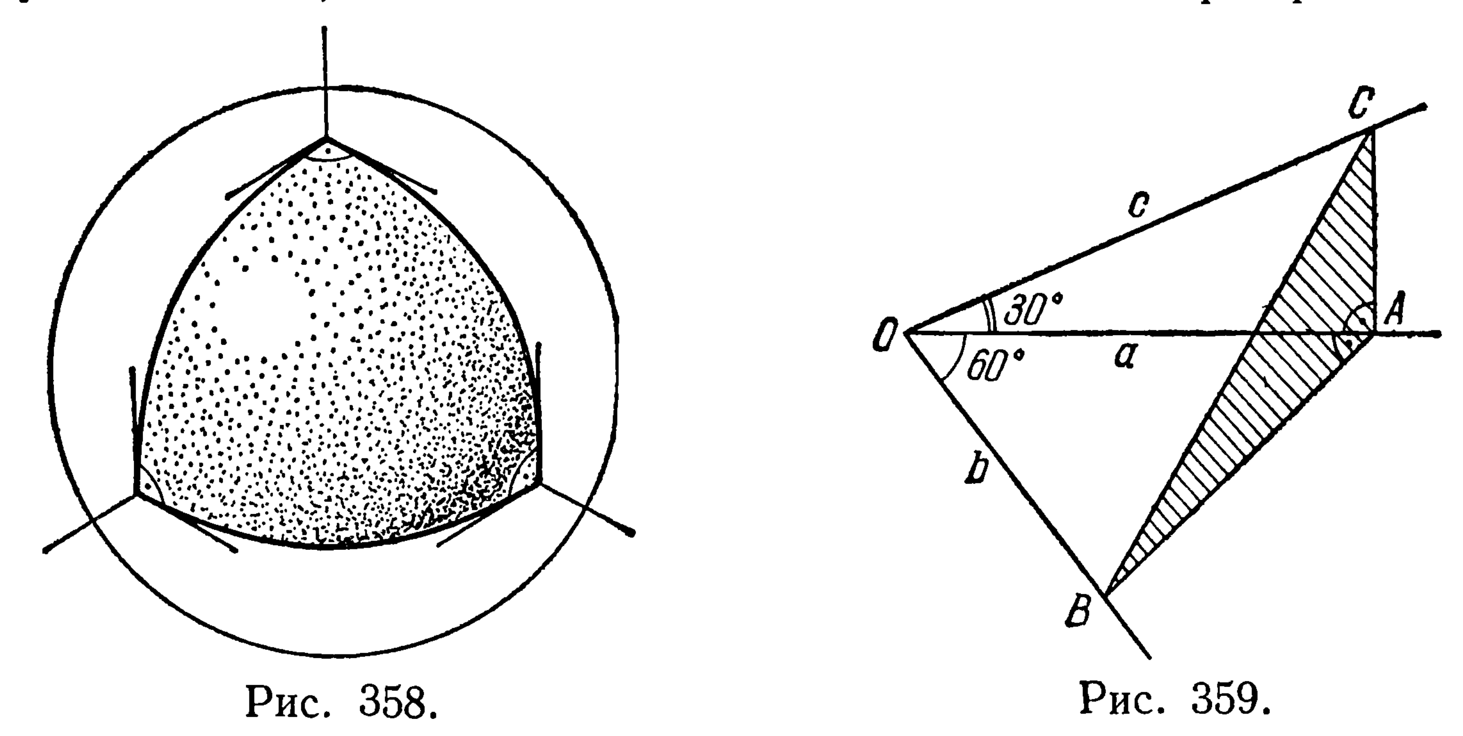


Рис. 358. Рис. 359.

Решение. Отложим на ребре прямого двугранного угла отрезок OA, равный единице, и проведем через него нормальное сечение ABC. Сравним выражения квадрата стороны BC из треугольника OBC и прямоугольного треугольника ABC (рис. 359):

$$BC^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(2)^2-2\cdot2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos bc.$$

Находим $\cos bc=\sqrt{3}/4$, $\sin bc=\sqrt{13}/4$. Теперь, зная все три плоских угла, имеем для двугранных углов

$$\frac{\sin b}{\sin ac}=\frac{\sin c}{\sin ab}=\frac{\sin a}{\sin bc}=\frac{4}{\sqrt{13}},$$

или

$$\frac{\sin b}{{}^1/_2}=\frac{\sin c}{\sqrt{3}/2}=\frac{4}{\sqrt{13}},$$

откуда

$$\sin b=\frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \sin c=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Значения самих углов могут быть найдены по таблицам тригонометрических функций.

244. Многогранные углы. Несколько плоскостей, пересекающихся в одной точке, разбивают пространство на части, каждая из которых может быть названа *многогранным углом*. Мы сохраним название многогранного угла лишь за такой фигурой, ограниченной, несколькими гранями (плоскими углами) с общей вершиной (рис. 360), для которой каждый из плоских углов, являющихся гранями угла, меньше развернутого. Если еще по-

требовать, чтобы весь многогранный угол лежал по одну сторону от плоскости каждой из своих граней, то назовем его *выпуклым* многогранным углом. Все то немногое, что мы здесь сообщаем о многогранных углах, относится к выпуклым углам.

Между многогранными углами и многоугольниками можно найти известные аналогии, как это сделано для трехгранных углов и треугольников. При этом сторонам и углам многоугольника отвечают соответственно плоские и двугранные углы многогранного угла.

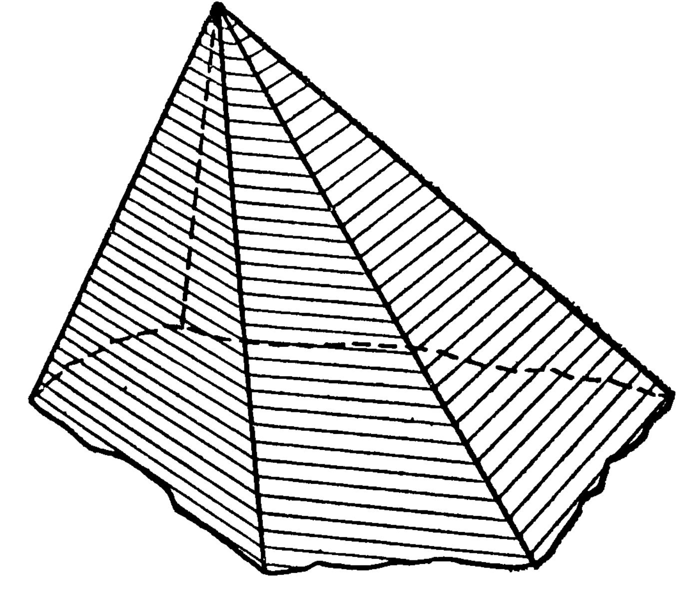


Рис. 360.

Тем же способом, как это было сделано для трехгранного угла, показывается, что сумма плоских углов при вершине многогранного угла (выпуклого) всегда меньше четырех прямых. Сумма двугранных углов n-гранного угла заключена между $2nd$ и $2(n-2)d$. К первому значению она приближается для очень сплющенных «тупых» углов, ко второму — для очень «острых», иглообразных углов.

Правильный n-гранный угол определяется требованием равенства всех плоских и всех двугранных углов. Правильным всегда является угол при вершине любой правильной пирамиды (п. 252).

Нетрудно доказать, что у всякого правильного n-гранного угла биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по одной прямой—оси симметрии угла. Сечение правильного n-гранного угла плоскостью, перпендикулярной к этой оси, будет правильным n-угольником.

§ 4. Многогранники

245. Многогранники. *Многогранник* определяется как часть пространства, ограниченная со всех сторон плоскими гранями. Предполагается, что многогранник ограничен замкнутой поверхностью, составленной из многоугольников, так, что любая сторона каждого многоугольника является также стороной еще одного и только одного многоугольника и любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют общих точек. Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его *гранями*; стороны многоугольников, ограничивающих многогранник (по условию каждая из них принадлежит одновременно двум граням),—*ребрами* многогранника; вершины этих многоугольников—*вершинами* многогранника. Для трех многогранников на рис. 361, *а*, *б*, *в* числа вершин, ребер и граней соответственно равны 7, 11, 6; 8, 12, 6; 11, 20, 11. Если обозначить эти три числа через α_0, α_1, α_2, то во всех

случаях $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Это соотношение сохраняется для любых многогранников *(теорема Эйлера)*.

Многогранники классифицируют по числу граней. При этом часто используют греческие наименования: четырехгранник называют *тетраэдром*, пятигранник — *пентаэдром*, шестигранник — *гексаэдром* и т. д.

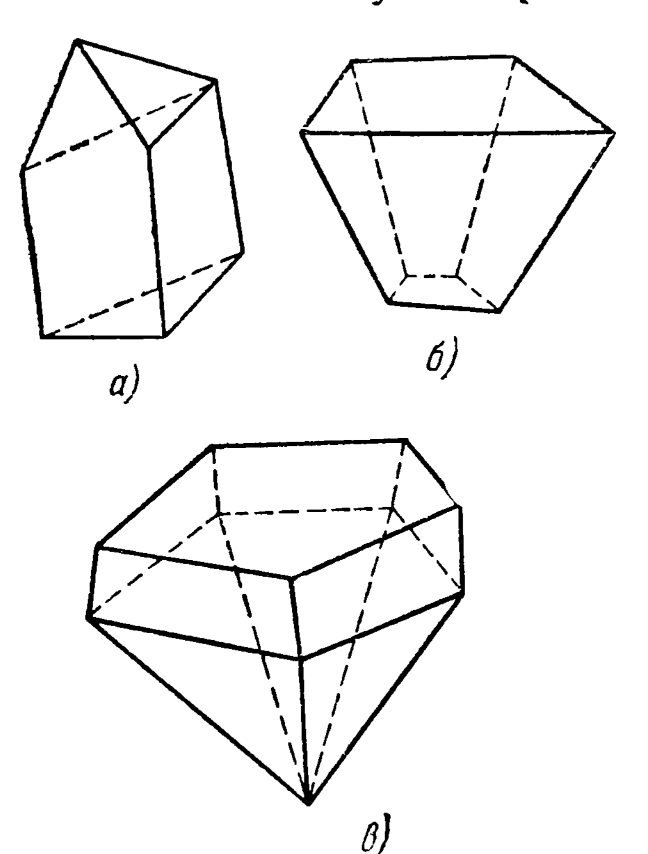


Рис. 361.

Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней. Мы рассматриваем исключительно выпуклые многогранники. Все многогранники на рис. 361 выпуклые.

В каждой из вершин многогранника его грани (точнее, плоскости этих граней) образуют многогранные углы.

246. Правильные многогранники. Многогранник называется *правильным*, если все его грани суть равные правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны между собой.

Правильные многогранники известны с глубокой древности. Замечательно, что имеется всего пять видов правильных многогранников. На первый взгляд это кажется неожиданным, но к этому выводу можно прийти путем несложных рассуждений. В самом деле, выясним, из каких многоугольников можно составить поверхность правильного многогранника. В каждой вершине должно сходиться, очевидно, не менее трех граней. Но сумма плоских углов при вершине многогранного угла не более четырех прямых. Следовательно, угол при вершине правильного многоугольника, служащего гранью многогранника, должен быть не больше $4d/3$. Таким свойством обладают правильный треугольник, квадрат и правильный пятиугольник. Только из этих трех видов многоугольников можно образовать поверхности правильных многогранников. В то же время ограничивается и число граней, сходящихся в одной вершине: снова учитываем сумму плоских углов. В случае треугольных граней в вершине могут сходиться:

3 грани — сумма плоских углов 180°,
4 грани — сумма плоских углов 240°,
5 граней — сумма плоских углов 300°,

в случае четырехугольных граней (квадратов) — только

3 грани — сумма плоских углов 270°,

в случае пятиугольных граней —

3 грани — сумма плоских углов 324°.

Каждая из пяти возможностей действительно реализуется, имеется соответствующий тип правильного многогранника и с точностью до подобия только один. Мы ограничимся тем, что приведем изображение и краткое описание каждого из пяти типов правильных многогранников.

1. *Правильный тетраэдр* (рис. 362). Он представляет собой правильную треугольную пирамиду, боковые грани которой равны основанию. Поверхность

его образована правильными треугольниками, в каждой вершине сходятся три таких треугольника.

2. *Правильный октаэдр* (восьмигранник). Грани — правильные треугольники, число граней, сходящихся в одной вершине, равно четырем (рис. 363). Правильный октаэдр можно построить так: следует сначала построить правильную

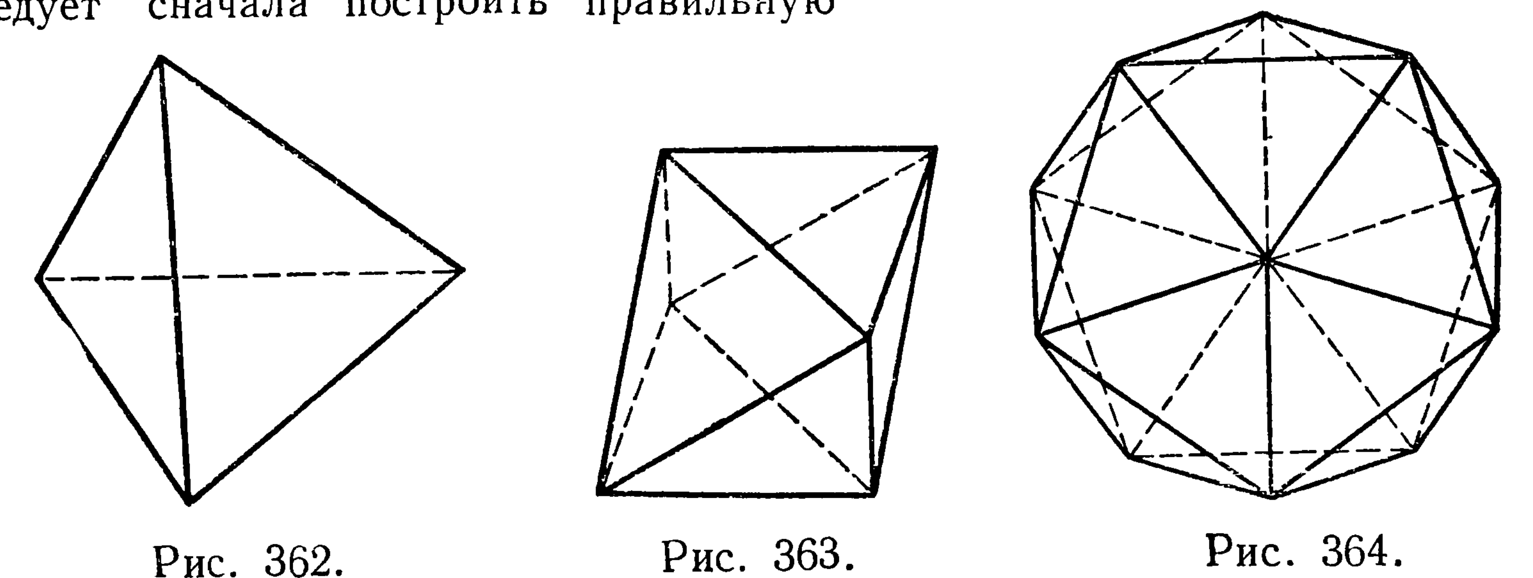


Рис. 362. Рис. 363. Рис. 364.

четырехугольную пирамиду (см. п. 252) с гранями в виде равносторонних треугольников, затем отразить ее в плоскости основания и плоскость основания (перегородку между двумя пирамидами) убрать. Тогда и получится правильный октаэдр.

3. Грани треугольные, в вершине сходятся пять граней (рис. 364). Можно доказать, что и такой тип правильного многогранника существует. Он имеет двадцать граней и называется *икосаэдром*.

4. Грани — квадраты, в вершине сходятся по три грани. Правильный многогранник называется *кубом* (рис. 365).

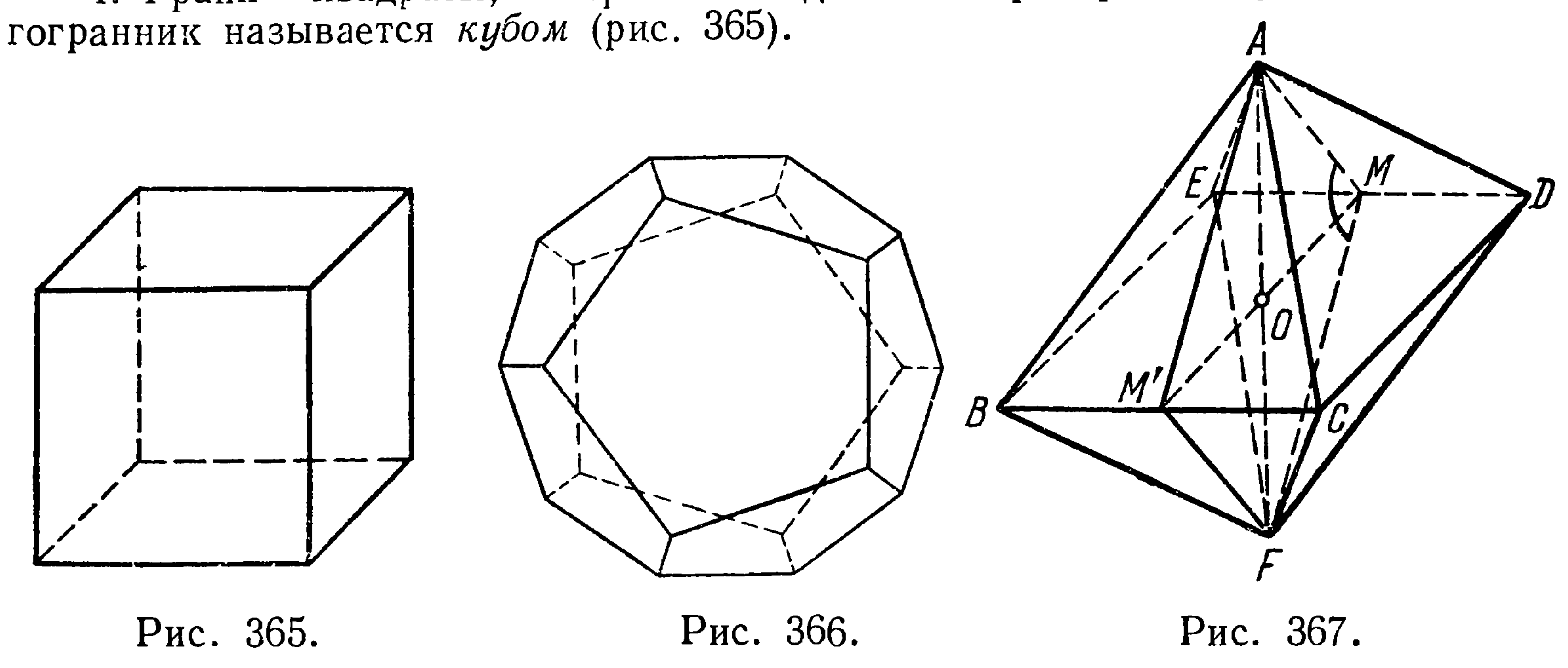


Рис. 365. Рис. 366. Рис. 367.

5. Грани — правильные пятиугольники (рис. 366). В вершине сходятся по три грани. Общее число граней — двенадцать. Многогранник называется *додекаэдром* (двенадцатигранником).

Задача. Найти двугранные углы при ребрах правильных многогранников.

Решение. Решение очевидно для куба — углы при ребрах прямые. Разберем два случая правильный октаэдр и правильный икосаэдр.

1) Начнем со случая октаэдра (рис. 367). Проведем сечение через противоположные вершины A и F, перпендикулярное к ребрам BC и DE. При вершине M сечения получим искомый угол φ при ребре DE. Если ребро октаэдра равно a, то имеем $OM = a/2$, $AM = a\sqrt{3}/2$ и для косинуса половины искомого

угла имеем $\cos(\varphi/2)=1/\sqrt{3}$. Отсюда $\sin(\varphi/2)=\sqrt{2/3}$ и, наконец, косинус искомого угла $\cos\varphi=-1/3$, $\varphi=\arccos(-1/3)$ (знак минус показывает, что угол φ тупой).

2) Рассмотрим случай икосаэдра. Пять правильных треугольников, примыкающих к одной вершине, образуют правильную пятиугольную пирамиду с боковыми гранями в форме правильных треугольников (см. п. 252). Рассмотрим эту пирамиду на отдельном чертеже (рис. 368) и проведем через вершины основания A и C секущую плоскость перпендикулярно к боковому ребру BM.

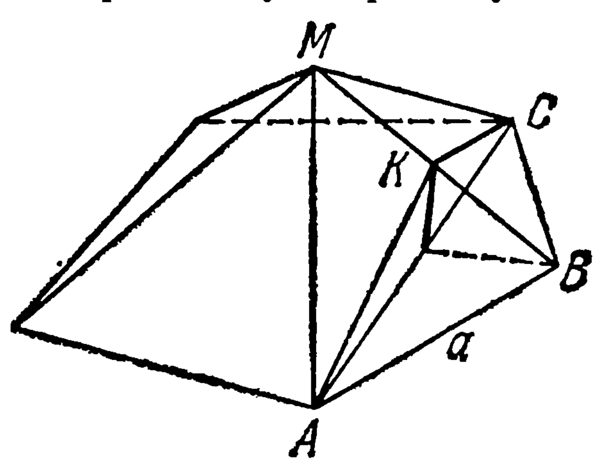


Рис. 368.

В сечении получим треугольник AKC, угол $\varphi=\angle AKC$ и будет искомый. Из правильного пятиугольника в основании пирамиды находим (a — ребро нашего икосаэдра) $AC=2a\cos 36°$, в равнобедренном треугольнике ACK имеем

$$AK=\frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{1}{2}AC}{AK}=\frac{2\cos 36°}{\sqrt{3}},$$

откуда $\varphi=2\arcsin\frac{2\cos 36°}{\sqrt{3}}$; значение $\cos 36°$ можно взять из таблиц или использовать выражение $\sin 18°$ (п. 228).

Два оставшихся случая читатель разберет самостоятельно.

Упражнения

1. Проверить формулу $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$ (п. 245) для всех правильных многогранников.

2. Вершинами какого правильного многогранника служат центры граней куба? Тетраэдра? Октаэдра?

3. Найти угол наклона ребра правильного тетраэдра к плоскости грани, не содержащей этого ребра.

Глава XX

МНОГОГРАННИКИ И КРУГЛЫЕ ТЕЛА

§ 1. Призма. Параллелепипед. Цилиндр

247. Цилиндры и призмы. Рассмотрим какую-либо линию l, лежащую в плоскости λ (рис. 369), и некоторую прямую s, пересекающую эту плоскость. Через все точки данной линии l проведем прямые, параллельные прямой s; образованная этими прямыми поверхность σ называется *цилиндрической поверхностью*. Линия l называется *направляющей* этой поверхности, прямые s_1, s_2, ... — ее *образующими*. На рис. 370 представлена такая цилиндрическая поверхность, направляющая которой является ломаной линией $ABCDEF$; такая цилиндрическая поверхность состоит из ряда плоских полос, заключенных между парами параллельных прямых, и называется *призматической поверхностью*. Образующие, проходящие через вершины направляющей ломаной, называются *ребрами* призматической поверхности, плоские полосы между ними — ее *гранями*.

Рис. 369.

Рис. 370.

Если рассечь любую цилиндрическую поверхность произвольной плоскостью, не параллельной ее образующим, то получим

линию, которая также может быть принята за направляющую данной поверхности. Среди направляющих выделяется та, которая получается от сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной к образующим поверхности. Такое сечение называется *нормальным сечением*, а соответствующая направляющая — *нормальной направляющей*.

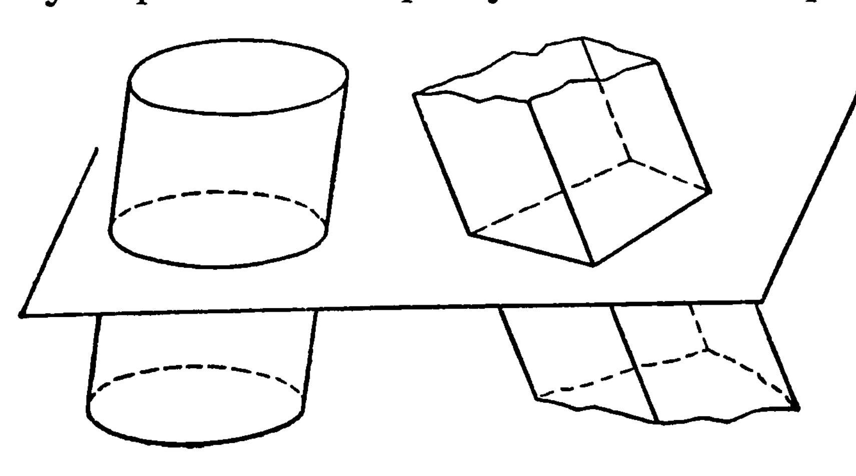


Рис. 371.

Если направляющая — замкнутая (выпуклая) линия (ломаная или кривая), то и соответствующая поверхность называется *замкнутой* (выпуклой) призматической или цилиндрической поверхностью (рис. 371). Из цилиндрических поверхностей простейшая имеет своей нормальной направляющей окружность (рис. 372). Ее удобно образовать, вращая прямую a вокруг оси, параллельной ей (ось OO' перпендикулярна к плоскости направляющей окружности). Рассечем замкнутую выпуклую призматическую поверхность

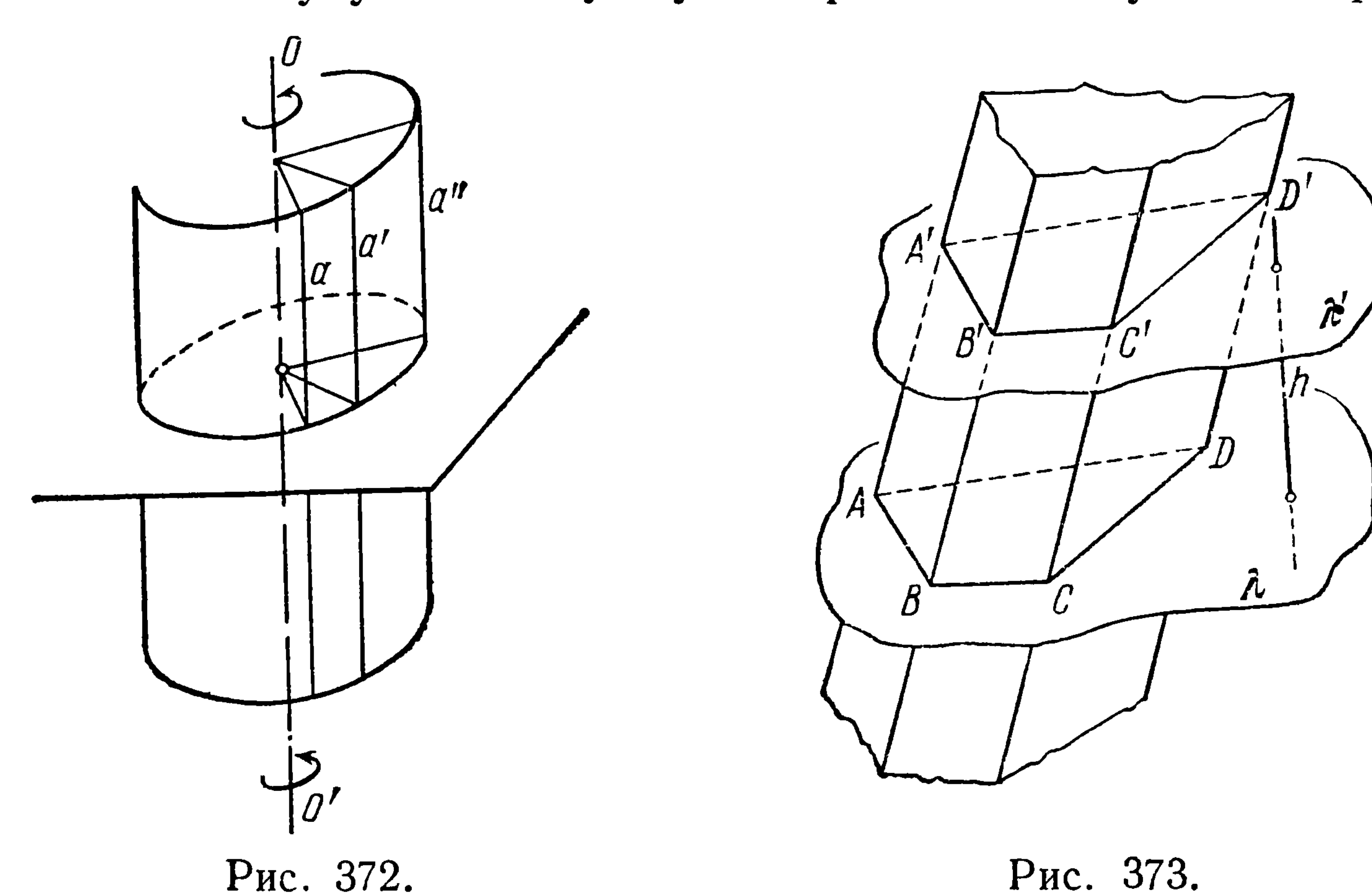


Рис. 372. Рис. 373.

(рис. 373) двумя плоскостями λ и λ', параллельными между собой, но не параллельными образующим. В сечениях получим выпуклые многоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Теперь часть призматической поверхности, заключенная между плоскостями λ и λ', и две образовавшиеся при этом многоугольные пластинки в этих плоскостях ограничивают тело, называемое *призматическим телом* или, короче, *призмой*. Итак, призмой называется тело, ограниченное с боков выпуклой замкнутой призматической поверхностью и с торцов параллельными многоугольными основаниями.

Часть боковой поверхности призмы между двумя соседними ребрами, т. е. боковая грань призмы, является *параллелограммом* (противоположные стороны по построению попарно параллельны); основания (условно можно называть их верхним и нижним основаниями) суть равные многоугольники. Действительно, стороны их попарно равны и параллельны, углы, заключенные между параллельными сторонами, равны. Ясно также, что все боковые ребра призмы равны. *Высотой* призмы называется расстояние по перпендикуляру между плоскостями оснований призмы (отрезок h на рис. 373).

В призме также приходится рассматривать некоторые углы, названия которых понятны сами собой. Это плоские углы основания, плоские углы в боковых гранях, двугранные углы при основании (т. е. двугранные углы, образованные плоскостью основания и плоскостями боковых граней), двугранные углы при боковых ребрах (т. е. двугранные углы между боковыми гранями).

Если боковые грани призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований, т. е. если основания служат нормальными сечениями боковой поверхности, то призма называется *прямой* призмой. У прямой призмы боковое ребро служит высотой. Плоские углы основания являются плоскими углами двугранных углов между боковыми гранями.

Прямая призма, основания которой суть правильные многоугольники, называется *правильной призмой*; следует заметить, что правильная призма, вообще говоря (за исключением куба), не может считаться правильным многогранником, ибо основания ее суть грани, форма и размеры которых отличны от формы и размеров боковых граней.

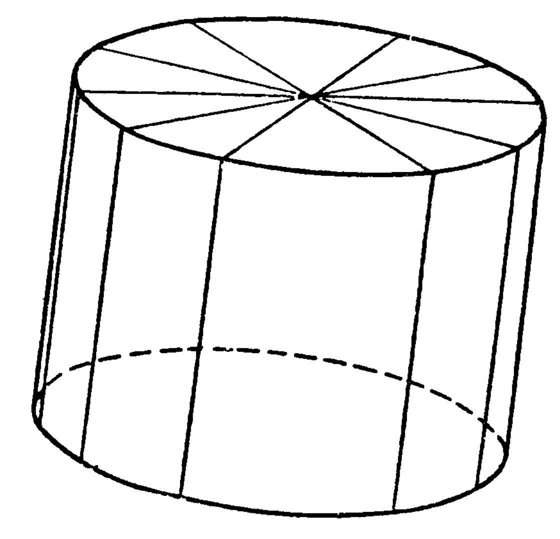


Рис. 374.

Цилиндрическое тело, короче цилиндр, определяется аналогично призме: *цилиндром* называется тело, ограниченное с боков замкнутой (выпуклой) цилиндрической поверхностью, а с торцов двумя плоскими параллельными основаниями. Оба основания цилиндра равны между собой, также равны между собой и все образующие цилиндра (т. е. отрезки образующих цилиндрической поверхности между плоскостями оснований). Цилиндр называется *прямым*, если плоскости его оснований перпендикулярны к образующим. Мы изучим только прямой круговой цилиндр (рис. 374), называемый также *цилиндром вращения*. Он может быть образован вращением прямоугольника вокруг одной из своих сторон. Радиус основания называется *радиусом* цилиндра, образующая одновременно служит высотой.

248. Параллелепипеды. *Параллелепипедом* называется призма, основания которой суть параллелограммы (рис. 375). В этом случае любую из граней можно принять за основание (точнее, две параллельные грани — за пару оснований). Параллелепипед является «трижды призмой».

Как и всякая призма, параллелепипед называется *прямым*,

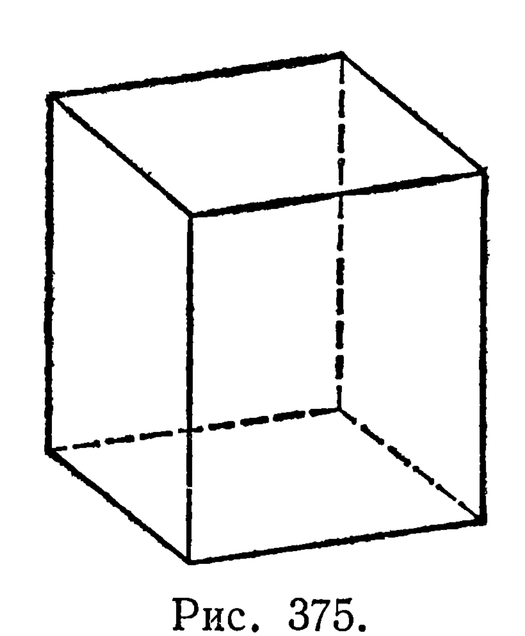


Рис. 375.

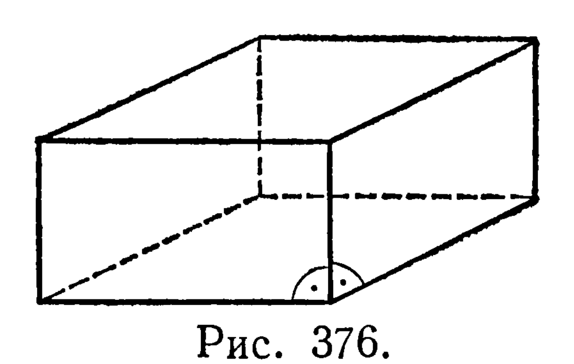


Рис. 376.

если его боковые ребра перпендикулярны к основаниям (рис. 376). Боковые грани прямого параллелепипеда суть прямоугольники, основания — параллелограммы произвольного вида. Если у прямого параллелепипеда и в основаниях лежат прямоугольники, то такой параллелепипед называется *прямоугольным.* Все его двугранные углы прямые. Он является прямым по отношению к каждой паре противоположных граней, принятых за основания, т. е. «трижды прямым».

Длины трех взаимно перпендикулярных ребер прямоугольного параллелепипеда называют иногда его *измерениями.* Прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны, называется *кубом.*

Справедлива следующая

Теорема, обобщающая теорему Пифагора. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*

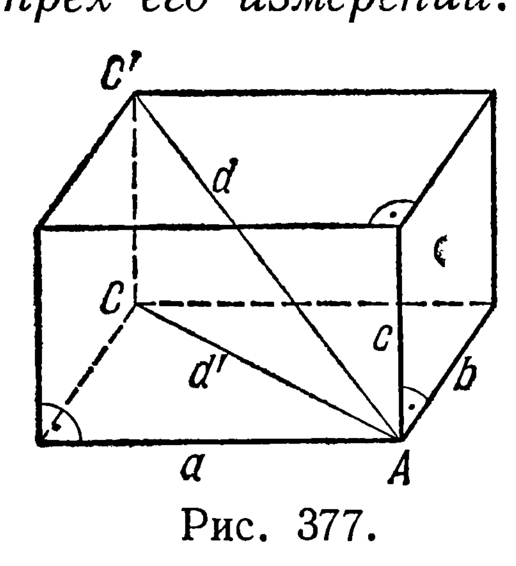


Рис. 377.

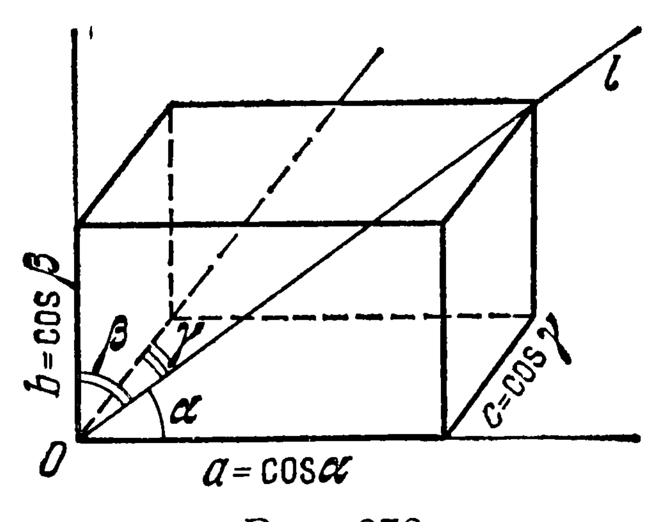


Рис. 378.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед на рис. 377 и его диагональ $AC' = d$. Проведем также диагональ основания $AC = d'$. Квадрат этой диагонали по теореме Пифагора равен сумме квадратов двух сторон основания: $d'^2 = a^2 + b^2$. Далее заметим, что в треугольнике ACC' угол C

прямой. Значит, $d^2=c^2+d'^2$; подставляя сюда выражение для d'^2, найдем

$$d^2=a^2+b^2+c^2,$$

что и требовалось доказать. В частности, диагональ куба с ребром, равным единице, равна $\sqrt{3}$.

Задача. Доказать, что сумма квадратов синусов трех углов, образуемых произвольным лучом с ребрами прямого трехгранного угла, равна двум.

Решение. Пусть O—прямой трехгранный угол (рис. 378), l—данный луч. Отложим на луче отрезок, равный единице, и примем его за диагональ прямоугольного параллелепипеда, три грани которого лежат в гранях данного трехгранного угла. Тогда ребра параллелепипеда, как видно из рис. 378, будут выражаться косинусами углов, образуемых лучом с ребрами: $a=\cos\alpha$, $b=\cos\beta$, $c=\cos\gamma$. По теореме о квадрате диагонали находим

$$a^2+b^2+c^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (248.1)$$

и, заменяя выражения $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ через $1-\sin^2\alpha$ и т. д., найдем

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2. \qquad (248.2)$$

249. Объемы призм и цилиндров. Будем считать формулу п. 168, выражающую объем прямоугольного параллелепипеда как произведение трех его ребер, установленной:

$$V=abc. \qquad (249.1)$$

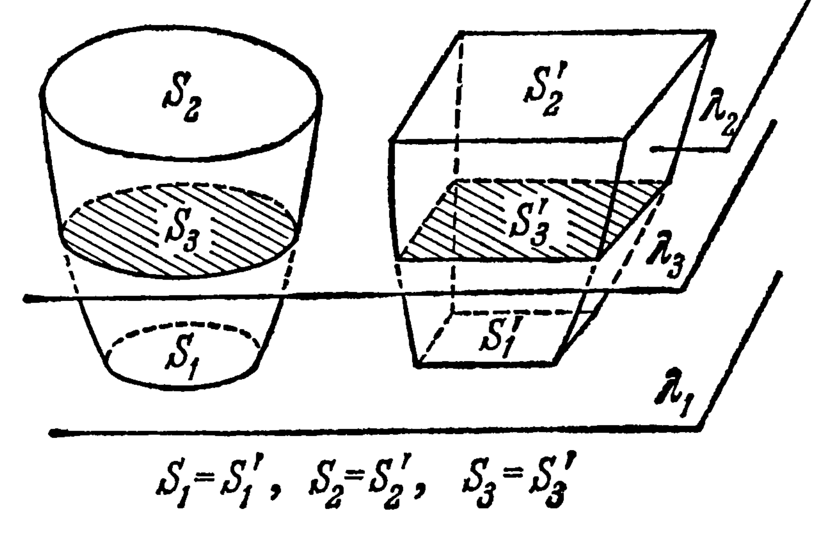


Рис. 379.

Объемы всех иных призматических или цилиндрических тел немедленно вычисляются путем замены этих тел прямоугольными параллелепипедами, равновеликими им, на основе следующего правила, принимаемого нами аксиоматически и известного под названием *принципа Кавальери*.

Принцип Кавальери. *Если два тела заключены между двумя параллельными плоскостями* (рис. 379) *и сечения их любой плоскостью, параллельной данным двум основаниям, равновелики между собой*: $S_1=S_1'$, $S_2=S_2'$, $S_3=S_3'$, *то объемы тел равны*: $V=V'$.

Теперь мы в состоянии вычислить объем любой призмы и любого цилиндра, прямого или наклонного.

Пусть дано некоторое цилиндрическое тело высоты h с площадью основания (а значит, и площадью любого сечения, параллельного плоскости основания!), равной S. Построим прямоугольный параллелепипед с той же высотой и такой же площадью

основания S (рис. 380). Объем данного тела и объем параллелепипеда будут равны на основании принципа Кавальери. Но объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту: $V=Sh$. Таким же будет, следовательно, и объем цилиндра (призмы).

Объем любого цилиндра (призмы) равен произведению площади основания на высоту:

$$V=Sh. \qquad (249.2)$$

В частности, для прямого круглого цилиндра площадь основания равна πR^2, где R — радиус цилиндра, и объем получается равным

$$V=\pi R^2 h. \qquad (249.3)$$

Задача. Треугольная призма описана около цилиндра вращения радиуса R и высоты h. Периметр основания равен P. Найти объем призмы.

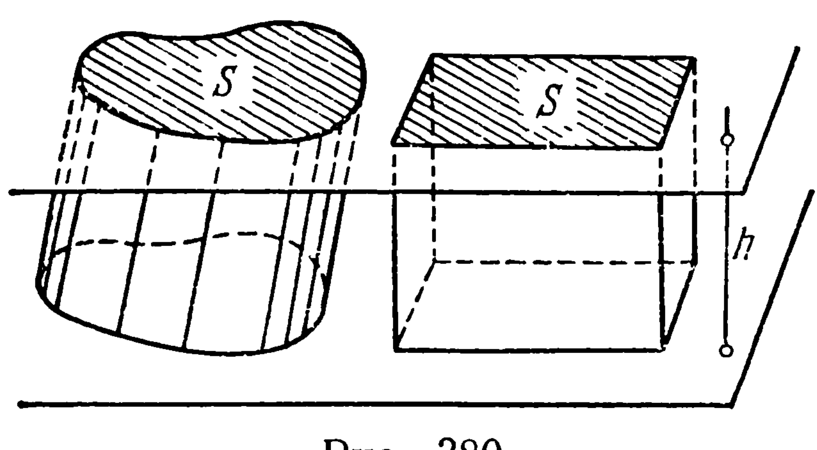


Рис. 380.

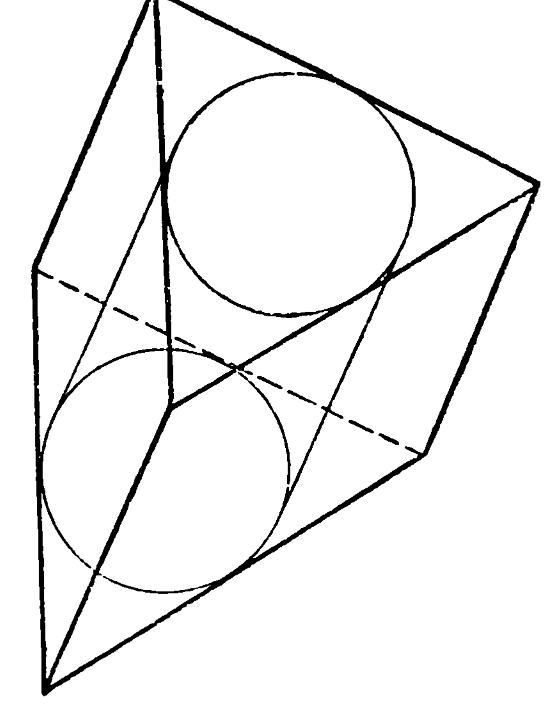


Рис. 381.

Решение. Радиус цилиндра есть в то же время и радиус окружности, вписанной в основание призмы (рис. 381). Этот радиус равен $R=2S/P$ (см. п. 219). Отсюда площадь основания $S=PR/2$ и искомый объем $V=PRh/2$.

250. Площадь боковой поверхности призмы. Боковые грани произвольной призмы суть параллелограммы, и потому площадь этих граней вычисляется по известным правилам. *Площадью боковой поверхности призмы* называется сумма площадей всех ее боковых граней. Для того чтобы написать формулу, выражающую площадь боковой поверхности призмы (вообще говоря, наклонной), рассмотрим нормальное сечение призмы (рис. 382). Так как плоскость нормального сечения по определению перпендикулярна к ребрам призмы, то отрезки, по которым она пересекает боковые грани призмы, служат высотами этих граней, если за основания их приняты ребра призмы. Площади отдельных граней будут выражаться равенствами

$$S_1=A_0B_0\cdot l, \quad S_2=B_0C_0\cdot l, \quad S_3=C_0D_0\cdot l, \quad S_4=D_0A_0\cdot l.$$

Складывая все эти равенства почленно и вынося за скобки l, найдем

$$S = (A_0B_0 + B_0C_0 + C_0D_0 + D_0A_0)\,l,$$

или, учитывая, что сумма в скобках есть периметр нормального сечения, окончательно получим

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{норм}}\,l. \qquad (250.1)$$

Боковая поверхность призмы равна произведению ее бокового ребра на периметр нормального сечения.

В случае прямой призмы эта формулировка упрощается.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению бокового ребра на периметр основания призмы.

Задача. Правильная прямая трехгранная призма с ребром основания, равным a, усечена наклонной плоскостью. Длины боковых ребер усеченной призмы суть p, q и r. Найти площадь боковой поверхности усеченной призмы.

Решение. Боковые грани усеченной призмы суть трапеции (прямоугольные). Применим к каждой из них формулу для площади трапеции. Находим

$$S_1 = \frac{p+q}{2}a, \qquad S_2 = \frac{q+r}{2}a, \qquad S_3 = \frac{p+r}{2}a,$$

и площадь боковой поверхности равна $S = (p+q+r)\,a$.

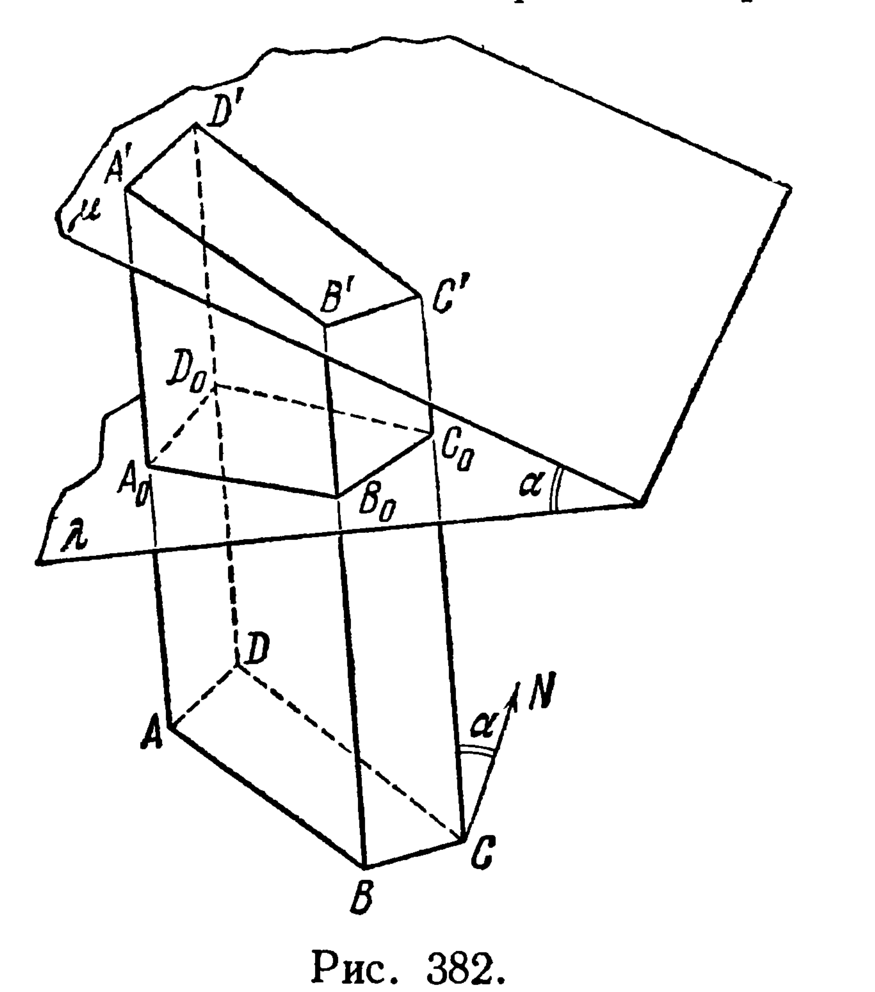


Рис. 382.

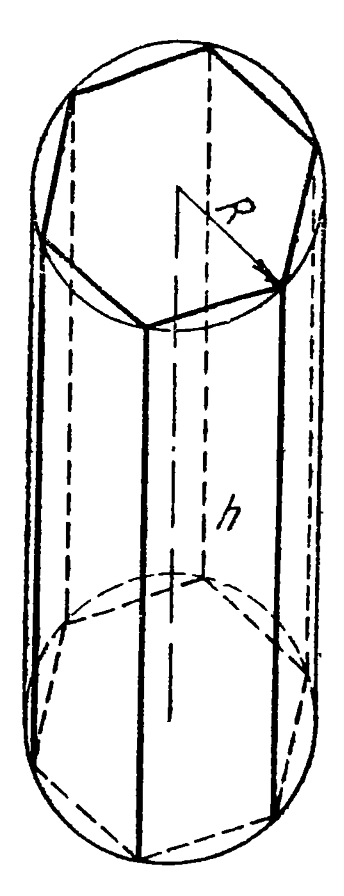


Рис. 383.

251. Площадь поверхности цилиндра. Рассмотрим цилиндр вращения радиуса R и высоты h (рис. 383). В основание этого цилиндра впишем правильный многоугольник (на рис. 383 — шестиугольник) и с его помощью построим правильную призму, вписанную в цилиндр. Таким же путем можно описывать вокруг

цилиндра правильные призмы с произвольно большим числом боковых граней.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается по определению предел, к которому стремятся площади боковых поверхностей вписанных и описанных вокруг него правильных призм по мере неограниченного удвоения (или вообще увеличения) числа их боковых граней. То, что такой предел существует, мы сейчас и докажем. Если возьмем вписанную правильную призму, построенную на правильном n-угольнике, как на основании, то для ее боковой поверхности будем иметь выражение $S'_n = P'_n h$, где P'_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в круг основания цилиндра. При $n \to \infty$ $P'_n \to 2\pi R$ и $S'_n \to 2\pi Rh$. Точно такое же вычисление для описанной призмы дает тот же самый результат. Итак, площадь боковой поверхности цилиндра вращения выражается формулой

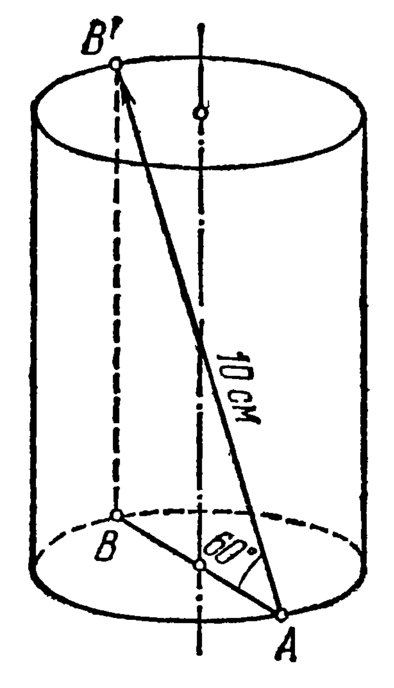



Рис. 384.

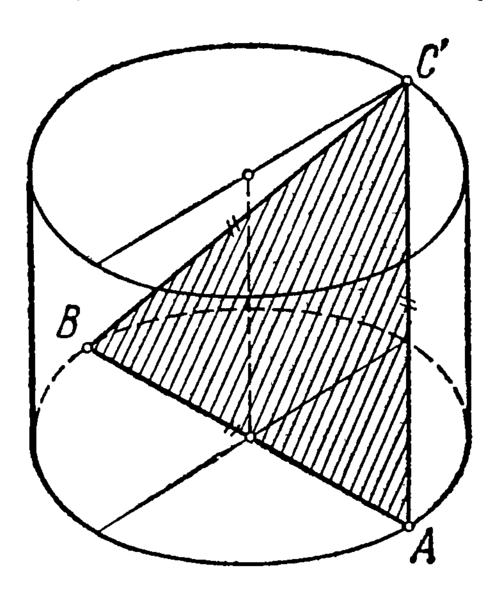


Рис. 385.

$$S = 2\pi Rh. \qquad (251.1)$$

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины образующей на периметр (т. е. длину окружности) *основания.*

Задача 1. Отрезок, соединяющий диаметрально противоположные точки A и B' верхнего и нижнего оснований цилиндра (рис. 384), равен 10 *см* и наклонен к плоскости основания под углом в 60°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение. Проведем через отрезок AB' сечение плоскостью, перпендикулярной к основанию цилиндра. Из треугольника ABB' имеем

$$2R = AB' \cos 60° = 5 \text{ см}, \quad h = BB' = AB' \sin 60° = 5\sqrt{3},$$

откуда находим для боковой поверхности цилиндра

$$S = 2\pi Rh = 25\sqrt{3}\pi \approx 136 \text{ см}^2.$$

Задача 2. Треугольник ABC', вершины A и B которого суть концы диаметра нижнего основания цилиндра, а вершина C' — конец перпендикулярного к нему диаметра верхнего осно-

вания, равносторонний со стороной a. Найти площади боковой и полной поверхностей цилиндра.

Решение. Радиус основания цилиндра равен $a/2$. Высота треугольника ABC' (рис. 385) равна $a\sqrt{3}/2$, а образующая цилиндра вычисляется как

$$h=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда боковая поверхность цилиндра получается равной

$$S_{\text{бок}}=2\pi Rh=\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}},$$

а полная поверхность (равная сумме площади боковой поверхности и площади двух оснований цилиндра) равна

$$S_{\text{полн}}=\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}+2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\pi a^2\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Упражнения

1. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами, соответственно равными α и β. Найти угол наклона к той же плоскости диагонали параллелепипеда.

2. В прямом параллелепипеде острый угол основания равен α, а одна из сторон основания равна a. Сечение, проведенное через эту сторону и противоположное ребро верхнего основания, имеет площадь Q, и плоскость его наклонена к плоскости основания под углом β. Найти объем и полную поверхность параллелепипеда.

3. Основанием наклонной треугольной призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, а проекция одного из боковых ребер на плоскость основания совпадает с медианой m одного из катетов треугольника. Найти угол наклона боковых ребер к плоскости основания, если объем призмы равен V.

4. В правильной шестиугольной призме через сторону основания $AB=a$ проведены два сечения: 1) содержащее противоположную сторону верхнего основания, 2) содержащее центр верхнего основания. При какой высоте призмы угол между плоскостями сечений имеет наибольшую величину и чему он равен в этом случае?

§ 2. Пирамида. Конус

252. Свойства пирамиды и конуса. Рассмотрим какую-либо линию l (кривую или ломаную), лежащую в некоторой плоскости λ (рис. 386, *а*, *б*), и произвольную точку M, не лежащую в этой плоскости. Всевозможные прямые, соединяющие точку M со всеми точками линии l, образуют поверхность σ; такая поверхность называется *конической поверхностью*, точка M—ее *вершиной*, линия l—*направляющей*, прямые MA_1, MA_2, ...—ее *образующими*. На рис. 386 мы не ограничиваем поверхность σ ее вершиной, но представляем себе ее простирающейся неограниченно в обе стороны от вершины.

Если коническую поверхность рассечь какой-либо плоскостью, параллельной плоскости направляющей λ, то в сечении получим линию l' (кривую или ломаную, в зависимости от того, была ли кривой или ломаной линия l), гомотетичную линии l, с центром гомотетии в вершине конической поверхности. Действительно, отношение любых соответствующих отрезков образующих будет

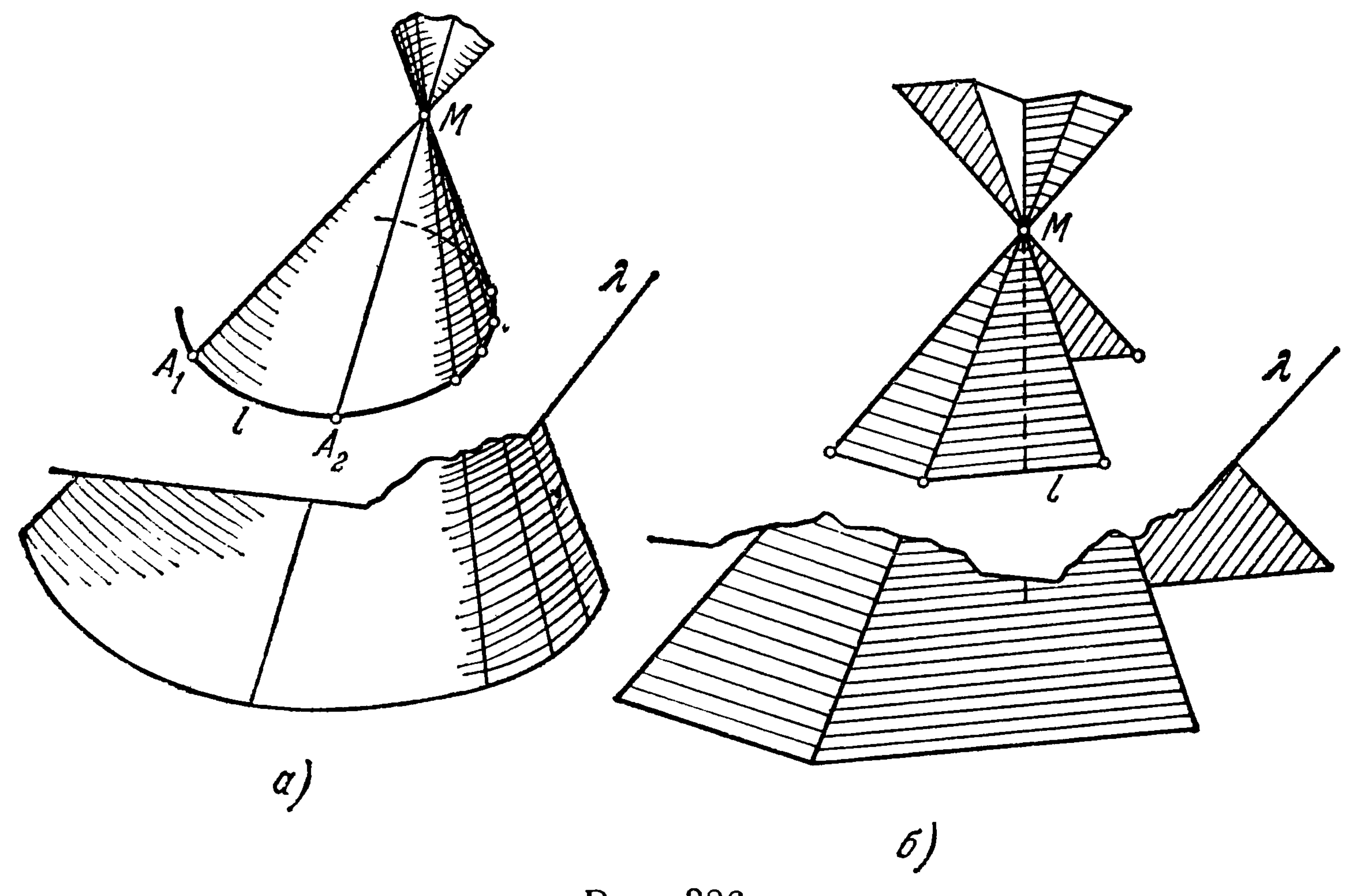


Рис. 386.

постоянным: $\frac{MA_1'}{MA_1}=\frac{MA_2'}{MA_2}=\ldots$ Итак, сечения конической поверхности плоскостями, параллельными плоскости направляющей, подобны и подобно расположены, с центром подобия в вершине конической поверхности; это же верно для любых параллельных плоскостей, не проходящих через вершину поверхности[1]).

Пусть теперь направляющая — замкнутая выпуклая линия (кривая на рис. 387, *а*, ломаная на рис. 387, *б*). Тело, ограниченное с боков конической поверхностью, взятой между ее вершиной и плоскостью направляющей, и плоским основанием в плоскости направляющей, называется *конусом* (если l — кривая линия) или *пирамидой* (если l — ломаная).

Пирамиды классифицируются по числу сторон многоугольника, лежащего в их основании. Говорят о треугольной, четырехугольной и вообще n-угольной пирамидах. Заметим, что n-угольная пирамида имеет $n+1$ грань: n боковых граней и основание. При вершине пирамиды мы имеем n-гранный угол с n плоскими и n двугранными углами. Они соответственно называются

[1]) Преобразование гомотетии в пространстве имеет те же основные свойства, что и на плоскости.

плоскими углами при вершине и *двугранными* углами при боковых ребрах. При вершинах основания мы имеем n трехгранных углов; их плоские углы, образованные боковыми ребрами и сторонами основания, называются *плоскими углами при основании*,

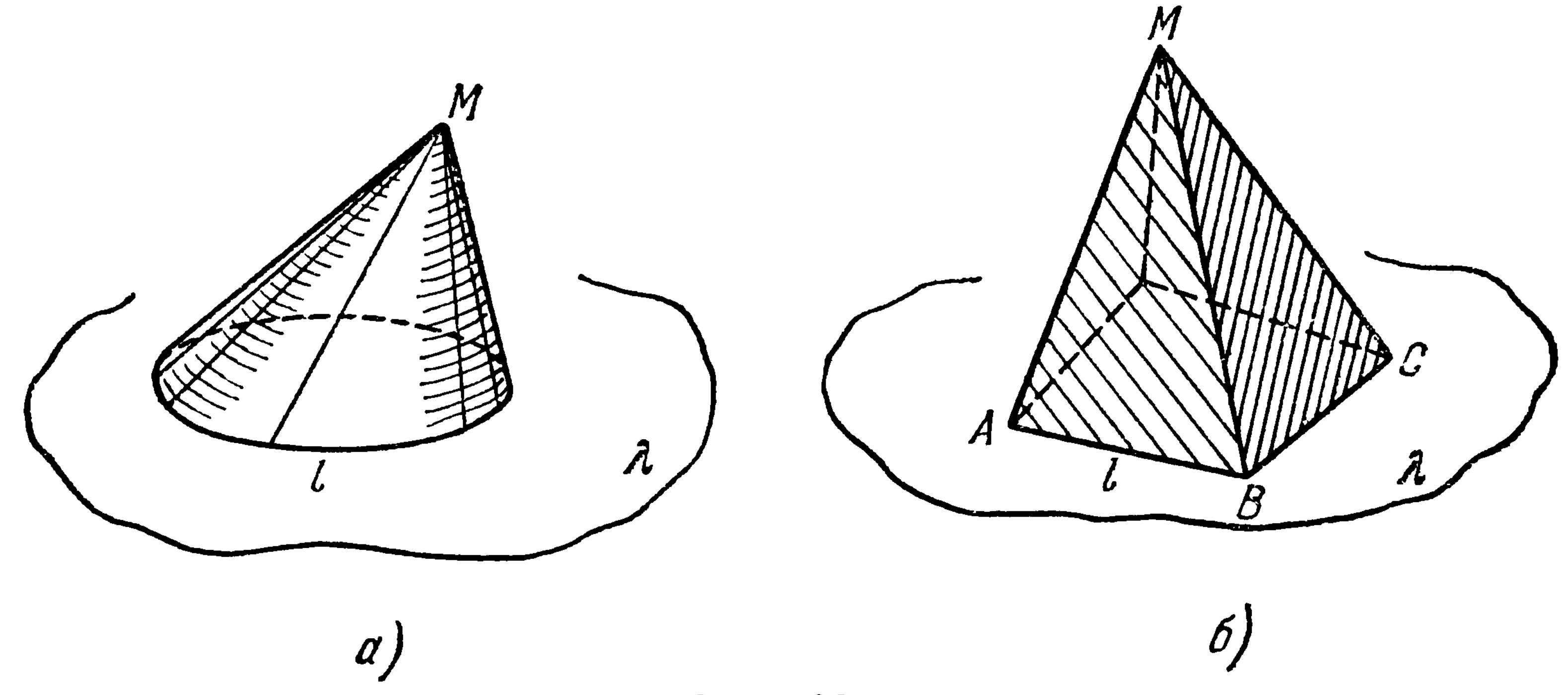


Рис. 387.

двугранные углы между боковыми гранями и плоскостью основания — *двугранными углами при основании.*

Треугольная пирамида иначе называется *тетраэдром* (т. е. четырехгранником). Любая из ее граней может быть принята за основание.

Пирамида называется *правильной* при выполнении двух условий: 1) в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, 2) высота, опущенная из вершины пирамиды на основание, пересекает его в центре этого многоугольника (иначе говоря, вершина пирамиды проектируется в центр основания).

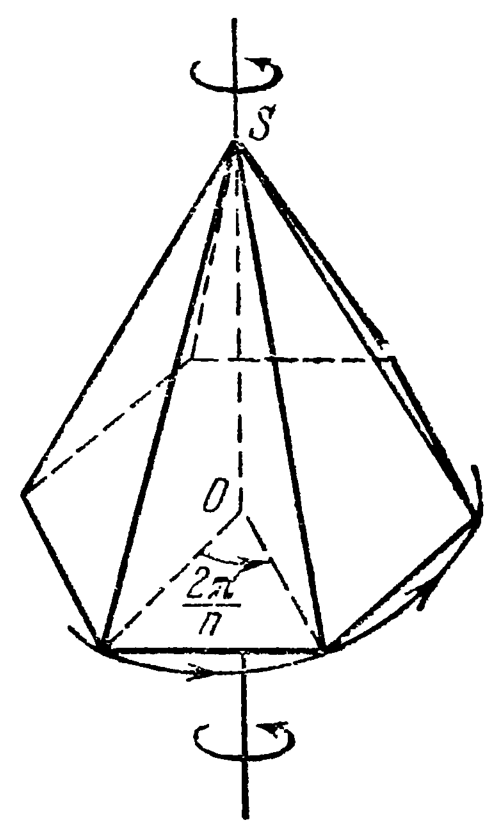


Рис. 388.

Заметим, что правильная пирамида не является, вообще говоря, правильным многогранником!

Отметим некоторые свойства правильной n-угольной пирамиды. Проведем через вершину такой пирамиды высоту SO (рис. 388). Повернем всю пирамиду как целое вокруг этой высоты на угол $2\pi/n$. При таком повороте многоугольник основания перейдет сам в себя: каждая из его вершин займет положение соседней. Вершина пирамиды и ее высота (ось вращения!) останутся на месте, и поэтому пирамида как целое совместится сама с собой: каждое боковое ребро перейдет в соседнее, каждая боковая грань совместится с соседней, каждый двугранный угол при боковом ребре также совместится с соседним. Отсюда вывод: все боковые

ребра равны между собой, все боковые грани суть равные равнобедренные треугольники, все двугранные углы при основании равны, все плоские углы при вершине равны, все плоские углы при основании равны.

Из числа конусов в курсе элементарной геометрии мы изучаем *прямой круговой конус*, т. е. такой конус, основание которого — круг, а вершина проектируется в центр этого круга. Прямой

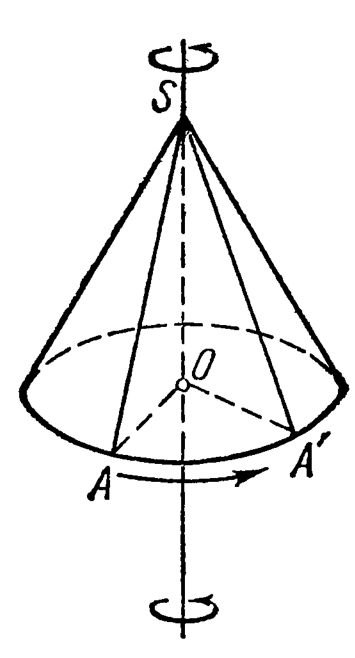


Рис. 389.

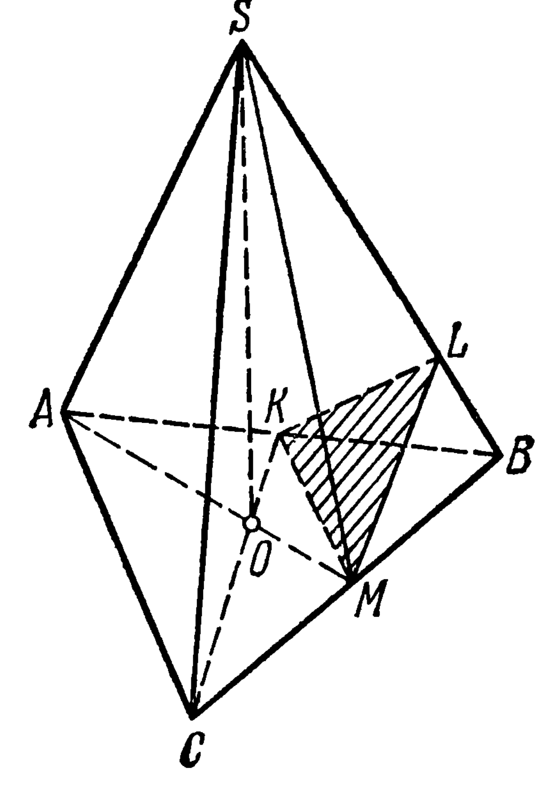


Рис. 390.

круговой конус показан на рис. 389. Если проведем через вершину конуса высоту SO и повернем конус вокруг этой высоты на произвольный угол, то окружность основания будет скользить сама по себе; высота и вершина останутся на месте, поэтому при повороте на любой угол конус совместится сам с собой. Отсюда видно, в частности, что все образующие конуса SA, SA', ... равны между собой и одинаково наклонены к плоскости основания. Сечения конуса плоскостями, проходящими через его высоту, будут равнобедренными треугольниками, равными между собой. Весь конус получается от вращения прямоугольного треугольника SOA вокруг его катета (который становится высотой конуса). Поэтому прямой круговой конус является телом вращения и также называется *конусом вращения*. Если не оговорено противное, мы для краткости в дальнейшем говорим просто «конус», понимая под этим конус вращения.

Сечения конуса плоскостями, параллельными плоскости его основания, суть круги (хотя бы потому, что они гомотетичны кругу основания).

Задача. Двугранные углы при основании правильной треугольной пирамиды равны α. Найти двугранные углы при боковых ребрах.

Решение. Обозначим временно сторону основания пирамиды через a. Проведем сечение пирамиды плоскостью, содержащей ее высоту SO и медиану основания AM (рис. 390). Так как осно-

вание пирамиды — равносторонний треугольник, а O — его центр тяжести, то имеем

$$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad OM=\frac{1}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{6},\quad OA=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$SM=\frac{OM}{\cos\alpha}=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha},\quad AS=\sqrt{SO^2+AO^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{4}{3}}.$$

Для определения двугранного угла при боковом ребре возьмем середины сторон BA и BC основания пирамиды и опустим из них перпендикуляры на боковое ребро SB. В треугольнике KLM (ясно, что оба перпендикуляра пересекут боковое ребро SB в одной точке L) угол L и будет искомый. Итак, нужно решить треугольник KLM, в котором сторона KM равна $a/2$, как средняя линия основания, а стороны ML и KL равны и служат высотами прямоугольных треугольников (например, $\triangle SMB$) с известными катетами

$$SM=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha},\quad MB=\frac{a}{2}$$

и гипотенузой

$$SB=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{4}{3}}.$$

Из сравнения двух выражений площади такого треугольника

$$ML\cdot SB=SM\cdot BM,\quad ML=\frac{SM\cdot BM}{SB}$$

имеем

$$ML=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{4}{3}}}=\frac{a}{2\cos\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}}=\frac{a}{2\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.$$

Теперь в равнобедренном треугольнике KLM находим синус половины искомого угла $\beta=\angle KLM$:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\frac{1}{2}KM}{ML}=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2},$$

откуда окончательно

$$\beta=2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}.$$

253. Объем пирамиды и конуса. В п. 249 мы видели, что две призмы или два цилиндра с равными высотами и равновеликими основаниями имеют равные объемы. Аналогично обстоит дело и с пирамидами (конусами):

Две пирамиды (два конуса) равновелики, т. е. имеют равные объемы, если их высоты равны и основания равновелики.

Для обоснования этого утверждения рассмотрим сначала какую-либо пирамиду и ее сечения плоскостями, параллельными плоскости основания (рис. 391). Как уже замечено, эти сечения являются подобными многоугольниками. Отношения линейных размеров этих сечений равны отношению высот основной пирамиды и пирамиды, отсеченной от нее плоскостью соответствующего сечения, а площади, следовательно, относятся, как квадраты этих высот: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{h'^2}{h^2}$.

Пусть теперь две пирамиды (рис. 392) имеют равные высоты и равновеликие

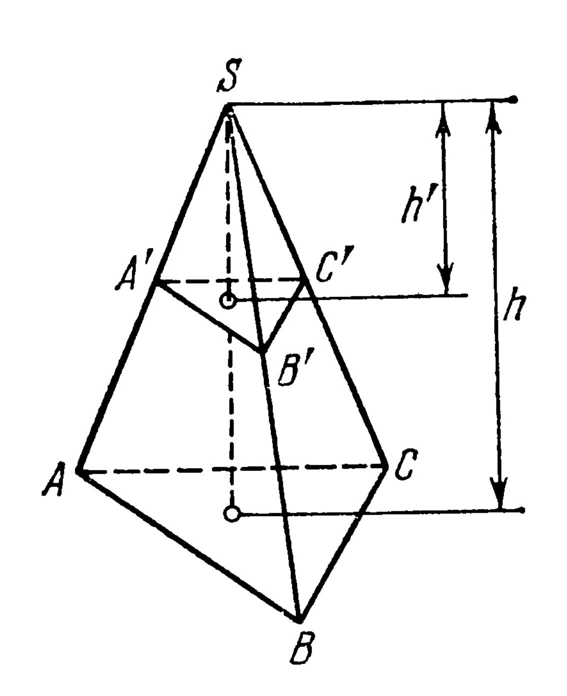
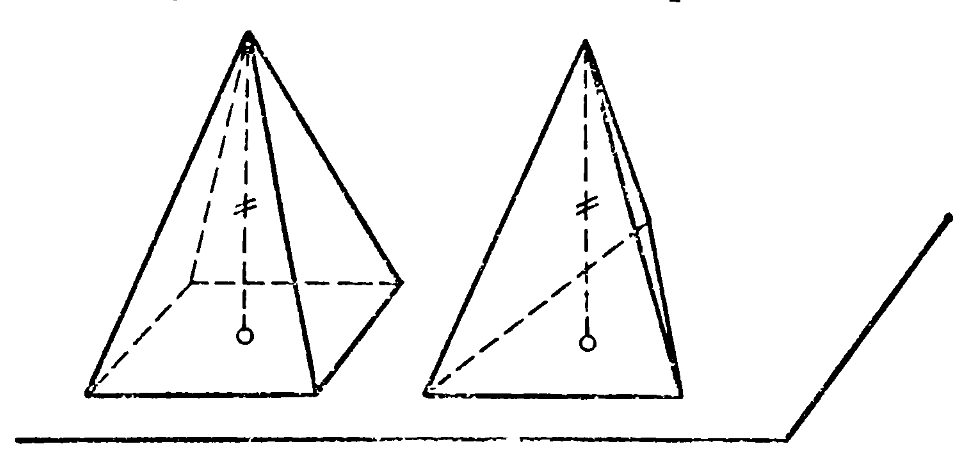


Рис. 391.


Рис. 392.

основания; пусть обе пирамиды, как показано на рис. 392, помещены своими основаниями на одну и ту же плоскость. Тогда объемы их оказываются равны в силу принципа Кавальери; именно, площади сечений этих пирамид на любой высоте будут равны между собой. Те же соображения применимы и к конусам. Итак, объем пирамиды или конуса зависит не от формы основания, но лишь от его площади и от высоты тела.

В силу этого для вывода формулы объема пирамиды и конуса достаточно, например, найти объем пирамиды с треугольным основанием, что мы и сделаем. Справедлива

Теорема. *Объем треугольной пирамиды равен одной трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой, что и данная пирамида.*

Доказательство. Будем исходить из треугольной призмы на рис. 393, *а*. Проведем плоскость через вершину A' верхнего основания призмы и противолежащее ребро BC нижнего основания. Эта плоскость отсечет от призмы треугольную пирамиду $A'ABC$ (она показана также рядом на отдельном чертеже (рис. 393, *б*). Оставшуюся часть призмы разложим на два тела, проведя плоскость через диагонали $A'C$ и $B'C$ боковых граней. Полученные два тела также являются пирамидами; считая треугольник $A'B'C'$ основанием одной из них, а C ее вершиной, увидим, что ее основание и высота такие же, как и у первой

отсеченной нами пирамиды, поэтому пирамиды $A'ABC$ и $CA'B'C'$ равновелики. Кроме того, обе новые пирамиды $CA'B'C'$ и $A'B'BC$ также равновелики; это станет ясным, если примем за их основания треугольники BCB' и $B'CC'$. Пирамиды $CA'B'C'$ и $A'B'BC$ имеют общую вершину A', а их основания расположены в одной плоскости и равны; следовательно, пирамиды равновелики. Итак, призма разложена на три равновеликие между собой пирамиды; объем каждой из них равен одной трети объема призмы.

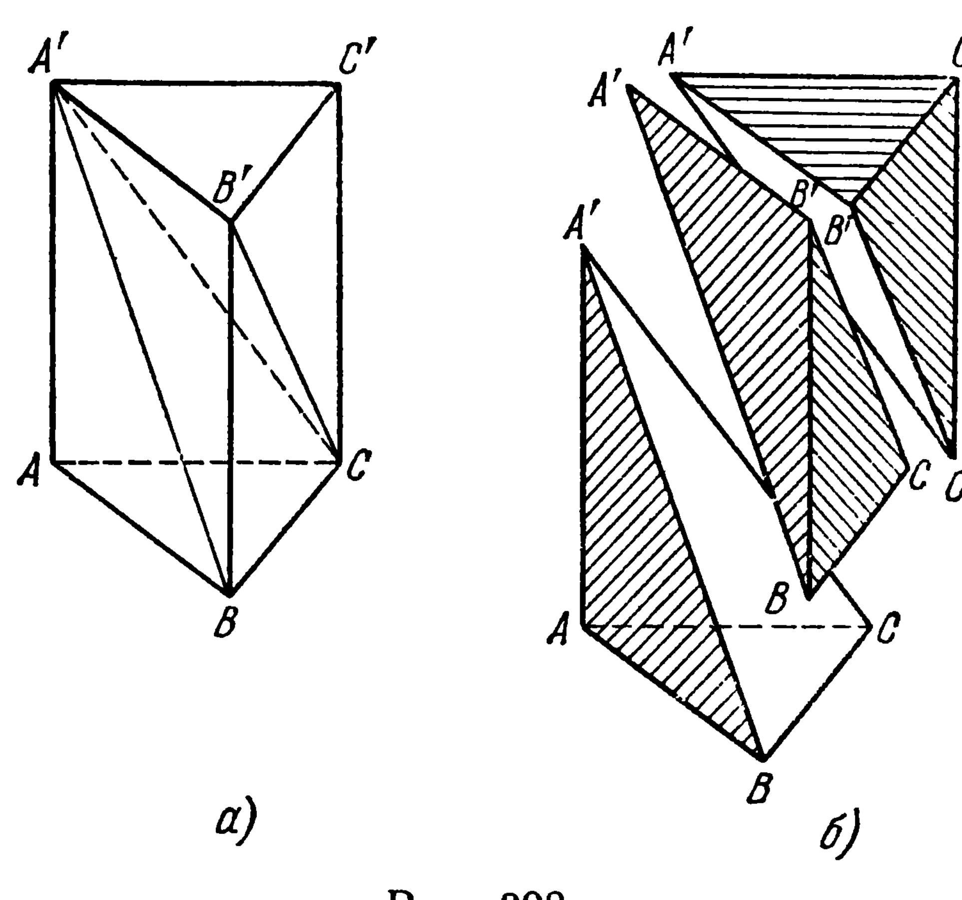


Рис. 393.

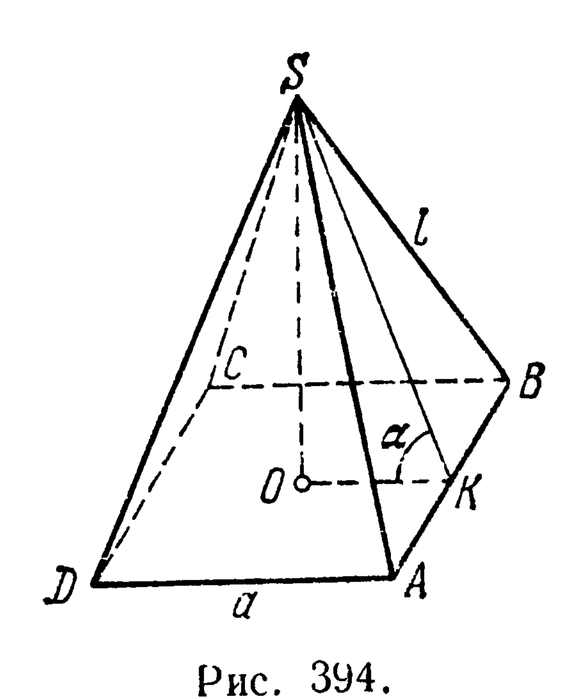


Рис. 394.

Так как форма основания несущественна, то, вообще, объем пирамиды или конуса равен одной трети объема призмы с той же высотой и тем же (или равновеликим) основанием. Вспоминая формулу, выражающую объем призмы и цилиндра, $V=Sh$, получим окончательный результат:

Объем пирамиды или конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V=\frac{1}{3}Sh. \qquad (253.1)$$

В частности, для кругового конуса, радиус основания которого равен R, а высота h, получим, замечая, что $S=\pi R^2$,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h. \qquad (253.2)$$

Задача 1. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно l, а угол наклона боковых граней к плоскости основания равен α.

Решение. Проведем высоту пирамиды $SO=h$ и высоту боковой грани SK (рис. 394). Находим $h=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $h^2+\frac{a^2}{2}=l^2$.

Таким образом, заменяя h в последнем равенстве его выражением $h=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$, получим $a^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)=l^2$, откуда

$$a=\frac{2l}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad h=\frac{l\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

и искомый объем вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}ha^2=\frac{4l^3\operatorname{tg}\alpha}{3(2+\operatorname{tg}^2\alpha)\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Задача 2. Конус вписан в шар радиуса R. Угол между осью и образующей конуса равен α. Найти объем конуса.

Решение. Изобразим равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным 2α, вписанный в круг радиуса R (рис. 395, *а*). Вращая эту фигуру вокруг ее оси симметрии BM,

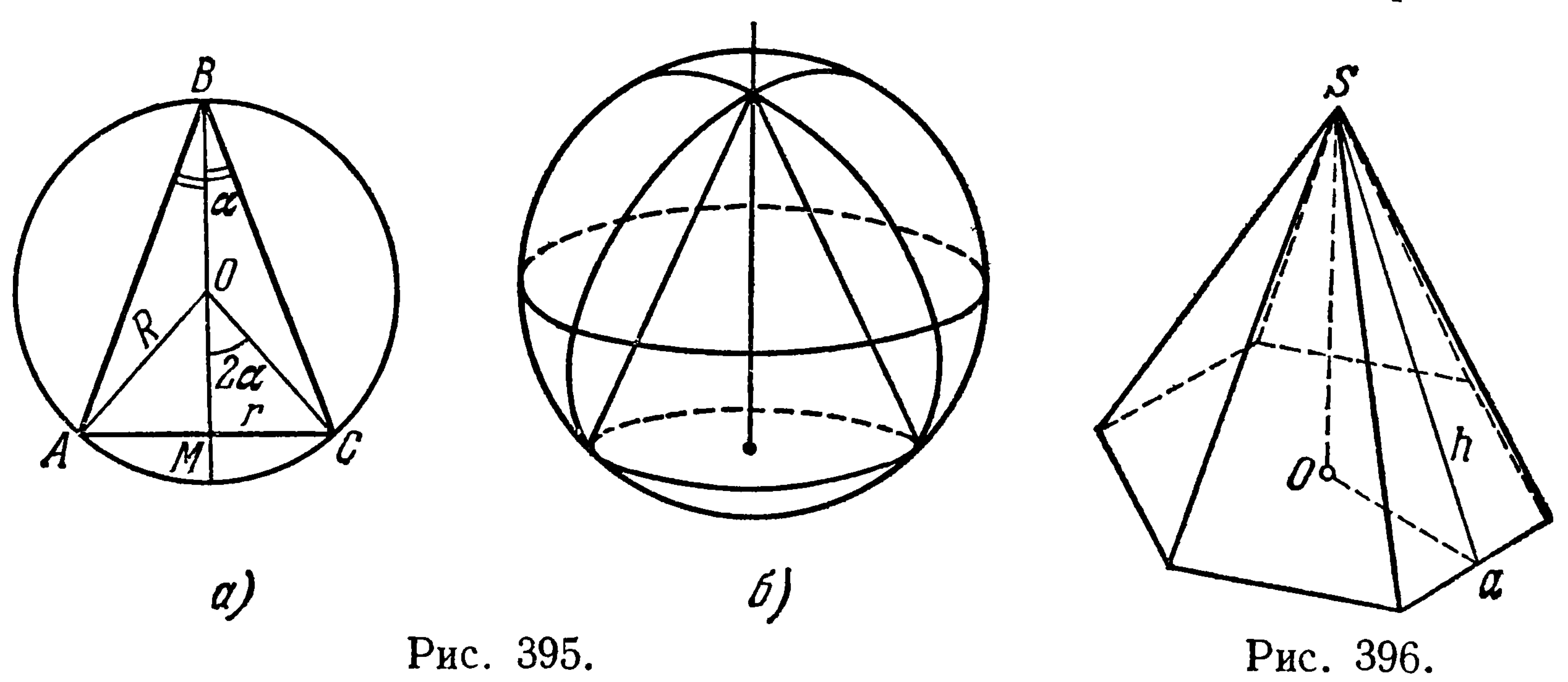


Рис. 395. Рис. 396.

получим тело, которое дано нам в условии задачи (рис. 395, *б*). Замечаем, что $\angle MOC=2\alpha$ (центральный угол вдвое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу). Отсюда

$$MC=r=R\sin 2\alpha,\quad h=BM=R+R\cos 2\alpha,$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha),$$

или

$$V=\frac{2\pi}{3}R^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha.$$

254. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и конуса. Площадь боковой поверхности произвольной пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней. Специальную формулу для выражения этой площади имеет смысл дать в случае правильной пирамиды. Так, пусть на рис. 396 изображена правильная пирамида, в основании которой лежит правильный n-угольник со стороной, равной a. Пусть h — высота боковой грани, называемая также *апофемой* пирамиды. Если, например, кроме стороны a основания, известна длина бокового ребра пи-

рамиды или ее высота, то апофема находится без труда. В самом деле, если известны a и h, то площадь одной боковой грани равна $\frac{1}{2}ha$, а вся боковая поверхность пирамиды имеет площадь, равную $\frac{n}{2}ha$. Так как na — периметр основания пирамиды, то можно написать найденную формулу в виде

$$S=\frac{1}{2}hP. \tag{254.1}$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению ее апофемы на половину периметра основания.

Перейдем к отысканию площади боковой поверхности конуса. Уточним прежде всего, что мы понимаем под площадью боковой поверхности конуса. Впишем в основание конуса правильные многоугольники со все возрастающим числом сторон (например, путем удвоения числа сторон). С их помощью построим правильные пирамиды, вписанные в конус. За площадь боковой поверхности конуса принимается предел, к которому стремится площадь боковой поверхности правильной пирамиды, вписанной в конус, когда число ее боковых граней неограниченно растет (удваивается). Так же можно описывать пирамиды вокруг конуса. Предел площадей боковых поверхностей правильных пирамид, описанных вокруг конуса, будет по мере увеличения числа их боковых граней стремиться к тому же самому пределу, что и в случае вписанных пирамид. Таким образом, площадь боковой поверхности конуса является общим пределом площадей боковых поверхностей правильных пирамид, вписанных в конус и описанных вокруг него, при неограниченном удвоении числа их боковых граней. Произведем необходимые вычисления. Пусть P_n' — периметр основания вписанной n-угольной правильной пирамиды, P_n'' — периметр основания описанной пирамиды. Апофема описанной пирамиды просто равна образующей l конуса, апофема h вписанной пирамиды меньше образующей конуса, но удовлетворяет неравенству $l-\frac{a}{2}<h<l$, где a — сторона основания вписанной пирамиды. При $n\to\infty$ $a\to 0$ и $h\to l$. Отсюда находим для площади боковой поверхности S_n' вписанной пирамиды с учетом того, что P_n' имеет предел, равный длине окружности $C=2\pi R$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}hP_n'=\frac{1}{2}lC=\pi Rl.$$

Для случая описанной пирамиды имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n''=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}lP_n''=\pi Rl.$$

Оба указанных предела равны одному и тому же числу πRl, которое и принимается за площадь боковой поверхности конуса:

$$S=\pi Rl. \qquad (254.2)$$

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению длины его образующей на половину периметра основания $\left(\frac{1}{2}C=\pi R\right)$.

Задача. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды высоты h, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.

Решение. Обозначим сторону основания пирамиды через a, апофему через h_1 (рис. 397). Из треугольника MOK, учитывая, что отрезок OK равен одной трети высоты основания, т. е. $OK=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, имеем $h_1^2-\frac{a^2}{12}=h^2$. Из треугольника MKB находим $a=2h_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Подставляя a из второго равенства в первое, получим

$$h_1=\frac{h}{\sqrt{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

и затем

$$a=\frac{2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

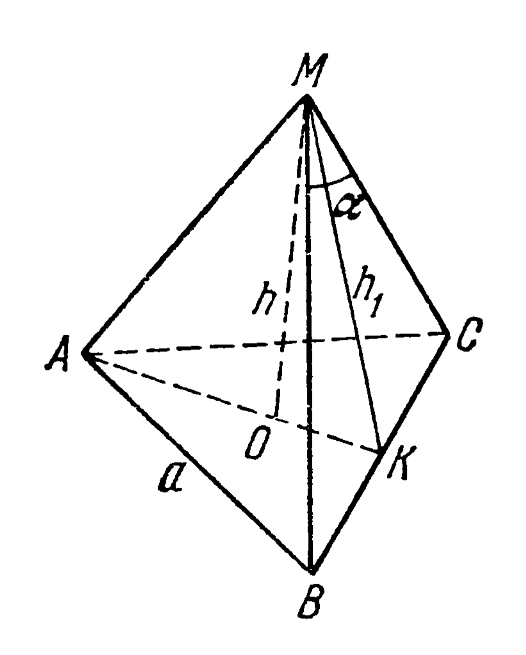


Рис. 397.

Отсюда площадь боковой поверхности

$$S=\frac{3}{2}ah_1=\frac{3h^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Читателю предлагается привести ответ к виду

$$S=\frac{9h^2\sin\alpha}{8\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

255. Усеченный конус и усеченная пирамида. Если от пирамиды (или от конуса) отсечь часть плоскостью, параллельной основанию тела, то оставшаяся часть, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется *усеченной пирамидой* (*усеченным конусом*). На рис. 398 показана пирамида; отбрасывая ее часть, лежащую выше секущей плоскости, получаем усеченную пирамиду. Ясно, что малая отбрасываемая пирамида гомотетична большой пирамиде с центром гомотетии в вершине. Коэффициент подобия равен отношению высот: $k=h_2/h_1$, или боковых ребер, или других соответствующих линейных размеров обеих пирамид. Мы знаем, что площади подобных фигур относятся, как квадраты

линейных размеров; так, площади оснований обеих пирамид (т. е. площади оснований усеченной пирамиды) относятся, как

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{h_2^2}{h_1^2}=k^2. \qquad (255.1)$$

Здесь S_1 означает площадь нижнего основания, а S_2 — площадь верхнего основания усеченной пирамиды. В таком же отношении находятся и боковые поверхности пирамид. Сходное правило имеется и для объемов. *Объемы подобных тел относятся, как кубы их линейных размеров*; например, объемы пирамид относятся, как произведения их высот на площади оснований, откуда наше правило получается сразу. Оно имеет совершенно общий характер и прямо следует из того, что объем всегда имеет размерность третьей степени длины. Пользуясь этим правилом, выведем формулу, выражающую объем усеченного конуса и усеченной пирамиды через высоту и площади оснований.

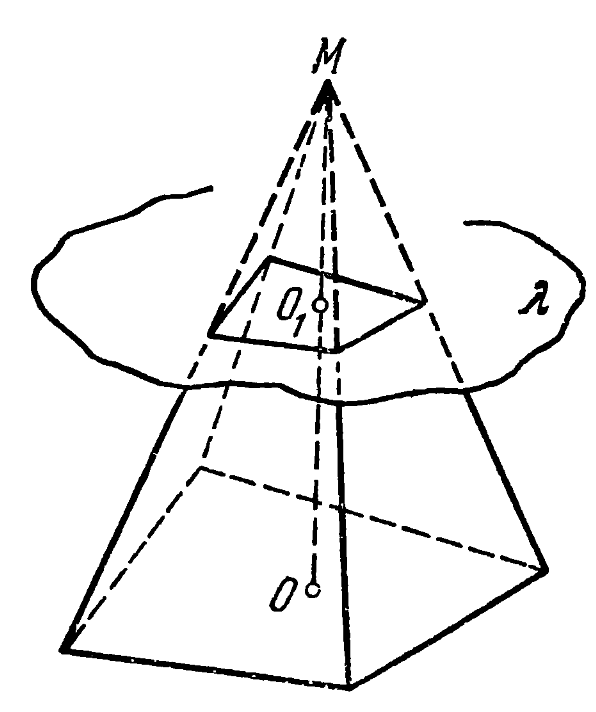
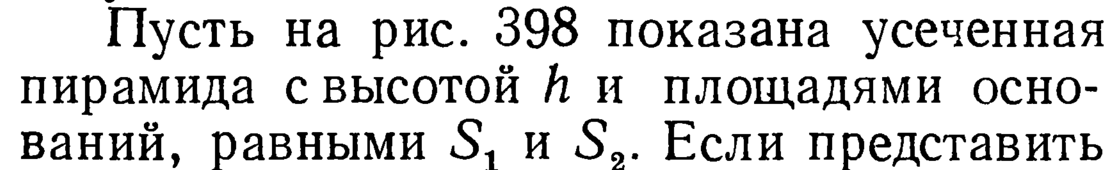


Рис. 398.


Пусть на рис. 398 показана усеченная пирамида с высотой h и площадями оснований, равными S_1 и S_2. Если представить себе, что она дополнена до полной пирамиды, то коэффициент подобия полной пирамиды и малой пирамиды легко найти как $k=\sqrt{S_2/S_1}$. Высота усеченной пирамиды выражается как $h=h_1-h_2=h_1(1-k)$. Теперь имеем для объема усеченной пирамиды (через V_1 и V_2 обозначены объемы полной и малой пирамид)

$$V=V_1-V_2=V_1(1-k^3)=\frac{1}{3}h_1S_1(1-k)(1+k+k^2),$$

но

$$h_1(1-k)=h, \quad kS_1=\sqrt{S_1S_2}, \quad k^2S_1=S_2,$$

и окончательно получаем формулу

$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right). \qquad (255.2)$$

В частном случае полной пирамиды $S_2=0$, $V=\frac{1}{3}hS$; если $S_1=S_2$, то имеем объем призмы $V=hS$.

Та же формула, как видно из ее вывода, остается верна и для конуса. Если даны радиусы R_1 и R_2 оснований усеченного конуса, то $S_1=\pi R_1^2$, $S_2=\pi R_2^2$, и формула примет вид

$$V=\frac{\pi}{3}h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right). \qquad (255.3)$$

Выведем еще формулу площади σ боковой поверхности правильной усеченной пирамиды через периметры P_1 и P_2 оснований и длину апофемы a (рис. 398). Рассуждаем точно так же, как

и при выводе формулы для объема. Дополняем пирамиду верхней частью, имеем $P_2 = kP_1$, $\sigma_2 = k^2\sigma_1$, где k — коэффициент подобия, P_1 и P_2 — периметры оснований, а σ_1, σ_2 — площади боковых поверхностей всей полученной пирамиды и ее верхней части соответственно. Для боковой поверхности найдем (a_1 и a_2 — апофемы пирамид, $a = a_1 - a_2 = a_1\,(1-k)$)

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1(1-k^2) = \frac{1}{2}a_1P_1(1-k)(1+k).$$

Но $a_1(1-k) = a$, $P_1(1+k) = P_1 + P_2$, и окончательно имеем

$$\sigma = \frac{1}{2}a(P_1 + P_2). \qquad (255.4)$$

Та же формула остается верной (вывод не изменится) и для усеченного конуса. Если радиусы оснований R_1, R_2, а образующая l, то получаем

$$\sigma = \pi l(R_1 + R_2). \qquad (255.5)$$

При $R_2 = 0$ отсюда, в частности, имеем площадь боковой поверхности полного конуса, при $R_1 = R_2$ — площадь цилиндра.

Задача 1. Основания усеченного конуса имеют радиусы, равные R_1 и R_2. Площадь его боковой поверхности равна сумме площадей оснований. Найти угол наклона образующих к плоскости большего основания.

Решение. Образующая конуса находится как $l = \frac{R_1 - R_2}{\cos\alpha}$ (рис. 399), где α — искомый угол. Условие задачи дает нам равенство

$$\pi(R_1^2 + R_2^2) = \pi\frac{R_1 - R_2}{\cos\alpha}(R_1 + R_2).$$

Отсюда $\cos\alpha = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$, $\alpha = \arccos\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$.

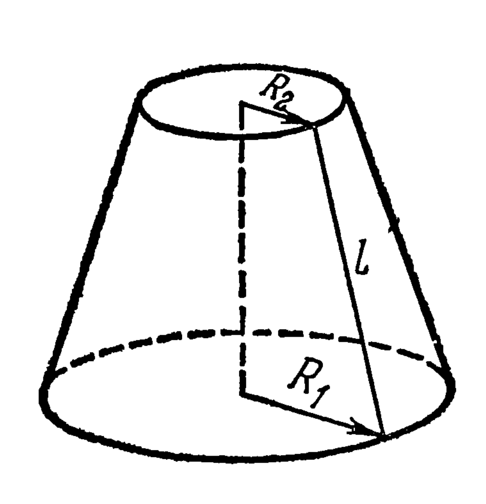
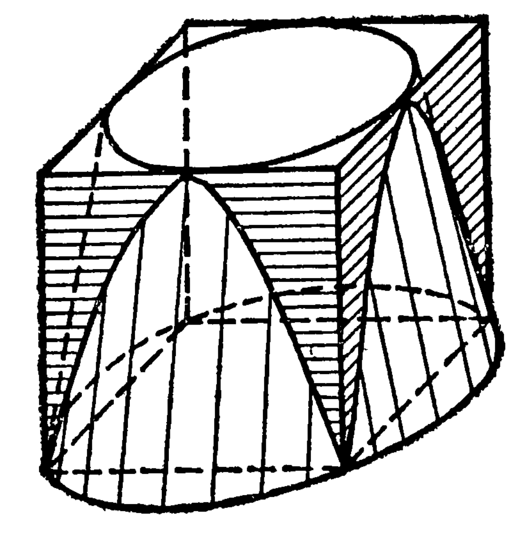



Рис. 399.


Рис. 400.

Задача 2. Найти объем усеченного конуса, если одно его основание вписано в основание куба с ребром a, а другое описано вокруг противоположной грани того же куба.

Решение. Радиусы большего и меньшего оснований равны $a/\sqrt{2}$ и $a/2$ соответственно (рис. 400). Высота конуса a.

Искомый объем

$$V=\frac{1}{3}\pi a\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2\sqrt{2}}+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{\pi a^3}{12}(3+\sqrt{2}).$$

Упражнения

1. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l, а двугранный угол при ребре основания α. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

2. Найти полную поверхность и объем конуса, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

3. Конус усечен плоскостью, параллельной его основанию, так, что высота усеченного конуса равна одной четверти высоты полного конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна площади его меньшего основания. Найти угол наклона образующих к плоскости основания конуса.

§ 3. Шаровая поверхность. Шар

256. Шар и шаровая поверхность. *Шаровой* или *сферической* поверхностью называется геометрическое место точек пространства, удаленных от данной точки O (центра) на заданное расстояние R (радиус). Все пространство по отношению к данной шаровой поверхности разбивается на внутреннюю область (куда можно присоединить и точки самой поверхности) и внешнюю. Первая из этих областей называется *шаром* или *сферой*. Итак, шар — геометрическое место точек, удаленных от заданной точки O (центра) на расстояние, не превышающее данной величины R (радиуса). Шаровая поверхность является границей, отделяющей шар от окружающего пространства.

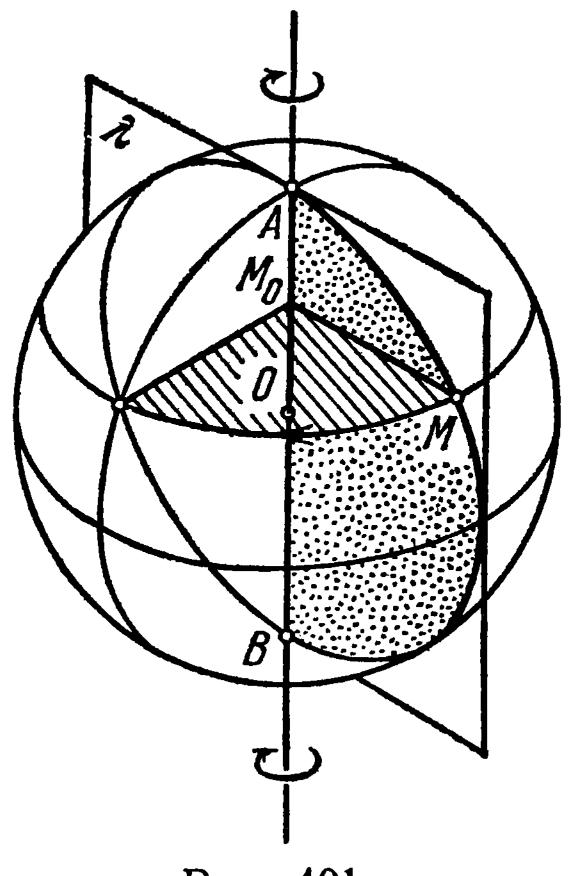


Рис. 401.

Шаровую поверхность и шар можно получить также, вращая окружность (круг) вокруг одного из диаметров.

Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R (рис. 401), лежащую в плоскости λ. Будем вращать ее вокруг диаметра AB. Тогда каждая из точек окружности, например M, в свою очередь опишет при вращении окружность, имеющую своим центром точку M_0 — проекцию вращающейся точки M на ось вращения AB. Плоскость этой окружности перпендикулярна к оси вращения. Радиус OM, ведущий из центра исходной окружности в точку M, будет сохранять свою величину во все время вращения, и потому точка M все время будет находиться на сферической поверхности с центром O и радиусом R. Шаровая поверхность может быть получена вращением окружности вокруг любого из ее диаметров.

Сам шар как тело получается вращением круга; ясно, что для получения всего шара достаточно вращать полукруг около ограничивающего его диаметра.

Исследуем вопрос о взаимном расположении шара и плоскости. Для этого, имея некоторый шар и плоскость λ, опустим из центра шара перпендикуляр на плоскость. Если основание этого перпендикуляра M_0 окажется вне шара (рис. 402), то остальные

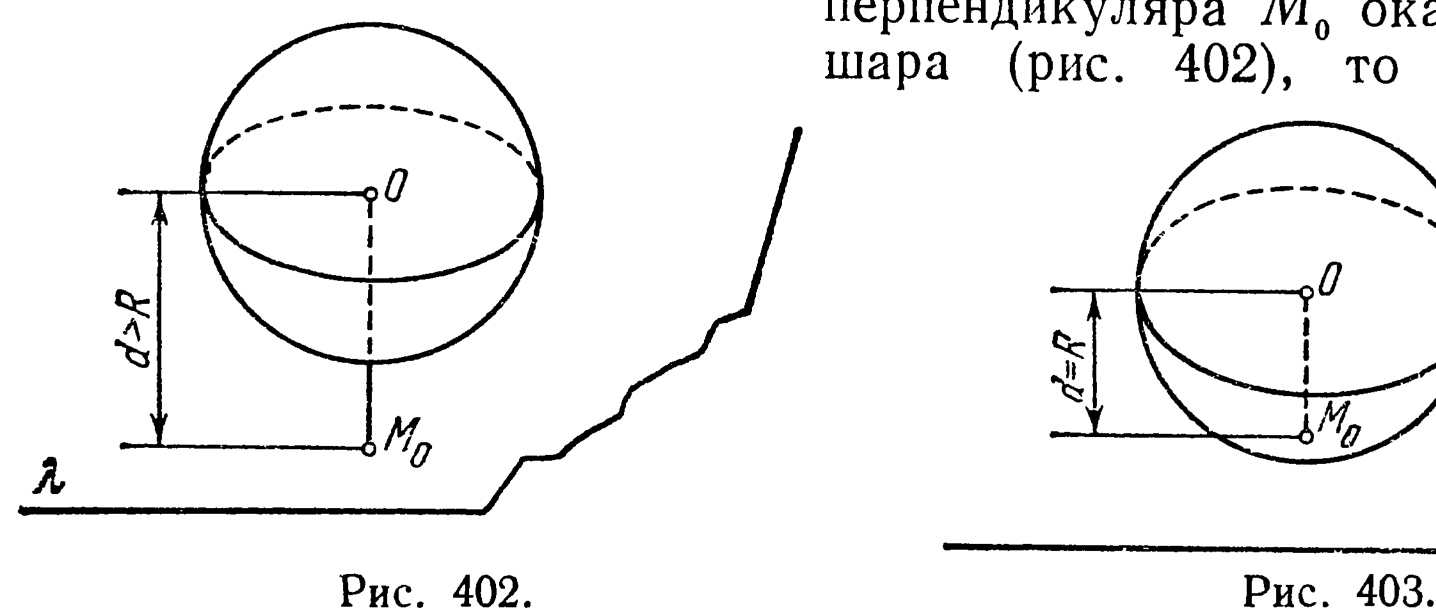


Рис. 402. Рис. 403.

точки плоскости и подавно будут лежать вне шара, так как они еще больше удалены от центра, чем основание перпендикуляра. В этом случае плоскость не имеет общих точек с шаром, она его не пересекает. Если основание перпендикуляра окажется на шаровой поверхности (рис. 403), то остальные точки плоскости, как и в предыдущем случае, будут лежать вне шара. Плоскость будет иметь одну общую точку с шаровой поверхностью; такая плоскость называется *касательной* к шару. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной плоскости. Действительно, если плоскость имеет с поверхностью шара единственную общую точку, то эта точка ближайшая к центру шара по сравнению с остальными точками плоскости и потому служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость.

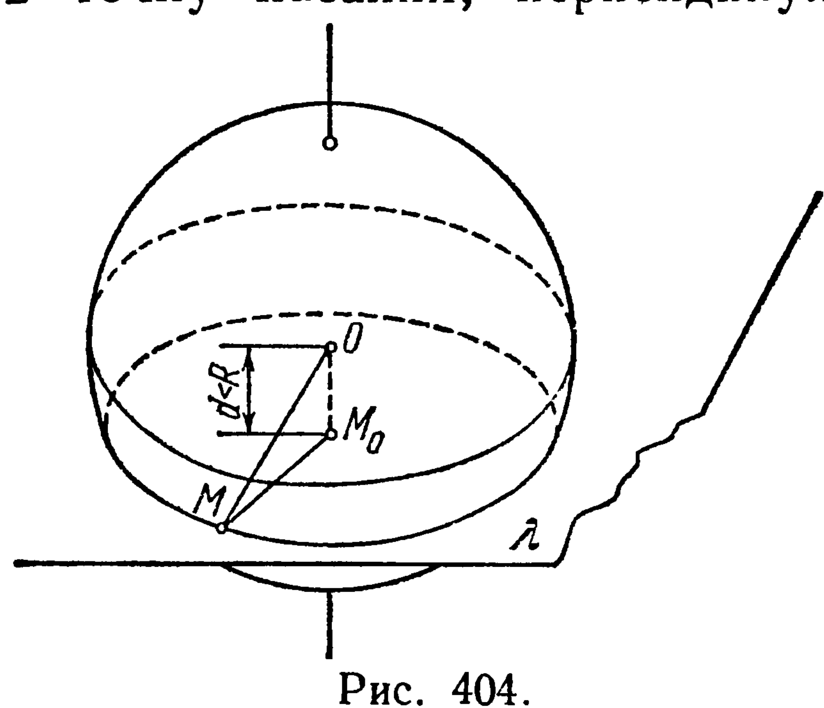


Рис. 404.

Если, наконец, основание перпендикуляра M_0 окажется внутри шара (рис. 404), то плоскость будет пересекать поверхность шара, так как часть ее окажется внутри шара, а часть — вне. Исследуем линию пересечения такой плоскости с шаровой поверхностью. Пусть расстояние ее от центра шара равно d, $d<R$. Тогда оказывается, что линия пересечения плоскости с поверхностью шара является окружностью с центром в точке M_0 и радиусом, равным $r=\sqrt{R^2-d^2}$. Для доказательства проведем

через M_0 произвольный луч M_0M, лежащий в секущей плоскости. Выходя из внутренней области шара во внешнюю, он пересечет поверхность шара в некоторой точке M. Рассмотрим треугольник OM_0M с прямым углом при вершине M_0. Катет M_0M по теореме Пифагора будет равен $\sqrt{R^2-d^2}$. Впрочем, постоянство длины отрезка независимо от направления луча M_0M в данной плоскости видно и без применения теоремы Пифагора (пользуемся равенством прямоугольных треугольников, имеющих общие катеты и равные гипотенузы). Теперь видно, что все точки пересечения плоскости λ с поверхностью шара лежат на одной окружности с центром M_0 и радиусом, равным $\sqrt{R^2-d^2}$. Напротив, любая точка этой окружности удалена от центра шара на расстояние, равное $\sqrt{(\sqrt{R^2-d^2})^2+d^2}=R$, и потому лежит на поверхности шара (равно как и в плоскости λ) и, значит, принадлежит рассматриваемой линии пересечения. Из этого видно, что линия пересечения — полная окружность, а не какая-либо часть ее.

Итак, если длина перпендикуляра, опущенного из центра O шара радиуса R на данную плоскость, равна d, то:

1) при $d>R$ плоскость не пересекает шара;

2) при $d=R$ плоскость касается шара в одной точке, радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к плоскости;

3) при $d<R$ плоскость пересекает шар по окружности, центром которой служит основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость, а радиус равен $\sqrt{R^2-d^2}$.

В частности, плоскость, проходящая через центр шара, пересекает его по окружности максимально возможного радиуса, равного радиусу шара R. Такие сечения шара плоскостями, проходящими через его центр, называются *большими кругами* шара.

Задача 1. Два сечения шара радиуса 10 *см* параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 *см* и 8 *см*. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение. Находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара:

$$d_1=\sqrt{100-36}=8\text{ см},$$
$$d_2=\sqrt{100-64}=6\text{ см};$$

в зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

$$d=14\text{ см},\qquad d=2\text{ см}.$$

Задача 2. Расстояние между центрами двух шаров равно d; радиусы их R_1 и R_2. Найти радиус окружности, по которой они пересекаются.

Решение. Искомый радиус служит высотой треугольника OMO_1 (рис. 405). Площадь S треугольника OMO_1 находится по трем сторонам $OO_1 = d$, R_1, R_2, и искомый радиус равен $r = 2S/d$.

Прямая линия также может занимать по отношению к шару три существенно различных положения. Именно, она может пересечь поверхность шара в двух различных точках, не пересекать ее или иметь с ней одну общую точку. В последнем случае она будет называться *касательной* к шару.

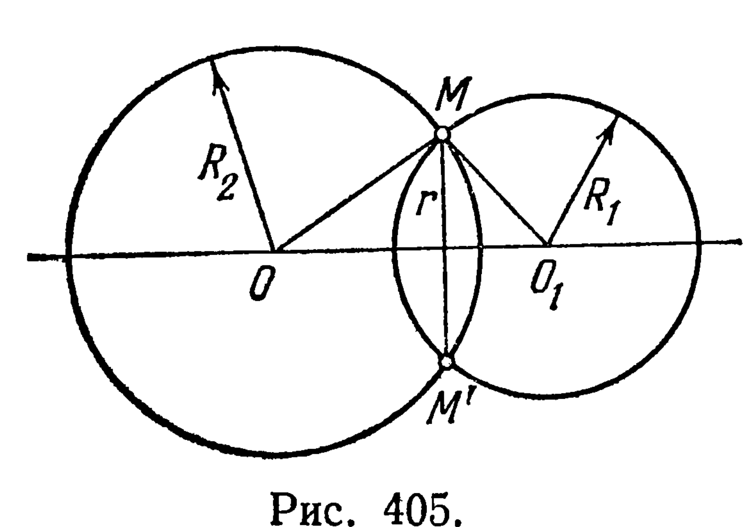


Рис. 405.

257. Объем шара и его частей. Объем шара вычисляется на основании следующего предложения.

Теорема. *Объем полушара равен разности объемов цилиндра и конуса, имеющих с полушаром общие основание и высоту.*

Доказательство. Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим полушар радиуса R (рис. 406) и цилиндр, радиус и высота которого также равны R. На верхнем основании этого цилиндра построим конус высоты R, обращенный вершиной вниз. Вершина этого конуса попала в центр нижнего основания цилиндра, а образующие наклонены к основанию под углом 45°. Нужно доказать, что объем тела, получаемого изъятием из цилиндра вышеописанного конуса, будет равен объему полушара.

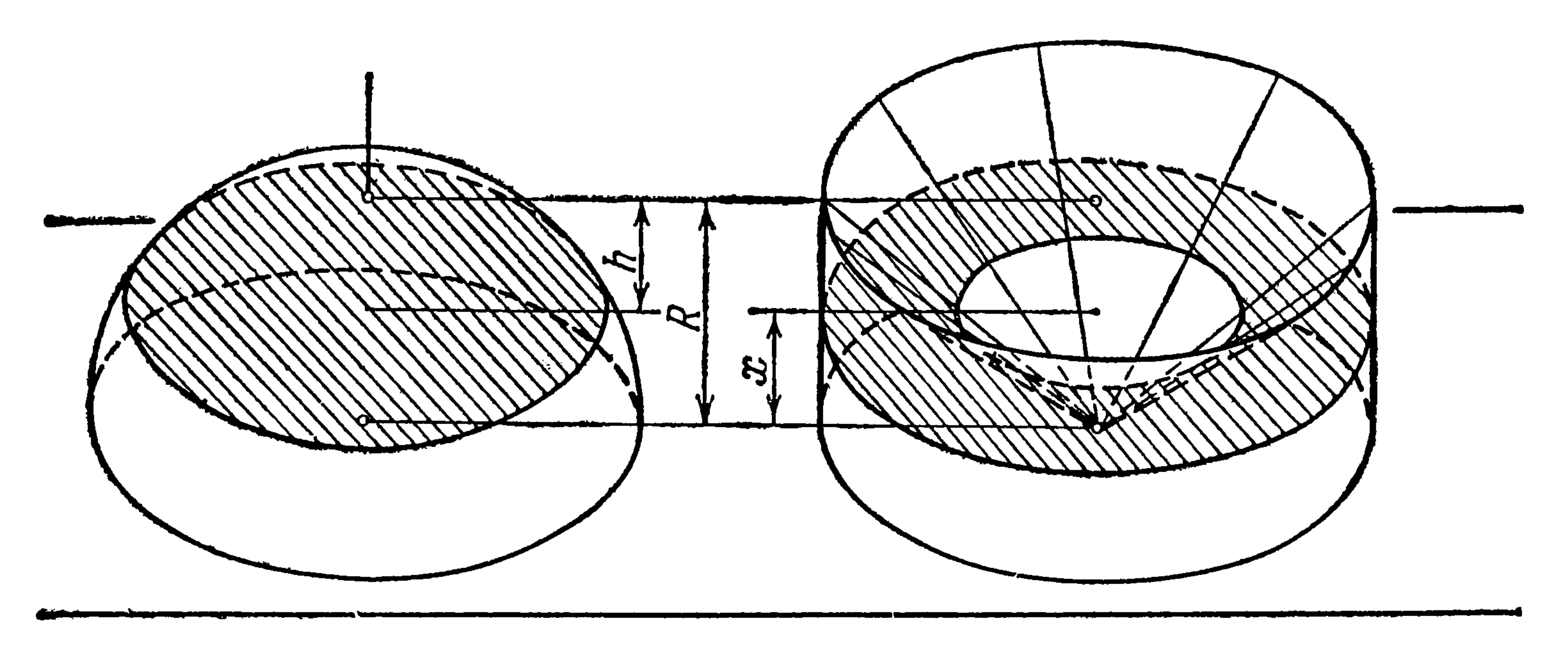


Рис. 406.

На рис. 406 оба тела — цилиндр с высверленной в нем конической воронкой и полушар — поставлены основаниями на одну плоскость и имеют равные высоты. В соответствии с принципом Кавальери равенство их объемов будет установлено, если будет показано, что площади сечений обоих тел произвольной плоскостью, параллельной плоскости их оснований, равны. Рассечем наши тела плоскостью, проведенной на любой высоте x, $0 \leqslant x \leqslant R$.

Имеем для сечения полушара

$$S = \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Сечение второго тела имеет форму кольца, и потому площадь его находится как разность площадей двух кругов:

$$S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi x^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Теперь мы видим, что площади обоих сечений равны при любом значении x, и, следовательно, равенство объемов доказано. Остается провести небольшое вычисление; объем цилиндра равен

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot R = \pi R^3;$$

объем конуса составляет одну треть объема цилиндра, на долю же их разности остается две трети объема цилиндра: $V = \frac{2}{3} \pi R^3$. Таким образом, объем полушара равен $\frac{2}{3} \pi R^3$, и окончательно для объема шара имеем формулу

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3. \qquad (257.1)$$

Шаровым сегментом называется часть шара, отсеченная от него плоскостью (рис. 407). Всякая плоскость, пересекающая шар, разбивает его на два сегмента. Объем шарового сегмента находится при помощи тех же рассуждений из рис. 406, стоит лишь взять не все тело («цилиндр без конуса»), а его часть, отсеченную плоскостью, параллельной основанию. Рассмотрим, например, шаровой сегмент, лежащий выше секущей плоскости, проведенной на высоте x от плоскости основания полушара, т.е. на расстоянии $h = R - x$ от верхней точки полушара. Величина h называется *стрелкой* сегмента. Искомый объем будет равен разности объемов цилиндра радиуса R с высотой h и усеченного конуса; так как радиус малого основания конуса равен $x = R - h$, то получаем для объема сегмента

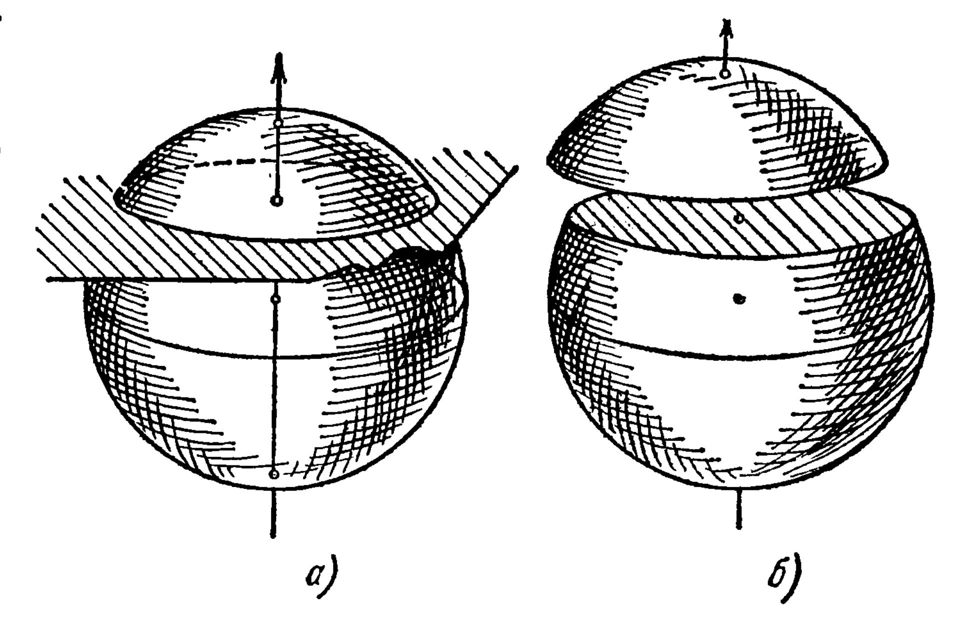


Рис. 407.

$$V_{\text{сегм}} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} [R^2 + R(R-h) + (R-h)^2].$$

Раскрывая скобки и упрощая выражение, приведем его к виду

$$V_{\text{сегм}} = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h). \qquad (257.2)$$

Эта формула выведена для сегмента, стрелка которого не превосходит радиуса шара. Она остается верна и для сегмента

с любой стрелкой $h_1 > R$. Пусть сегмент со стрелкой $h_1 = 2R - h$ — дополнительный к сегменту со стрелкой $h < R$. Вычислим его объем как разность объемов шара и сегмента со стрелкой h:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

Заменим здесь h через $2R - h_1$:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 - \frac{\pi (2R - h_1)^2}{3}(R + h_1).$$

Раскрывая скобки и производя упрощения, получим

$$V = \frac{\pi h_1^2}{3}(3R - h_1), \qquad (257.3)$$

т. е. точно такую же формулу, как и раньше.

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 408). Объем

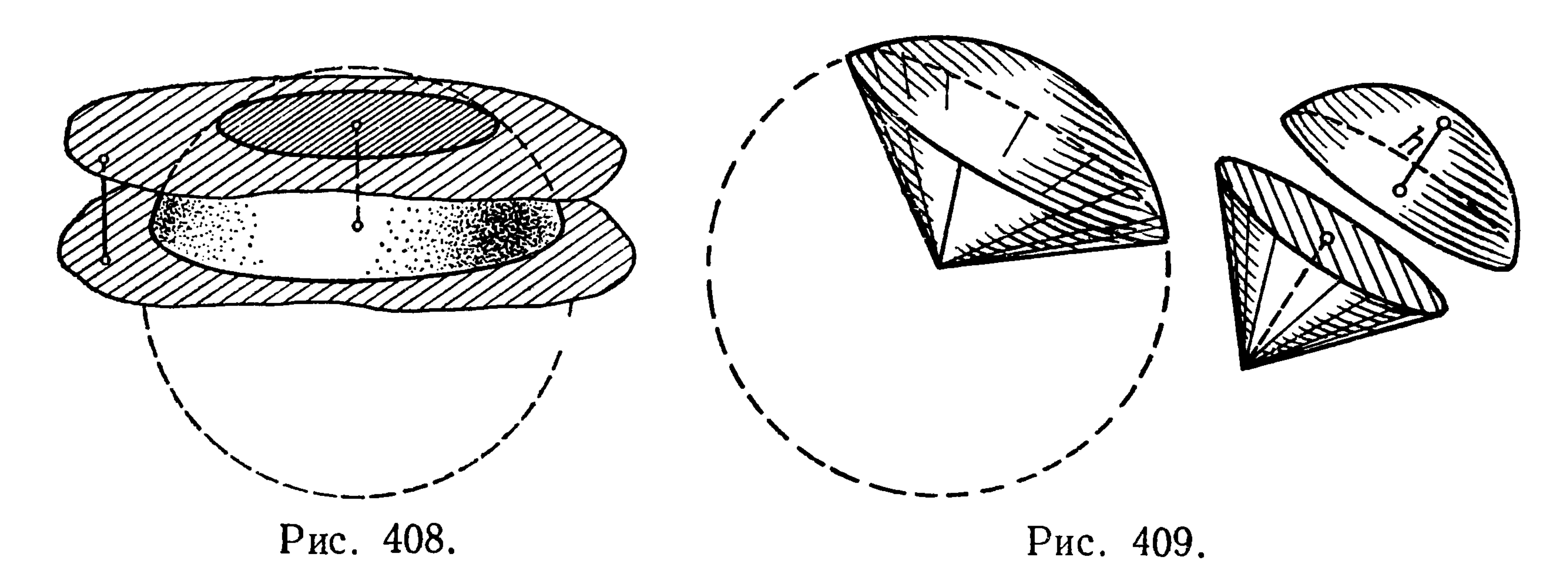


Рис. 408. Рис. 409.

шарового слоя можно найти как разность объемов двух шаровых сегментов, и запоминать отдельную формулу для его вычисления нет надобности.

Рассмотрим теперь конус вращения с вершиной в центре шара (рис. 409). Часть шара, лежащая внутри такого конуса, называется *шаровым сектором*. Шаровой сектор разлагается на два тела: шаровой сегмент высоты h и конус высоты $R - h$. Читатель сам может доказать, что шаровая поверхность пересекается с конусом по окружности. Ее радиус равен

$$r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Плоскость этой окружности и разбивает сектор на две указанные части. Для объема сектора находим, пользуясь формулами, выражающими объемы сегмента и конуса:

$$V_{\text{сект}} = \frac{\pi}{3}(R - h)(2Rh - h^2) + \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) = \frac{2\pi}{3} R^2 h.$$

Если α — угол между осью и образующей конуса, то

$$h = R - R\cos\alpha = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

и формула для объема сектора примет вид

$$V_{\text{сект}} = \frac{4\pi}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (257.4)$$

Понятие сектора шара обобщается на случай внешней области конуса (угол α заменится углом $\pi - \alpha = \alpha_1$, формула останется верной и для этого случая).

Задача 1. Найти объем сегмента, отсекаемого от шара радиуса R гранью вписанного в шар куба (при ее продолжении).

Решение. Диагональ куба, вписанного в шар, является

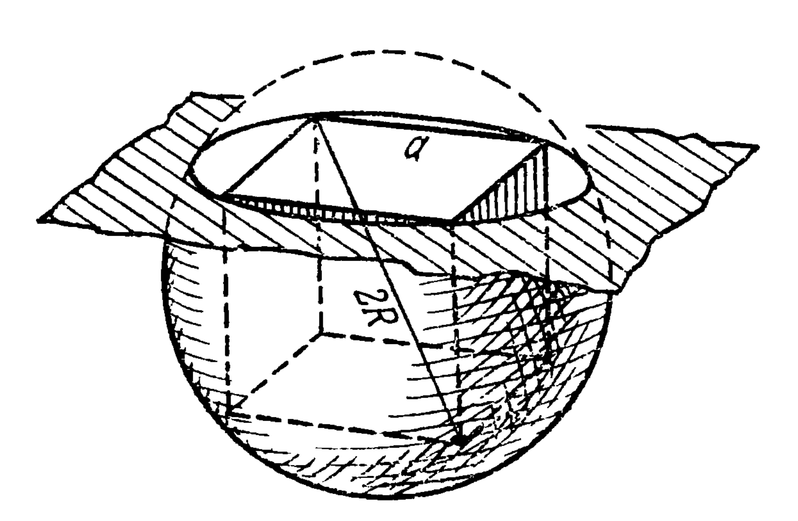


Рис. 410.

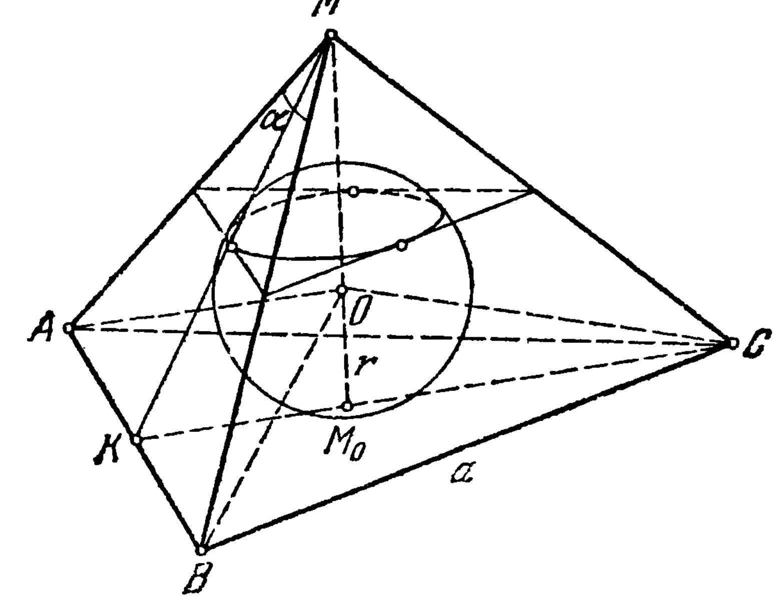


Рис. 411.

диаметром шара. Отсюда имеем для ребра куба $a^2 + a^2 + a^2 = 4R^2$, $a = 2R/\sqrt{3}$ (рис. 410). Стрелка сегмента, объем которого мы должны определить, равна

$$h = R - \frac{a}{2} = R\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

и по формуле для объема сегмента шара находим

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi R^3}{3}\cdot\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{27}(9 - 4\sqrt{3}).$$

Задача 2. Найти объем шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду с ребром основания, равным a, и плоским углом при вершине, равным α (рис. 411).

Решение. В этой, как и в других аналогичных задачах, полезно использовать общее замечание, относящееся к вычислению радиуса шара, вписанного в выпуклый многогранник (т. е. касающегося каждой из граней). Представим себе, что в центре шара мы поместим вершину ряда пирамид, основаниями которых будут грани многогранника. Радиус шара будет служить высотой каждой из этих пирамид. Тогда объем многогранника V можно

вычислить как сумму объемов указанных пирамид; объем каждой из них будет равен одной трети произведения ее высоты (т. е. радиуса вписанного в многогранник шара) на площадь ее основания (т. е. на площадь соответствующей грани многогранника). Сумма объемов пирамид будет равна одной трети произведения радиуса вписанного шара на полную поверхность многогранника: $V=\frac{1}{3}S_{\text{полн}}r$. В нашем случае площадь основания пирамиды (рис. 411)

$$S_0=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

площадь одной из боковых граней

$$S_1=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

полная площадь поверхности пирамиды

$$S=\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

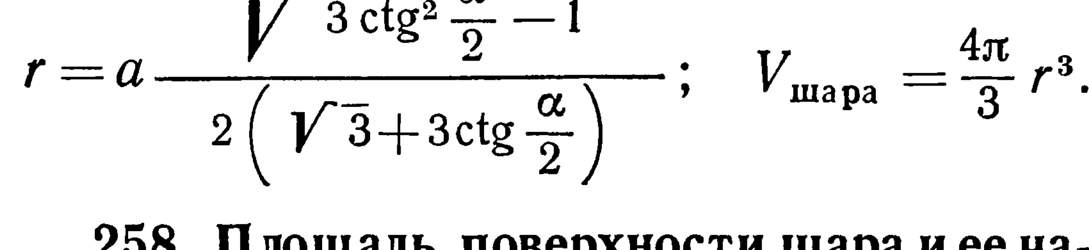
Высота пирамиды MM_0, как катет треугольника MM_0K, равна

$$H=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{a}{6}\sqrt{9\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_0H=\frac{a^3}{24}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Для радиуса вписанного шара находим



$$r=a\frac{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{2\left(\sqrt{3}+3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)};\quad V_{\text{шара}}=\frac{4\pi}{3}r^3.$$

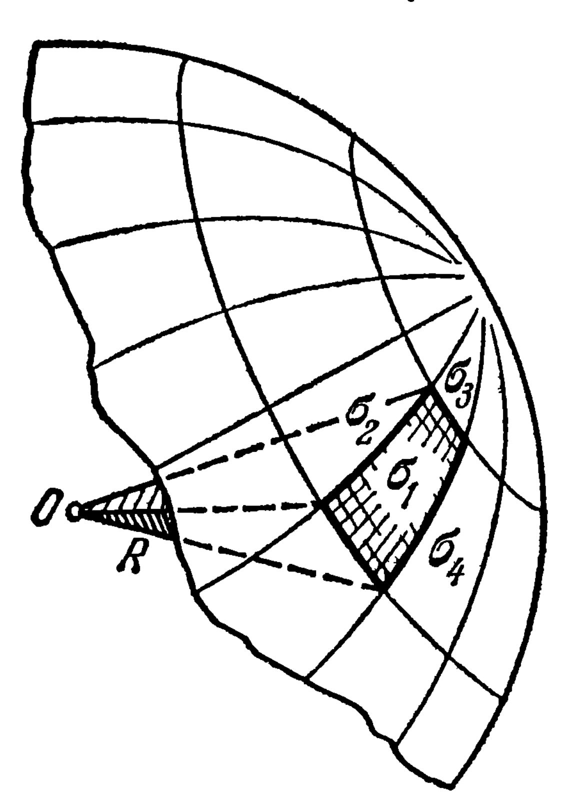


Рис. 412.

258. Площадь поверхности шара и ее частей. Мы даем здесь очень простой, хотя и не совсем строгий вывод формулы для площади сферической поверхности; по своей идее он очень близок к методам интегрального исчисления. Итак, пусть дан некоторый шар радиуса R. Выделим на его поверхности какую-либо малую область (рис. 412) и рассмотрим пирамиду или конус с вершиной в центре шара O, имеющие эту область своим основанием; строго говоря, мы лишь условно говорим о конусе или пирамиде, так как основание не плоское, а сферическое. Но при малых размерах основания по сравнению с радиусом шара оно будет весьма мало отличаться от плоского (так, на-

пример, при измерении не очень большого земельного участка пренебрегают тем, что он лежит не на плоскости, а на сфере). Тогда, обозначая через σ_1 площадь этого участка — основание «пирамиды», найдем ее объем как произведение одной трети высоты на площадь основания (высотой служит радиус шара):

$$V_1 = \frac{1}{2} R\sigma_1.$$

Если теперь всю поверхность шара разложить на очень большое число N таких малых областей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$, тем самым объем шара — на N объемов «пирамид», имеющих эти области своими основаниями, то весь объем представится суммой

$$V = V_1 + \ldots + V_N = \frac{1}{3} R (\sigma_1 + \ldots + \sigma_N),$$

где последняя сумма равна полной поверхности шара:

$$\sigma_1 + \ldots + \sigma_N = \sigma_{\text{шара}}.$$

Итак, объем шара равен одной трети произведения его радиуса на площадь поверхности. Отсюда для площади поверхности имеем формулу

$$\sigma = \frac{3V}{R}, \quad \text{или} \quad \sigma = 4\pi R^2. \qquad (258.1)$$

Последний результат формулируется так:

Площадь поверхности шара равна учетверенной площади его большого круга.

Приведенный вывод пригоден и для площади поверхности сектора шара (имеем в виду только основание, т. е. сферическую поверхность, или «шапочки»; см. рис. 409). И в этом случае объем сектора равен одной трети произведения радиуса шара на площадь его сферического основания:

$$V_{\text{сект}} = \frac{1}{3} R\sigma_{\text{шап}},$$

откуда находим для площади шапочки формулу

$$\sigma_{\text{шап}} = 2\pi Rh. \qquad (258.2)$$

Шаровым поясом (см. рис. 408) называют сферическую поверхность шарового слоя. Чтобы вычислить площадь поверхности шарового пояса, находим разность поверхностей двух сферических шапочек:

$$\sigma_{\text{пояса}} = 2\pi Rh_1 - 2\pi Rh_2 = 2\pi R (h_1 - h_2),$$

или

$$\sigma_{\text{пояса}} = 2\pi Rh, \qquad (258.3)$$

где h — высота слоя. Итак, площадь поверхности шарового пояса для данного шара зависит только от высоты соответствующего слоя, но не от его положения на шаре.

Задача. Боковая поверхность конуса, описанного вокруг шара, имеет площадь, равную полуторной площади поверхности шара. Найти высоту конуса, если радиус шара равен R_0.

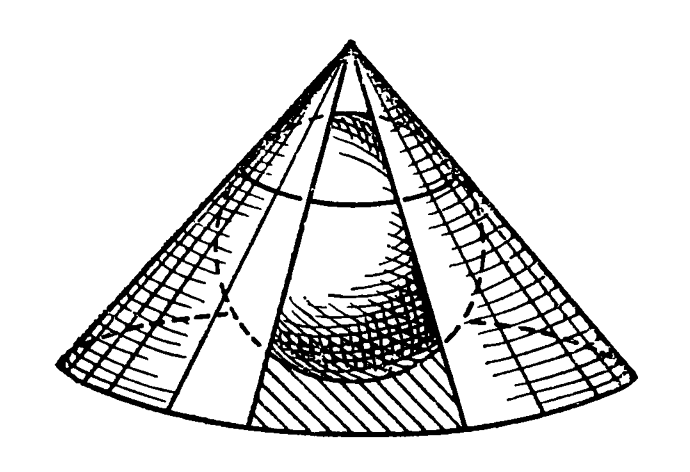
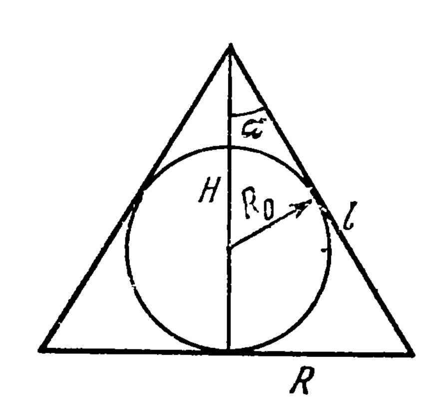


Рис 413.



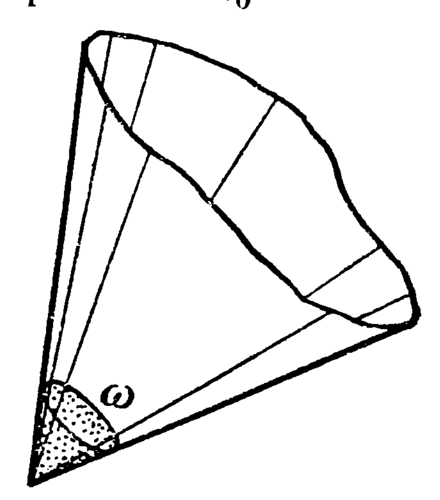


Рис. 414.

Решение. Введем для удобства угол α между высотой и образующей конуса (рис. 413). Найдем для высоты, радиуса основания и образующей конуса выражения

$$H = R_0\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha},\quad R = H\operatorname{tg}\alpha = R_0\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$l = \frac{H}{\cos\alpha} = R_0\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Площадь боковой поверхности конуса равна

$$\sigma_{\text{бок}} = \pi Rl = \pi R_0^2\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha} = \pi R_0^2\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\,(1-\sin\alpha)}.$$

По условию задачи имеем уравнение

$$\pi R_0^2\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\,(1-\sin\alpha)} = \frac{3}{2}\cdot 4\pi R_0^2,$$

откуда для $x=\sin\alpha$ получается квадратное уравнение

$$1+x = 6(x-x^2);\qquad 6x^2-5x+1=0;$$

решая его, имеем для $\sin\alpha$ два значения:

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{2},\qquad \sin\alpha_2 = \frac{1}{3},$$

которым отвечают два решения поставленной задачи:

$$H_1 = 3R_0,\qquad H_2 = 4R_0.$$

259. Понятие телесного угла. При измерении угла между двумя лучами на плоскости удобно рассматривать данный угол как центральный угол некоторой дуги окружности единичного радиуса. Тогда длина этой дуги и дает радианную меру центрального угла. Полный угол получает при этом меру, равную 2π. Нечто сходное приходится проделывать, когда мы хотим ввести меру объемного, телесного угла, т. е. меру, показывающую «широту раствора» конической поверхности (рис. 414), долю пространства, которое попадает внутрь такой поверхности, по

сравнению с полным пространством (полным телесным углом). При этом совсем не обязательно данный угол заключать в круговой конус: это может быть любой конус, или угол может быть многогранным (рис. 415). Для введения строгого понятия телесного угла возьмем сферу единичного радиуса с центром в вершине угла (рис. 416). За меру телесного угла принимается площадь части поверхности сферы, лежащей внутри данного угла. Полный телесный угол измеряется всей площадью поверхности сферы, т. е. за его меру принимается 4π. Единицей телесного угла служит *стерадиан*.

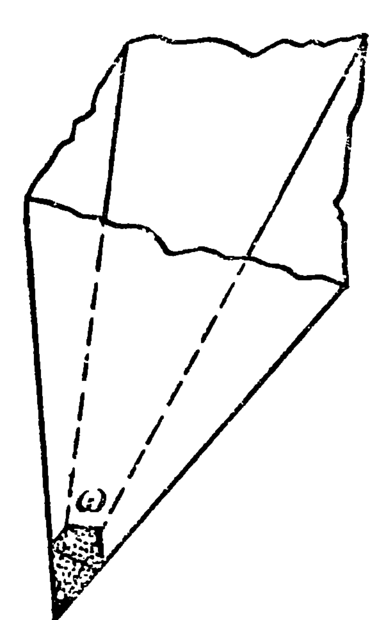


Рис. 415.

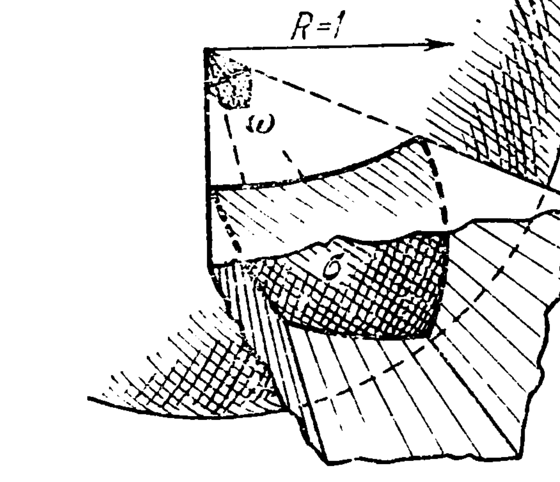


Рис. 416.

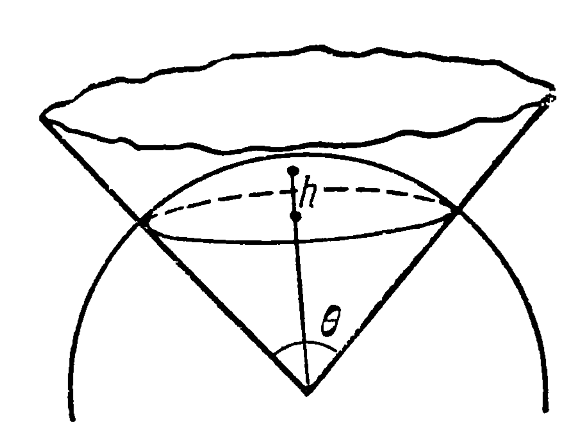


Рис. 417.

Задача. Найти телесный угол, ограниченный конусом вращения с углом при вершине осевого сечения, равным θ (рис. 417).

Решение. Проведем сферу единичного радиуса с центром в вершине конуса. Задача сводится к вычислению площади шапочки этой поверхности, лежащей внутри конической поверхности. Находим высоту стрелки соответствующего сегмента сферы:

$$h = 1 - \cos\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{4}.$$

Площадь искомой поверхнссти равна $2\pi h = 4\pi\sin^2\frac{\theta}{4}$. Итак, телесный угол при вершине конуса измеряется числом $4\pi\sin^2\frac{\theta}{4}$. Если $\theta > \pi$, то формула дает меру внешнего телесного угла. При $\theta = 2\pi$ получим полный телесный угол (внешний угол по отношению к конусу, превратившемуся в луч).

Упражнения

1. Найти объем и поверхность шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром, равным a.

2. Отношение объема шара к объему вписанного в него цилиндра равно 16/9. Определить угол между диагональю осевого сечения цилиндра и его осью.

3. Три параллельные плоскости рассекают диаметр шара на четыре равные части. Найти объемы частей шара, на которые он разбит этими плоскостями.

4. Каким должен быть угол наклона образующей к основанию конуса, чтобы площадь поверхности вписанного в него шара делилась окружностью, по которой шар касается конуса, в отношении 1:3?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава I

§ 1. 1. а) 6; б) 7. 2. а) 360; б) 43 560. 5. а) 5 и $^2/_3$; б) —5 и $^3/_5$; в) 0 и 0,376; г) —3 и 0,842. 6. а) 14,78125; б) 0,(2); в) 1,(468). 7. а) 163/111; б) 41/12. 8. 0,01; 0,12%. 9. $658{,}28 < a_0 < 658{,}64$. 10. Цифры 6, 9 и 3 верные, а 5 и 8 сомнительные. 11. 32,2. 12. а) 0,58000; б) $78\,100\cdot 10$; в) $781\cdot 10^3$. 15. (2, 3); (—2, —3); (—2, 3); (—3, 2). 17. $A(-\sqrt{3}, 1)$; $B(-1, 0)$; $C(3, 0)$; $D(1, -1)$. 18. $A(2, 0)$; $B(1, \pi)$; $C(2, \pi/2)$; $D(\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

§ 2. 1. а) 100; б) 1/84. 2. а) $3\sqrt[5]{9}$; б) $10\sqrt{15}$. 3. а) $3\sqrt{3}$; б) $2\sqrt[4]{3}$. 4. а) $2^{5/6}$; б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$. 5. а) 52,46; б) 1,690; в) 0,189.

§ 3. 1. а) 24; б) $\frac{13}{5}-\frac{1}{5}i$; в) $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$; г) $\frac{14}{5}i$. 3. а) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; в) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; г) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; д) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; е) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; ж) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; з) $\cos 42°+i\sin 42°$; и) $\cos 249°+i\sin 249°$. 4. а) $8(\cos 49°+i\sin 49°)$; б) $15\left(\cos\frac{12\pi}{35}+i\sin\frac{12\pi}{35}\right)$; в) $2i$. 5. а) $27(\cos 33°+i\sin 33°)$; б) $1+i$; в) -9; г) -64; д) $512+512\sqrt{3}i$; е) -1024; ж) $-2048-2048\sqrt{3}i$. 6. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$; i; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; $-i$; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; б) $1+i$; $\sqrt{2}(\cos 165°+i\sin 165°)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $\sqrt{2}(\cos 285°+i\sin 285°)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; в) $\sqrt{2}(1+i)$; $\sqrt{2}(1-i)$; $\sqrt{2}(-1+i)$; $\sqrt{2}(-1-i)$.

Глава II

§ 1. 1. а) 8; б) $-^3/_4$. 2. а) $(x+y+2)(x-1)$; б) $(a+b)(a+c)(b+c)$. 3. $25x^4+40x^3-14x^2-24x+9$. 4. $a^{10}+\frac{5}{2}a^7+\frac{5}{2}a^4+\frac{5}{4}a+\frac{5}{16a^2}+\frac{1}{32a^5}$. 5. а) $11-2i$; б) $597-122i$. 6. $n=10$; $252\,pq$. 7. а) $-3xy/(x^3+y^3)$; б) $(z^2+2)^2$; в) $2a^2b^2$; г) $2y^2/x$; д) $m+n$.

§ 2. 1. а) 2 при $x>0$, —2 при $x<0$; б) $\frac{1}{2x(x-1)}$ при $x>1$, 0 при $x<-1$; в) 8. 2. 0. 3. а) $(2a-1)(\sqrt{a^2+1}-a)$; б) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30})/12$; в) $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2})/(x+y)$.

Глава III

§ 1. 1. а) 2; б) 12; в) $^1/_5$; г) $^3/_8$. 2. а) $^1/_{15}$; б) $2\sqrt{2}$; в) $^1/_{144}$; г) 0,001; д) 3. 3. а) 27; б) 16; в) 100; г) 11; д) 729; е) $^1/_2$. 4. а) 729; б) 72. 5. а) $^{11}/_3$; б) $^7/_{15}(\log_3 a - \log_3 b)$; в) 37/60. 6. а) $\sqrt[8]{m^2n^3}/n$; б) $^2/_3$. 7. а) $\log_2\left(1/\sqrt[9]{a^5}\right)$; б) $^3/_4$.

§ 2. 1. а) 0,0897; б) 0,23; в) 0,1718; г) 227; д) 2,14. 2. а) 1,584; б) —1,61.

Глава IV

§ 1. 1. а) $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$; б) $(-\infty, -6]$, $[6, \infty)$; в) $(-\infty, +\infty)$; г) $[-11, 11]$. 2. а) $y=\sqrt[3]{\frac{3}{x}-1}$; б) $y=(2x+1)/(2-y)$. 4. а) $y=\operatorname{tg} u$, $u=\sqrt{\pi x}$; б) $y=u^3$, $u=\log_2 x$. 5. а) $x^2+y^2 \leqslant 4$; б) $\begin{cases} x>0, \\ y>1. \end{cases}$

§ 4. 1. $Q(x)=x+1$, $R(x)=x-6$. 2. а) Нет; б) да; в) да; г) нет. 3. $a=-4$, $b=1$. 4. 3; $(x-1)^3(x+1)$.

Глава V

§ 2. 2. а) $x_1=-2$, $x_2=-34$; б) $x_1=x_2=-11$; в) $x_1=-^1/_2$, $x_2=-7$; г) $x_{1,2}=-4\pm 5i$; д) $x_{1,2}=1\pm\frac{i}{2}$. 3. а) 1) x — любое, если $m=0$ и $n=0$; 2) $x=1$, если $m=0$, $n\neq 0$; 3) $x_1=1$; $x_2=\frac{n}{m}$, если $m\neq 0$; б) $x_1=\frac{a+b}{2}$; $x_2=\frac{a-b}{2}$; в) 1) $x=2$, если $a=0$; 2) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{a}$, если $a\neq 0$; г) 1) x — любое, если $a=b=0$; 2) $x=\frac{a-b}{2a}$, если $a+b=0$, $a\neq 0$; 3) $x_1=-1$; $x_2=\frac{b-a}{b+a}$, если $a+b\neq 0$; д) 1) x — любое, если $ab=mn=an+bm=0$; 2) $x=\frac{ab}{an+bm}$, если $mn=0$; $an+bm\neq 0$; 3) $x_1=\frac{a}{m}$, $x_2=\frac{b}{n}$, если $mn\neq 0$; 4) уравнение решений не имеет, если $m=n=0$, $ab\neq 0$. 4. а) $x_1=-\sqrt[3]{20}/2$, $x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{20}}{4}\pm\frac{\sqrt[6]{10800}}{4}i$; б) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt[4]{7}}{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt[4]{7}}{2}i$. 5. а) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm i$; б) $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=\pm 7i$; в) $x_{1,2}=\pm 2i$, $x_{3,4}=\pm 3i$; г) $x_{1,2}=\pm\sqrt{42}/3$, $x_{3,4}=\pm i$. 6. а) $x_1=-2$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}\,i$, $x_4=3$, $x_{5,6}=-\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; б) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 3i$; $x_{5,6}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i$, $x_{7,8}=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i$. 7. а) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$; б) $x_1=-2$, $x_{2,3}=(7\pm\sqrt{7}\,i)/2$. 8. а) $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

§ 3. 1. (0, 3). 2. (—2, 3, 5). 3. а) Система имеет бесконечное множество решений; б) система не имеет решений; в) система имеет единственное решение. 4. (—1, 2), $(-^8/_5, -^2/_5)$. 5. а) (17, —2), (—2, 17); б) (7, 2), (—2, —7); в) (5, 3), (5, 3). 6. (2, 1), (—2, —1), (—1, —2), (1, 2). 7. а) (2, 3), (3, 2); б) (2, 2), (2, —2), (—2, 2), (—2, —2); в) (1, 2); г) (1, 2), (2, 1).

§ 4. 1. а) $x=5$; б) $x=2$; в) $x=0$; г) $x_1=1$, $x_2=-3$; д) $x_1=2$, $x_2=3$. 2. а) $x_1=-1$, $x_2=^3/_2$; б) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=5$. 3. а) $x_1=0$, $x_2=4$; б) $x=^3/_2$;

в) $x=1$. **4.** а) $x=4$; б) $x=2$; в) $x=4$; г) $x_1=1$, $x_2=2$. **5.** а) (4, 2), (2, 1); б) (5, 4), (—9, 25); в) (2, 2), (8, $^1/_8$); г) (2, 3), ($^1/_2$, 3), (4, $^3/_2$), ($^1/_4$, $^3/_2$); д) $(\sqrt{2}, 2)$, $(\sqrt[3]{4}/2, -3)$; е) (8, 16), $(8\log_3^3 2,\ 16\log_2^4 3)$.

Глава VI

§ **2. 1.** а) $(-\infty, -^4/_3)$; б) решений нет. **2.** а) $(6, \infty)$; б) решений нет. **3.** а) $(-1, -^2/_3)$; б) $[-1, 2]$; в) решений нет; г) $(-\infty, -3)$, $(-2, -1)$; д) $(-\infty, 2]$. **4.** а) $(-\infty, -7)$, $(^1/_3, \infty)$; б) $(-\infty, ^{11}/_9)$, $(2, \infty)$; в) $(-\infty, -3)$, $(2, 3)$; г) $(-\infty, -8)$, $(-1, 0]$, $[1, \infty)$. **5.** а) $[4, \infty)$; б) $[-1, 3)$. **6.** а) $(1, 3)$; б) $[1, \infty)$. **7.** а) $(2, \infty)$; б) $(1, 3)$.

Глава VII

§ **2. 1.** 87 или 69. **2.** 4.

§ **3. 1.** $a_1=1$, $q=-^2/_3$ или $a_1=^1/_5$, $q=^2/_3$. **2.** 7, —28, 112, —448. **4.** $a_1a_2 \ldots a_n=a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Глава VIII

§ **1. 1.** а) I четверть; б) IV четверть; в) II четверть; г) III четверть; д) II четверть; е) IV четверть; ж) IV четверть. **2.** а) IV четверть; б) II четверть; в) III четверть; г) I четверть; д) IV четверть; е) I четверть. **3.** а) $n=-1$, $\alpha=90^\circ$; б) $n=1$, $\alpha=45^\circ$; в) $n=-3$, $\alpha=120^\circ$; г) $n=5$, $\alpha=0^\circ$; д) $n=-5$, $\alpha=49^\circ$.

§ **2. 1.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет. **2.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **3.** а) IV четверть; б) II четверть; в) I четверть; г) III четверть; д) II четверть; е) III четверть. **4.** 1) $0 \leqslant \alpha < \pi/2$ (I четверть); $\sec\alpha$ монотонно возрастает, $1 \leqslant \sec\alpha < +\infty$; 2) $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$ (II четверть): $\sec\alpha$ монотонно возрастает, $-\infty < \sec\alpha \leqslant -1$; 3) $\pi \leqslant \alpha < 3\pi/2$ (III четверть): $\sec\alpha$ монотонно убывает, $-1 \geqslant \sec\alpha > -\infty$; 4) $3\pi/2 < \alpha \leqslant 2\pi$ (IV четверть): $\sec\alpha$ монотонно убывает, $+\infty > \sec\alpha \geqslant 1$. Вообще $1 \leqslant |\sec\alpha| < +\infty$ для любого α. **5.** 1) $0 < \alpha \leqslant \pi/2$ (I четверть): $\operatorname{cosec}\alpha$ монотонно убывает, $+\infty > \operatorname{cosec}\alpha \geqslant 1$; 2) $\pi/2 \leqslant \alpha < \pi$ (II четверть): $\operatorname{cosec}\alpha$ монотонно возрастает, $1 \leqslant \operatorname{cosec}\alpha < +\infty$; 3) $\pi < \alpha \leqslant 3\pi/2$ (III четверть): $\operatorname{cosec}\alpha$ монотонно возрастает, $-\infty < \operatorname{cosec}\alpha \leqslant -1$; 4) $3\pi/2 \leqslant \alpha < 2\pi$ (IV четверть): $\operatorname{cosec}\alpha$ монотонно убывает, $-1 \geqslant \operatorname{cosec}\alpha > -\infty$. Вообще $1 \leqslant |\operatorname{cosec}\alpha| < +\infty$ для любого α. **6.** а) Нет; б) нет; в) да. **7.** а) Нет; б) нет; в) да.

§ **3. 5.** 1. **6.** $\sin^2\alpha$. **7.** 0,48. **8.** $\dfrac{m(3-m^2)}{2}$. **10.** $\sin\alpha=\pm 1/\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, $\cos\alpha=\pm\operatorname{ctg}\alpha/\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha=1/\operatorname{ctg}\alpha$. **11.** $\cos\alpha=-^3/_5$, $\operatorname{tg}\alpha=-^4/_3$, $\operatorname{ctg}\alpha=-^3/_4$. **12.** а) Нет; б) да.

§ **4. 1.** $\sin(-\pi/6)=-^1/_2$, $\cos(-\pi/6)=\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg}(-\pi/6)=-\sqrt{3}/3$, $\operatorname{ctg}(-\pi/6)=-\sqrt{3}$, $\sec(-\pi/6)=2/\sqrt{3}$, $\operatorname{cosec}(-\pi/6)=-2$. **2.** $\sin(-45^\circ)=-\sqrt{2}/2$, $\cos(-45^\circ)=\sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg}(-45^\circ)=-1$, $\operatorname{ctg}(-45^\circ)=-1$, $\sec(-45^\circ)=\sqrt{2}$, $\operatorname{cosec}(-45^\circ)=-\sqrt{2}$. **5.** а) Нечетная; б) ни четная, ни нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) четная; д) ни четная, ни нечетная; е) четная. **6.** а), д), е), ж), з). **7.** а) 2π; б) π; в) 4π; г) 2π; д) π; е) 2π; ж) 2π; з) π; и) 6π; к) 30π; л) периодом является любое число (основного периода нет); м) 1.

§ **5. 1.** а) $\cos 36^\circ$; б) $\cos(\pi/4+3\alpha)$; в) $\sin 37^\circ$; г) $\sin(\pi/5)$; д) $\operatorname{ctg} 39^\circ$; е) $\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha/2)$; ж) $\operatorname{tg} 53^\circ 31' 14''$. **2.** а) $-^1/_2$; б) $\cos 2^\circ 31'$; в) 1; г) $-1/\sqrt{3}$. **3.** —11/10. **4.** а) 4; б) —1. **5.** 1. **6.** а) $-^1/_2$; б) $-\sqrt{3}/2$; в) -1; г) $\operatorname{ctg} 49^\circ$ или $\operatorname{tg} 41^\circ$. **7.** $2(2-\sqrt{3}) \approx 0{,}54$.

Глава IX

§ 1. 1. а) Область определения функции: x — любое, кроме $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$. Область изменения значений функции $|\sec x| \geqslant 1$; б) область определения функции: x — любое, кроме $x=\pi n$. Область изменения значений функции $|\operatorname{cosec} x| \geqslant 1$. 2. а) $0 < 1-\cos 0,5 < 0,125$; б) $0 < 1-\cos 0,6 < 0,18$; в) $0 < 0,3-\sin 0,3 < 0,0135$; г) $0 < 0,4-\sin 0,4 < 0,032$.

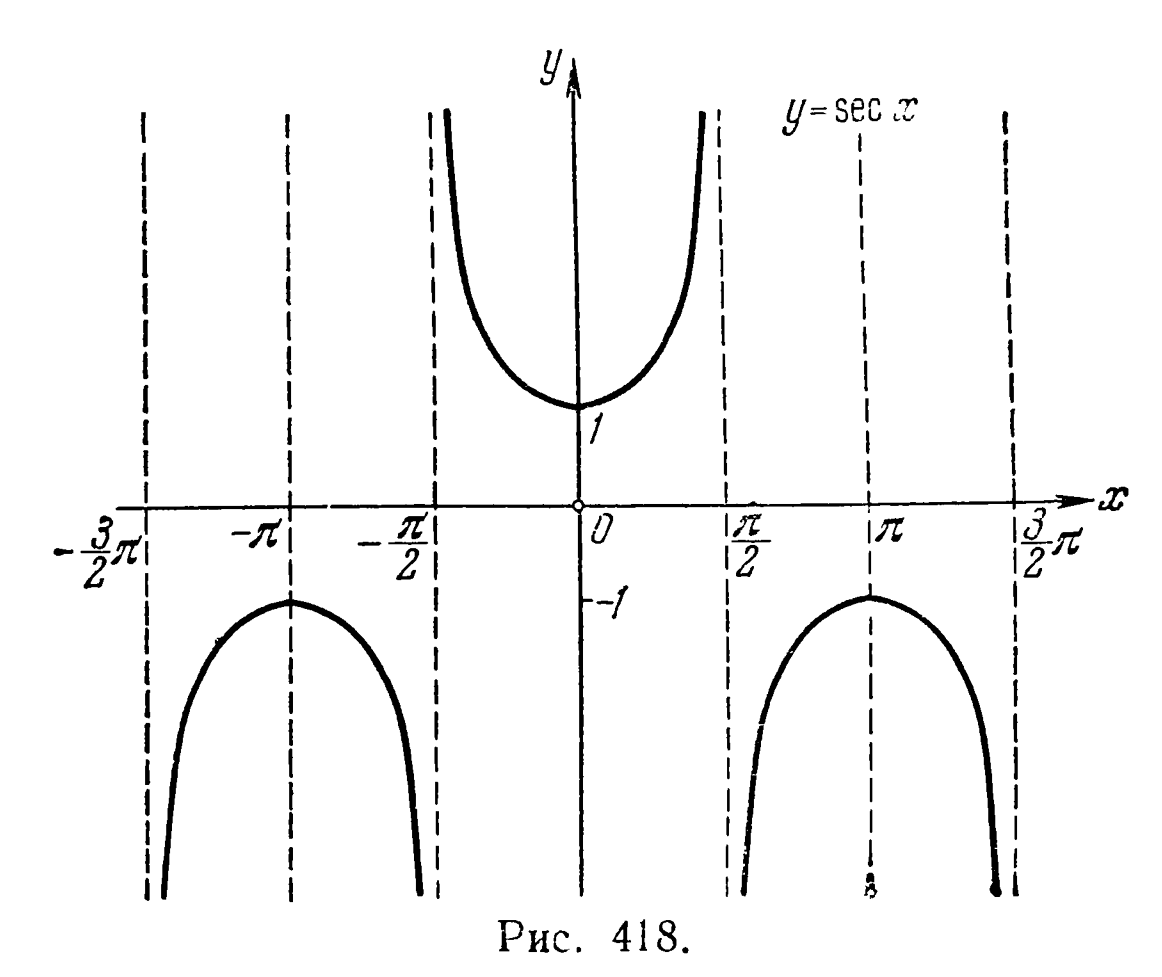


Рис. 418.

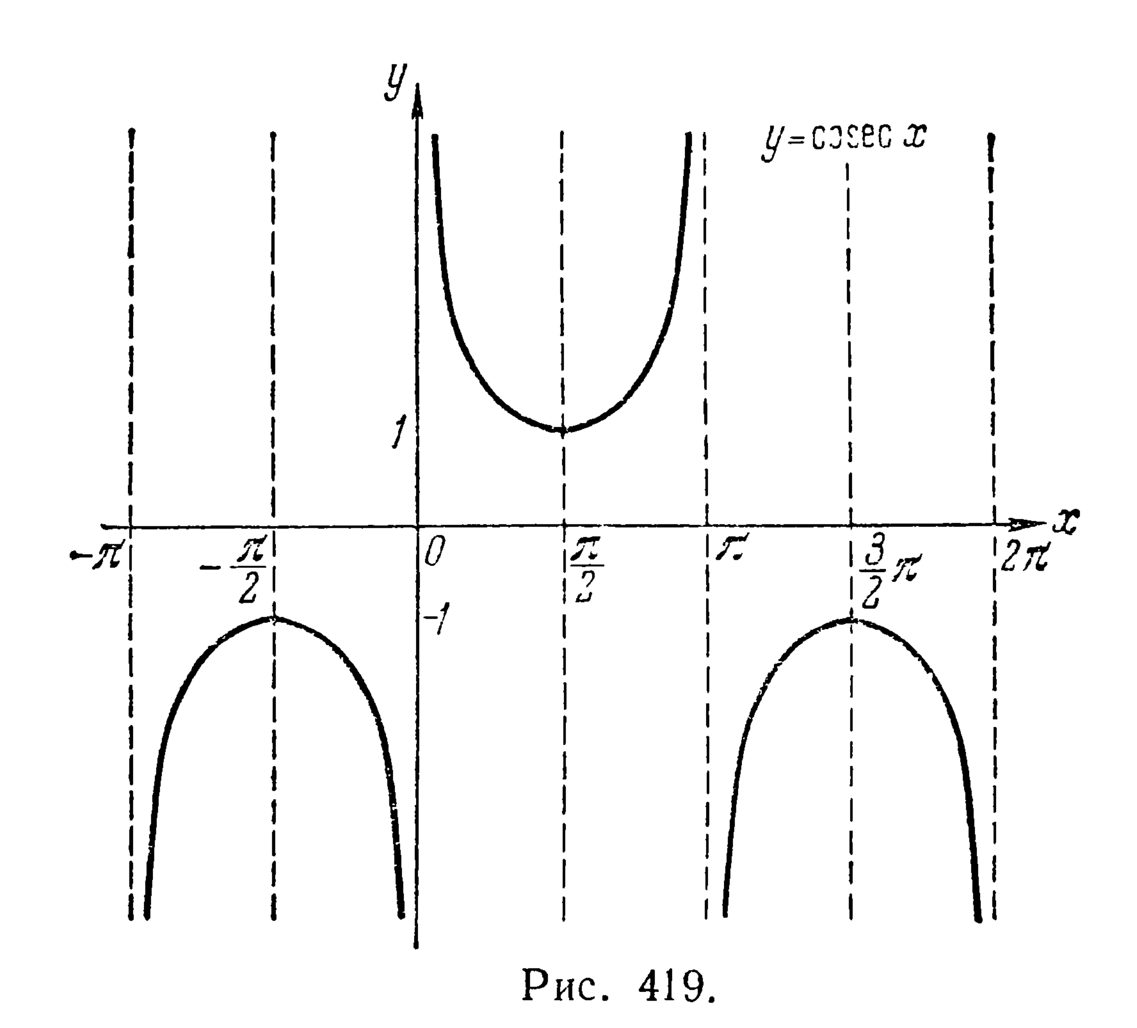


Рис. 419.

§ 2. 1. а) 0,6157; б) 0,6820; в) 0,5463. 2. 1) Рис. 418; 2) рис. 419; 3) рис. 420; 4) рис. 421; 5) $y=\cos|x|=\cos x$; 6) рис. 422; 7) рис. 422, ибо $y=|\cos|x||=|\cos x|$; 8) рис. 423; 9) рис. 424; 10) рис. 425; 11) рис. 426; 12) рис. 427.

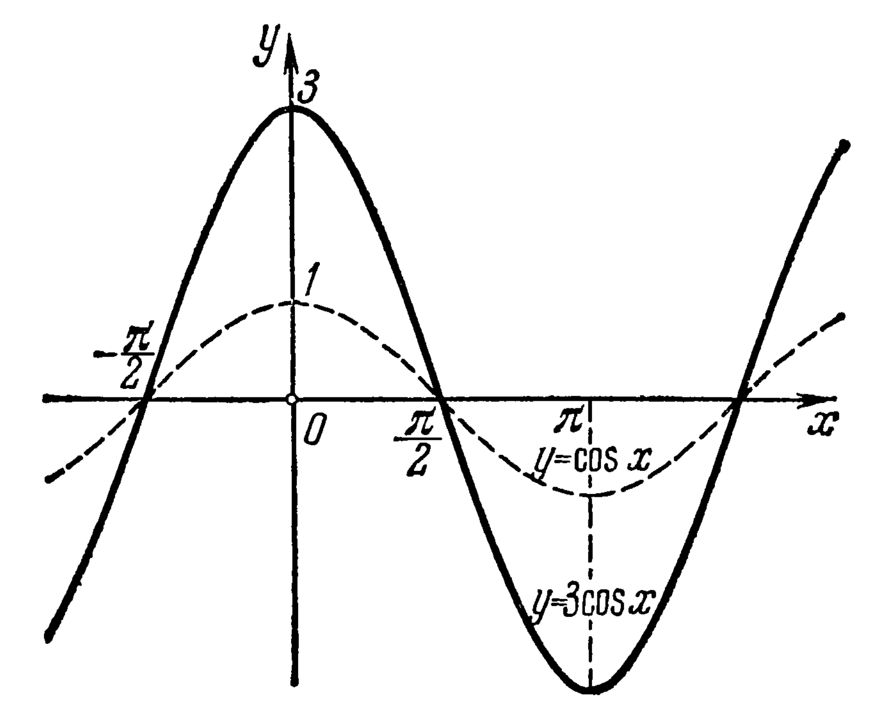


Рис. 420.

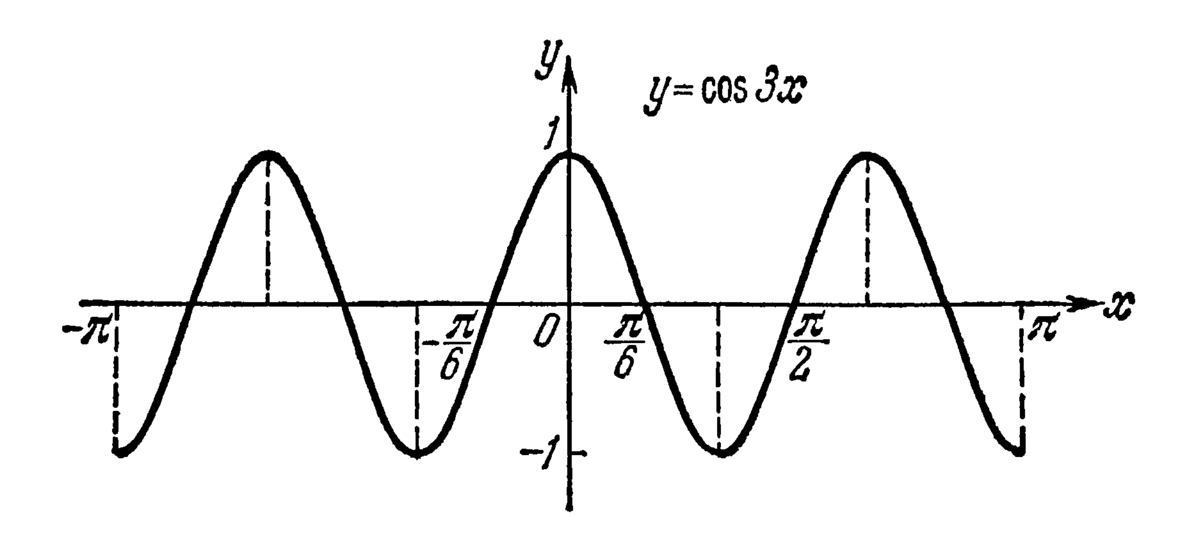


Рис. 421.

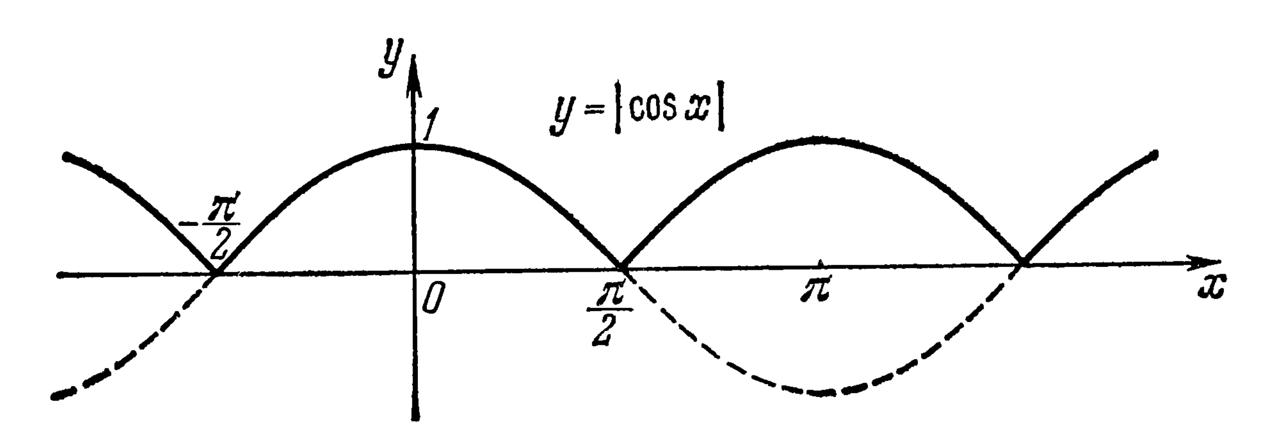


Рис. 422.

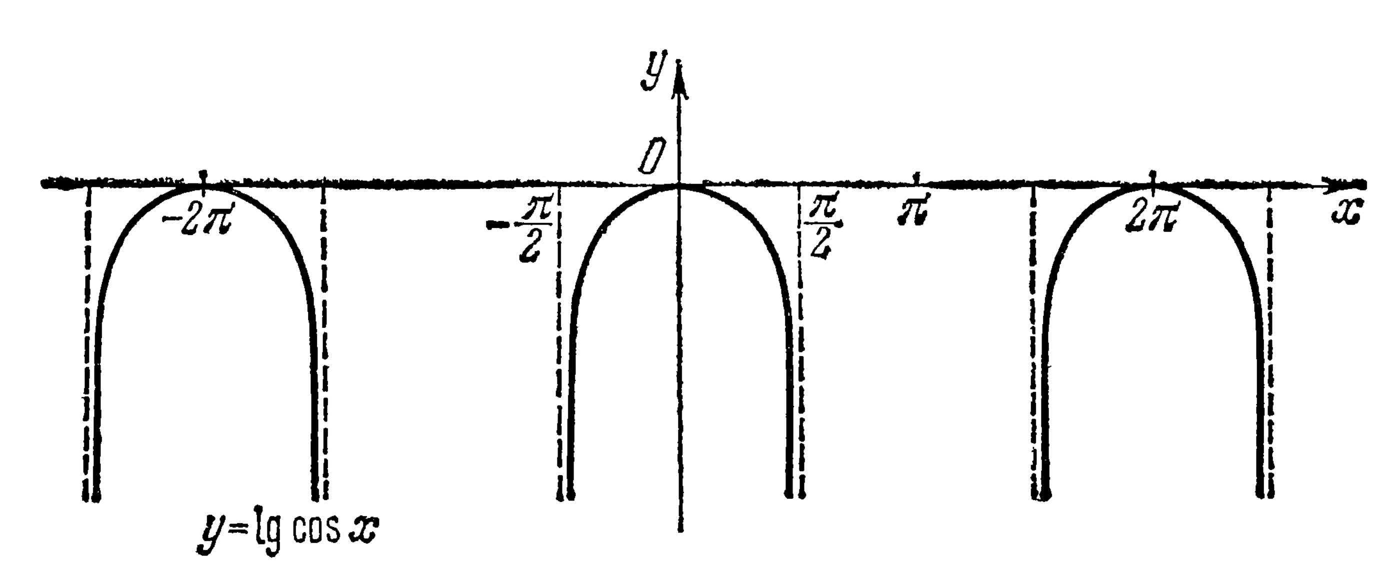
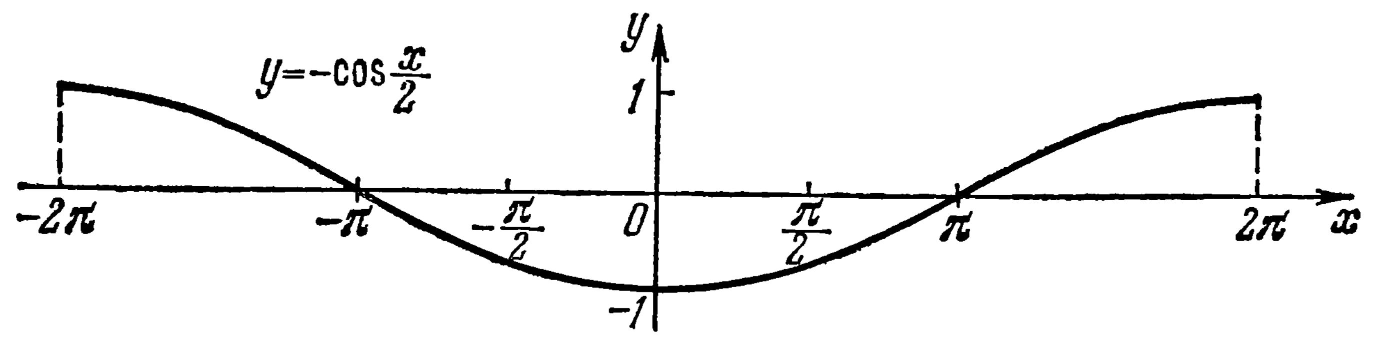
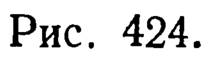


Рис. 423.




Рис. 424.

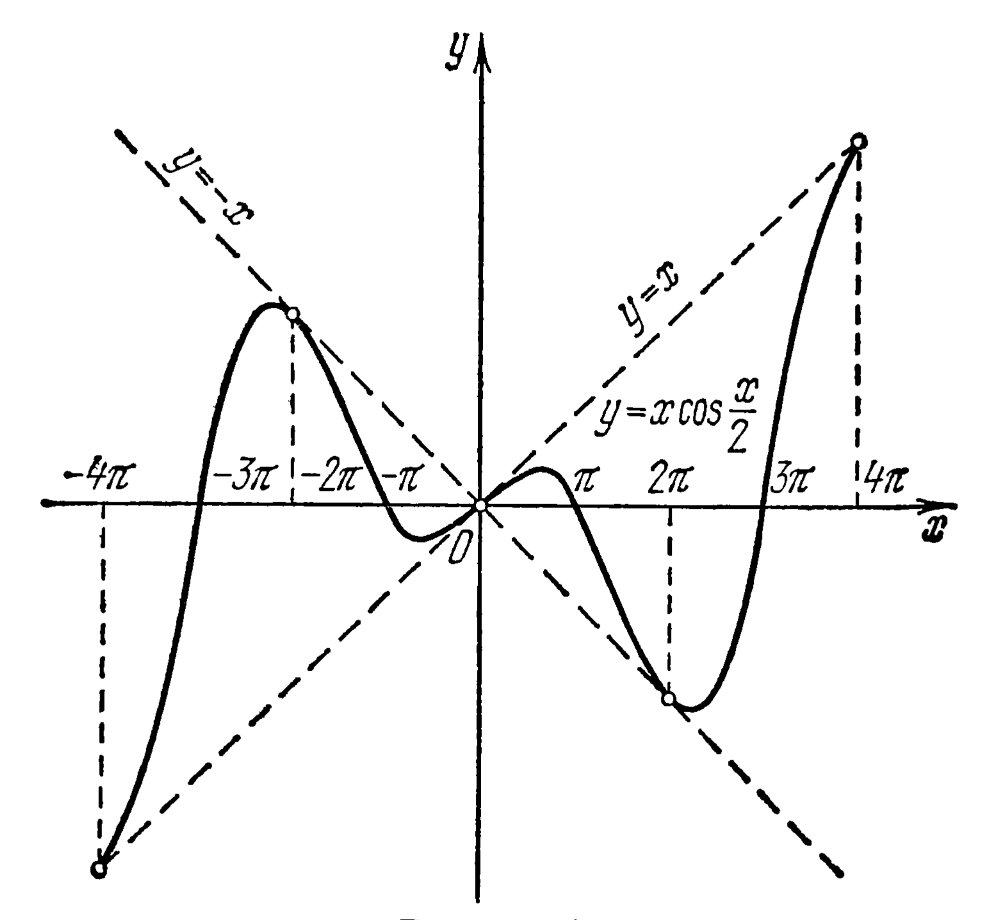


Рис. 425.

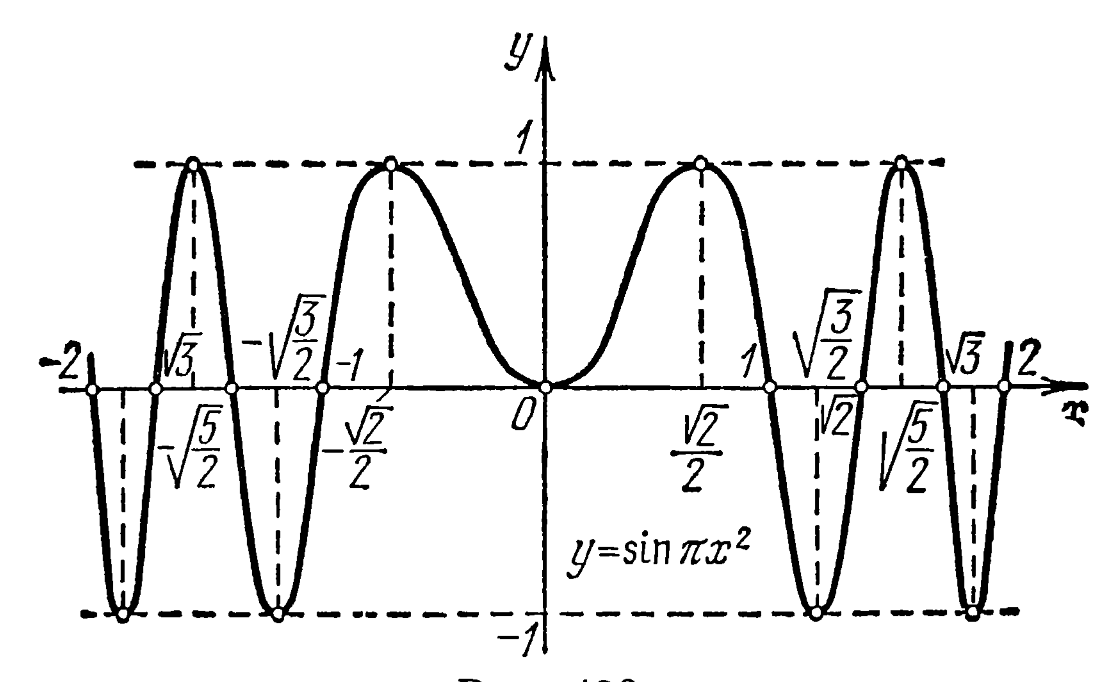


Рис. 426.

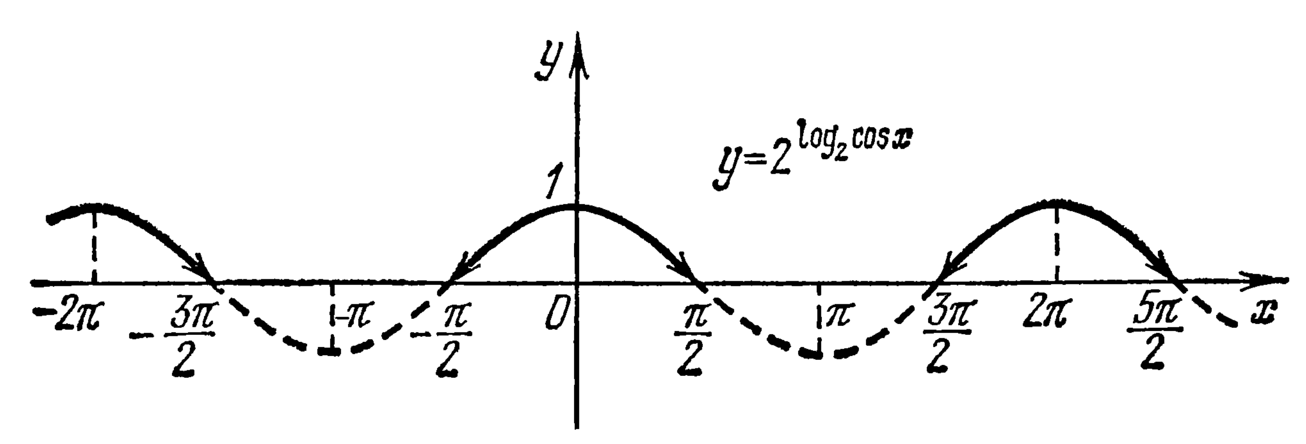


Рис. 427.

Глава X

§ 1. 1. а) $-0,259$; б) $-0,259$; в) $0,268$; г) $3,73$.

§ 2. 2. $A=\frac{1}{5+4\sin x}$. 4. $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$; $\cos 4\alpha=$ $=\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$. 5. $\cos^3 2\alpha$. 6. $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=$ $=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3$. 7. $-\frac{4\sin 2x}{\cos^2 2x}$. 10. $\sin\alpha=\frac{60}{61}$, $\cos\alpha=-\frac{11}{61}$. 11. $\frac{69\,696}{931}$. 12. $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

§ 3. 1. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/4=0,79$. 2. а) $0,061$; б) $0,99$; в) $0,03$; г) $0,23$; д) $0,72$; е) $0,30$. 3. $\cos^3 2\alpha$. 5. $A=1/8$. 8. $\sqrt{3}/2\approx 0,87$. 9. $1/4$. 10. 3. 11. 3.

§ 4. 1. $2\sin\frac{7\pi}{240}\cos\frac{\pi}{240}$. 2. $2\sin 0,8\cos 2,0$. 3. $2\cos 25^\circ\cos 15^\circ$. 4. $-2\sin\frac{3\pi}{40}\sin\frac{\pi}{40}$. 5. $\frac{\sin 13,6}{\cos 3,2\cos 10,4}$. 6. $\frac{\sin 87^\circ 54'}{\cos 91^\circ 45'\cos 3^\circ 51'}$. 7. $\frac{2}{\sin 4}$. 8. $2\sqrt{3}\approx 3,46$. 9. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$. 10. $2\cos\alpha\sin 3\alpha\sin 5\alpha$. 11. $\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. 12. $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ\cos 50^\circ}$. 13. $\frac{8}{3}\cos 6\alpha\sin^3\alpha$.

§ 5. 1. $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. 2. $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. 3. $4\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 4. $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 5. $4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$. 6. $\frac{2\sqrt{3}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2\alpha}$. 7. $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$. 8. $\frac{12\sin\left(\frac{\pi}{6}-4\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+4\alpha\right)}{\cos^2 4\alpha}$. 9. $4\cos\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 10. $2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 11. $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

Глава XI

§ 1. 1. $\pi/3$. 2. $-\pi/6$. 3. $2\pi/3$. 4. $\pi/6$. 5. $-\pi/3$. 6. $\pi/4$. 7. $3\pi/4$. 8. $\pi/6$. 9. Рис. 428. 10. Рис. 429. 11. Рис. 430. 12. Рис. 431. 13. Рис. 431, ибо $y=\left|\arcsin\frac{1}{x}\right|=\arcsin\frac{1}{|x|}$.

§ 2. 1. а) $3/5$; б) $2\sqrt{2}/3$; в) $\sqrt{5}/3$; г) $-3/\sqrt{10}$; д) $\sqrt{15}$; е) $2/\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{6}/12$; з) $-2b/a$. 2. а) $-\sqrt{3}/2$; б) $\sqrt{15}/8$; в) $-17/18$; г) $-40/9$; д) $\sqrt{7}/4$; е) $-5/6$. 3. а) да; б) да. 4. а) $\sqrt{3}/3$; б) $\sqrt{10}/10$. 6. а) $29/25$; б) $\sqrt{2}/2+3/10$; в) $0,4$. 7. а) 1; б) $\approx 0,44$; в) $-119/120$; г) $1/2$; д) 1; е) 0. 9. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) да; ж) нет; з) да.

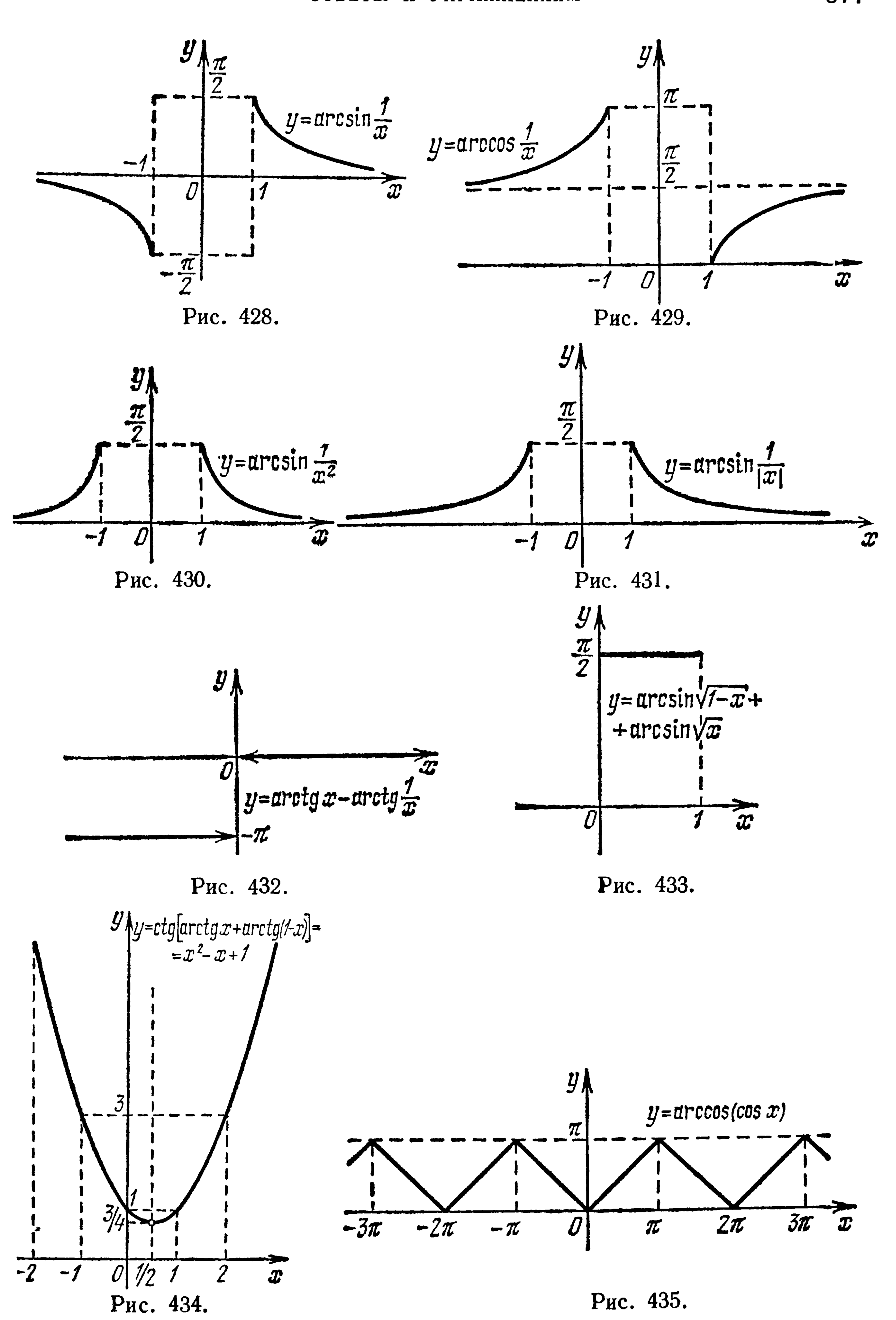


Рис. 428. Рис. 429. Рис. 430. Рис. 431. Рис. 432. Рис. 433. Рис. 434. Рис. 435.

10. а) $y=\begin{cases} 0, & \text{если } x>0, \\ -\pi, & \text{если } x<0 \end{cases}$ (рис. 432); б) $y=\pi/2$ на отрезке $[0, 1]$ (рис. 433); в) $y=x^2-x+1$ (рис. 434).

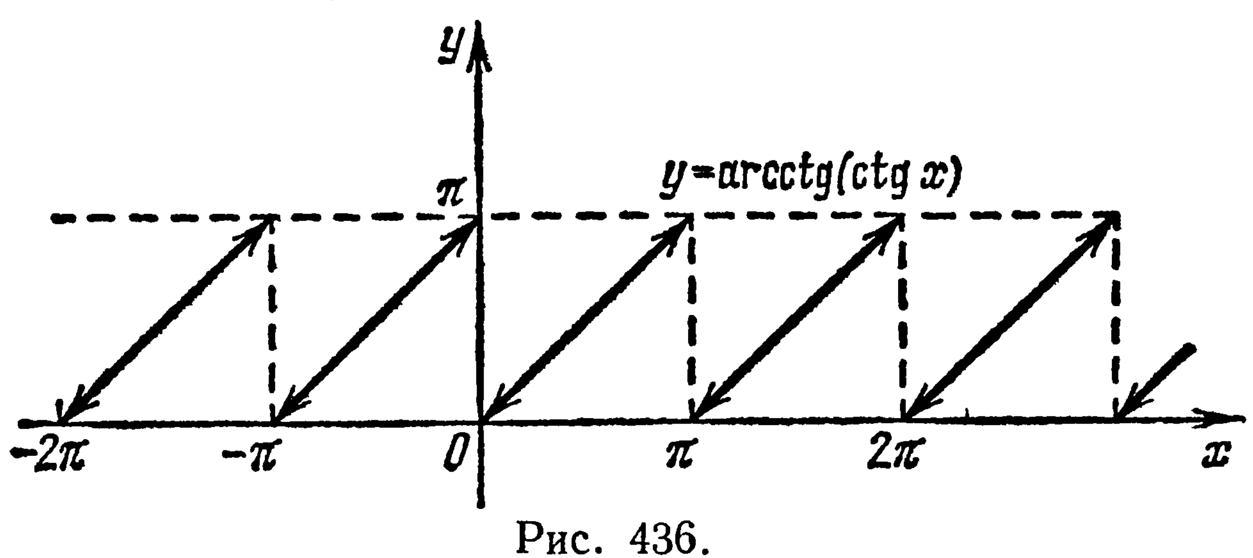


Рис. 436.

§ 3. **1.** Рис. 435. **2.** Рис. 436. **3.** 1. **4.** $\pi-3$. **5.** $\pi-4$. **6.** $5-2\pi$. **7.** $6-2\pi$. **8.** $7-2\pi$. **9.** $\pi/3$. **10.** $-\pi/4$. **11.** $\pi/3$. **12.** $-\pi/2$. **13.** $\pi/2$. **14.** $3\pi/4$.

Глава XII

§ 1. **1.** $x=n\pi+(-1)^n\pi/3$. **2.** $x=n\pi+(-1)^{n+1}\pi/6$. **3.** $x=2n\pi\pm\pi/3$. **4.** $x=2n\pi\pm 3\pi/4$. **5.** $x=n\pi+\pi/6$. **6.** $x=n\pi-\pi/3$. **7.** $x=n\pi+\pi/3$. **8.** $x=n\pi+5\pi/6$. **9.** $x=2n\pi\pm 0{,}2$. **10.** $x=n\pi-0{,}7$. **11.** $x=(n+1)\pi-0{,}3316$. **12.** $x=n\pi+(-1)^{n+1}\pi/6$. **13.** $x=2\pi n\pm\pi/3$. **14.** $x=n\pi+\operatorname{arctg}(^3/_2)$. **15.** $x=n\pi+\operatorname{arcctg}(2/\sqrt{3})$. **16.** $x=\frac{2\pi}{7}n\pm\frac{5}{42}\pi$. **17.** $x=\frac{\pi n}{3}\pm\frac{\pi}{9}$. **18.** $x=\frac{\pi n}{8}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{48}$.

§ 2. **1.** $x_1=\pi n+\pi/4$ и $x_2=\pi n-\operatorname{arctg}(^3/_2)$. **2.** $x_1=\pi n+\pi/4$ и $x_2=\pi n+\operatorname{arctg}3$. **3.** $x_1=2\pi n+\pi/3$ и $x_2=(2n+1)\pi$. **4.** $x=2\pi n\pm 2\pi/3$. **5.** $x_1=\pi n+(-1)^n\arcsin(^2/_5)$ и $x_2=\pi n+(-1)^{n+1}\arcsin(^3/_7)$. **6.** $x=\pi n+(-1)^n\arcsin(^1/_5)$. **7.** Уравнение решений не имеет. **8.** $x_1=2\pi n+2\pi/3$ и $x_2=2\pi n+\arccos(59/62)$. **9.** $x=\pi n-\operatorname{arctg}(^1/_3)$. **10.** $x=\pi n\pm {}^1/_2\arccos(^1/_3)$. **11.** $x=\pi n/2$. **12.** $x_1=\pi n$ и $x_2=\pi n+\operatorname{arctg}2$. **13.** $x_1=2\pi n$, $x_2=2\pi n+\pi/2$ и $x_3=\pi n-\pi/4$. **14.** $x_1=(2n+1)\pi$ и $x_2=n\pi+(-1)^n\pi/3$. **15.** $x=\pi n/4$ (если $n\neq 4k+2$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). **16.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2n+1)$ и $x_2=\frac{\pi n}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$. **17.** $x_1=2\pi n$ и $x_2=\frac{\pi}{17}(2n+1)$. **18.** $x_1=\frac{2\pi}{17}n$ и $x_2=\frac{2\pi}{3}n$. **19.** $x_1=\frac{\pi}{18}(4n+1)$ и $x_2=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. **20.** $x=-\pi/2+2n\pi$. **21.** $x_1=2n\pi+2\operatorname{arcctg}2$ и $x_2=(2n+1)\pi$. **22.** $x_1=2n\pi$ и $x_2=2n\pi+2\pi/3$.

§ 3. **1.** $x=\frac{\pi}{4}(4n-1)+(-1)^n\arcsin\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **2.** $x=\frac{\pi}{6}(6n-1)+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. **3.** $x=\frac{\pi}{4}(4n-1)+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}$. **4.** $x=\frac{\pi}{6}(6n-1)+(-1)^n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}[(6n-1)+(-1)^n]$. **5.** $x=\frac{\pi}{18}[2(3n+1)+(-1)^n]$. **6.** $x=\pi n/4$. **7.** $x_1=\pi n/15$ и $x_2=\pi n/7$. **8.** $x=\pi n/4$. **9.** $x_1=\pi n/17$ и $x_2=\pi n/7$. **10.** $x_1=\frac{\pi}{14}(2n+1)$ и $x_2=\frac{\pi}{10}(2n+1)$. **11.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2n+1)$ и $x_2=\frac{\pi}{34}(2n+1)$. **12.** $x_1=\frac{\pi n}{6}$ и

$x_2=\frac{\pi}{22}(2n+1)$. **13.** $x=\frac{\pi}{6}(2n+1)$. **14.** $x=\frac{\pi}{30}(2n+1)$. **15.** $x=\frac{\pi n}{2}\pm\frac{\pi}{12}$. **16.** Уравнение не имеет решений. **17.** $x_1=\frac{\pi n}{2}$ и $x_2=\frac{\pi}{10}(2n+1)$. **18.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2n+1)$ и $x_3=\frac{\pi}{14}(2n+1)$. **19.** $x=\pi n\pm\pi/4$. **20.** $x=\pi n/2+(-1)^n\pi/4$. **21.** $x_1=\pi n/3$, $x_2=\pi n\pm\arccos\sqrt{2/3}$. **22.** $x=\pi n/3$. **23.** $x_1=2n\pi$, $x_2=\pi n+\pi/4$, $x_3=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\pi n-\frac{\pi}{4}$. **24.** $(2n\pi+\pi/2,\ -2n\pi)$ и $(2n\pi,\ \pi/2-2n\pi)$. **25.** Система не имеет решений. **26.** $(360^\circ k\pm 30^\circ+30^\circ,\ 360^\circ k\pm 30^\circ-30^\circ)$. **27.** $x_n=n\pi+\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos b)$, $y_n=-n\pi+\frac{b}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos b)$, если $|2a-\cos b|\leqslant 1$. **28.** $x_n=90^\circ n+(-1)^n 30^\circ+30^\circ$, $y_n=90^\circ n+(-1)^n 30^\circ-30^\circ$. **29.** $x_n=\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}$, $y_n=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi n}{2}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4}$. **30.** Частное решение: $x=\pi/3$, $y=\pi/2$. **31.** Частное решение: $x=-\pi/6$, $y=\pi/2$.

§ **4.** **1.** $\left(2n\pi+\frac{\pi}{6},\ 2n\pi+\frac{5}{6}\pi\right)$. **2.** $\left[2n\pi-\frac{4}{3}\pi,\ 2n\pi+\frac{\pi}{3}\right]$. **3.** $\left(2n\pi-\frac{2}{3}\pi,\ 2n\pi+\frac{2}{3}\pi\right)$. **4.** $\left(2n\pi+\frac{\pi}{6},\ 2n\pi+\frac{11}{6}\pi\right)$. **5.** $\left[n\pi+\frac{\pi}{6},\ n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. **6.** $\left(n\pi-\frac{\pi}{2},\ \ n\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)$. **7.** $\left(2n\pi+\frac{\pi}{3},\ \ 2n\pi+\frac{5}{3}\pi\right)$. **8.** $\left[\frac{2n+1}{2}\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3},\ \ \frac{2n+1}{2}\pi+\frac{\pi}{12}\right]$ и $\left[(n+1)\pi-\frac{\pi}{12},\ (n+1)\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right]$. **9.** $n\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant n\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. **10.** $\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{8}<x<\frac{n\pi}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ и $\frac{n\pi}{4}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<x<\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава XIII

§ **2.** **2.** 67:150. **4.** $15d/14$, $13d/14$. **5.** 20°. **6.** 4 *сек*. **7.** $\pi/6\approx 0{,}5236$; $5\pi/12\approx 1{,}3090$; $\pi/135\approx 0{,}02327$. **8.** 106°34′12″; 175°53′53″.

Глава XV

§ **3.** **2.** $1\frac{3}{7}$, $2\frac{6}{7}$, $4\frac{2}{7}$, $5\frac{5}{7}$, $7\frac{1}{7}$, $8\frac{4}{7}$. **3.** 24 *см*.

Глава XVI

§ **1.** **1.** $9\frac{2}{3}$, $11\frac{1}{3}$, 13, $14\frac{2}{3}$, $16\frac{1}{3}$, **2.** 8, 9, 15. **3.** $ab/(a+b)$.
§ **3.** **1.** 20 *см*.

Глава XVII

§ **1.** **1.** 160°. **2.** 40°, 80°, 60°. **3.** $mn/(m-n)$. **4.** $2\operatorname{arctg}2$.
§ **2.** **1.** $\sqrt{3/5}$, $\sqrt{2/5}$. **2.** $\sqrt{ab}/2$. **3.** $54\sqrt{3}$, $18\sqrt{3}$. **4.** $\frac{ab\,|a^2-b^2|}{4(a^2+b^2)}$. **5.** 5, $\frac{33}{5}$, $\frac{70}{13}$, $\frac{42}{5}$, $\frac{99}{13}$, 9. **6.** 8, $\sqrt{89\pm 40\sqrt{3}}$. **7.** $\sqrt{76}$. **8.** $\sqrt{41-20\sqrt{3}}$; $\frac{10}{9+\sqrt{41-20\sqrt{3}}}$. **9.** $p-a$, $p-b$, $p-c$.

§ 3. 1. а) 0,4071; б) 0,7733; в) 0,9202. 2. а) 51°16′43″; б) 40°25′51″. 3. а) 20°26′6″; б) 38°20′. 4. а) $b=15{,}39$, $c=25$ и $B=38°$; б) $c=3126$. $A=17°45'$ и $B=72°15'$; в) $a=17{,}0$, $b=12{,}82$ и $A=53°$; г) $b=692{,}9$, $A=19°33'$ и $B=70°27'$.

5.

№	a	b	c	A	B	C
а)	(30)	69,82	87,26	(18°)	(46°)	116°
б)	(23,4)	24,04	2,249	(70°36′)	(104°12′)	5°12′
в)	(40,6)	(75,0)	45,90	27°57′	120°03′	(32°)
г)	(51,3)	(21,2)	31,08	157°20′	9°10′	(13°30′)
д)	(31)	(31)	38,17	(52°)	52°	76°
е)	(31)	(22)	13,91	(95°)	45°	40°
ж)	(15,4)	(30,8)	{42,74; 16,65}	(15°24′)	{32°05′; 147°55′}	{132°31′; 16°41′}
з)	(1,45)	(2,34)	—	(72°45′)	—	—
и)	(20)	(35)	(50)	18°12′	33°08′	128°40′
к)	(0,618)	(1,173)	(1,728)	11°00′	21°15′	147°45′

Глава XVIII

§ 1. 2. 1:4; 1:2; 3:4. 3. $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

§ 2. 1. Дуги $\frac{20\pi}{3\sqrt{3}}$, $\frac{40\pi}{3\sqrt{3}}$; площади сегментов $\frac{100\pi}{9}-\frac{25}{\sqrt{3}}$, $\frac{200\pi}{9}+\frac{25}{\sqrt{3}}$. 2. $2R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 3. $\left(\sqrt{2}+1-\frac{3\pi}{8}\right)R^2$.

Глава XIX

§ 2. 1. $\arcsin(1/4)$. 2. $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$. 3. $a\sqrt{26}/6$.

§ 4. 3. $\arccos(1/\sqrt{3})$.

Глава XX

§ 1. 1. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$. 2. $V=\frac{Q^2}{a}\sin\beta\cos\beta$, $\sigma=2Q\left\{\cos\beta+\sin\beta+\frac{Q}{a^2}\frac{\cos\beta\sin\beta}{\sin\alpha}\right\}$. 3. $\operatorname{arctg}\frac{5V}{2m^3}$. 4. $h=a\sqrt{6}/2$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/4)$.

§ 2. 1. $\sigma=\frac{3\sqrt{3}\,l^2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$, $V=\frac{\sqrt{3}\,l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{(4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^{3/2}}$. 2. $\sigma=\frac{\pi a^2}{4}$, $V=\frac{\pi\sqrt{6}}{108}a^3$. 3. $\arccos\frac{7}{9}$.

§ 3. 1. $\sigma=\frac{3\pi a^2}{2}$, $V=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,a^3$. 2. 60° или $\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}$. 3. $\frac{5\pi R^3}{24}$, $\frac{11\pi R^3}{24}$. 4. 60°.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

Тригонометрические функции

x°	x (радианы или числа)	sin x	tg x	ctg x	cos x		
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	0,0000	0,0000	0,0000	—	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
		cos x	ctg x	tg x	sin x	x (радианы или числа)	x°

Продолжение приложения I

$x°$	x (радианы или числа)	sin x	tg x	ctg x	cos x		
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
		cos x	ctg x	tg x	sin x	x (радианы или числа)	$x°$

Приложение II

Тригонометрические функции

x (радианы или числа)	sin x	cos x	tg x	x (радианы или числа)	sin x	cos x	tg x
I	II	III	IV	I	II	III	IV
0,0	0,0000	1,0000	0,0000	0,9	0,7833	0,6216	1,2602
0,1	0,0998	0,9950	0,1003	1,0	0,8415	0,5403	1,5574
0,2	0,1987	0,9801	0,2027	1,1	0,8912	0,4536	1,9648
0,3	0,2955	0,9553	0,3093	1,2	0,9320	0,3624	2,5722
0,4	0,3894	0,9211	0,4228	1,3	0,9636	0,2675	3,6021
0,5	0,4794	0,8776	0,5463	1,4	0,9854	0,1700	5,7979
0,6	0,5646	0,8253	0,6841	1,5	0,9975	0,0707	14,101
0,7	0,6442	0,7648	0,8423	1,6	0,9996	—0,0292	—34,233
0,8	0,7174	0,6967	1,0296				

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Владимир Валентинович Зайцев,
Валерий Витальевич Рыжков,
Марк Иванович Сканави

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
ПОВТОРИТЕЛЬНЫЙ КУРС

М., 1974 г., 592 стр. с илл.

Редактор *А. З. Рывкин*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 15/III 1974 г. Подписано к печати 26/VI 1974 г. Бумага $60 \times 90^1/_{16}$. Физ печ л 37 Условн. печ. л. 37. Уч.-изд. л 36,04. Тираж 500 000 экз. (1-й завод 1—100000) Цена книги 1 р. 11 к. Заказ № 1232

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А А Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54,
Валовая, 28

1р.11к.